В. А. ФОК

ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА, ВРЕМЕНИ И ТЯГОТЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1955

13-5-4

Фок Владимир Александрович
Теория пространства, времени и тяготения

Редактор *Ю. В. Новожилов.*

Техн. редактор *К. М. Волчок.* Корректор *А. И. Исакова.*

Сдано в набор 5/VII 1955 г. Подписано к печати 11/X 1955 г. Бумага 60×92/16. Физ. печ. л. 31,5.
Усл. печ. л. 31,5. Уч.-изд. л. 29,71. Тираж 8000 экз. Т-08408. Цена 16 р. 85 к. Заказ № 485.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, В-71, Б. Калужская ул., 15

Министерство культуры СССР Главное управление полиграфической промышленности.
4-я типография им. Евг. Соколовой. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7
Введение 9

Глава I. **Теория относительности**

§ 1. Координаты и время 17
§ 2. Положение тела в пространстве в данный момент времени в заданной системе отсчета 18
§ 3. Закон распространения фронта электромагнитной волны . . 20
§ 4. Уравнения для лучей 23
§ 5. Инерциальные системы отсчета 25
§ 6. Основные положения теории относительности 26
§ 7. Преобразование Галилея и необходимость его обобщения. . 29
§ 8. Доказательство линейности преобразования, связывающего две инерциальные системы 31
§ 9. Определение коэффициентов линейного преобразования и масштабного множителя 38
§ 10. Преобразование Лоренца 40
§ 11. Определение расстояний и синхронизация часов в одной инерциальной системе отсчета 46
§ 12. Последовательность событий во времени в разных системах отсчета 49
§ 13. Сравнение промежутков времени в движущихся системах отсчета. Явление Допплера 55
§ 14. Сличение показаний часов в движущихся системах отсчета 58
§ 15. Сравнение расстояний и длин в движущихся системах отсчета 63
§ 16. Относительная скорость 65
§ 17. Пространство скоростей Лобачевского — Эйнштейна 68

Глава II. **Теория относительности в тензорной форме**

§ 18. Замечание о ковариантности уравнений 76
§ 19. Определение тензора в трехмерном случае и замечание о ковариантных величинах 77
§ 20. Определение четырехмерного вектора 82
§ 21. Четырехмерные тензоры 85
§ 22. Псевдо-тензоры 89
§ 23. Бесконечно малое преобразование Лоренца 91
§ 24. Закон преобразования электромагнитного поля и ковариантность уравнений Максвелла 94

§ 25. Движение заряженной материальной точки в заданном внешнем поле 101
§ 26. Приближенная постановка задачи о движении системы зарядов 105
§ 27. Вывод законов сохранения в механике системы точек . . . 113
§ 28. Тензорный характер интегралов движения 118
§ 29. Замечания по поводу обычной формулировки законов сохранения 121
§ 30. Вектор потока энергии (вектор Умова) 123
§ 31. Тензор массы 127
§ 32. Примеры тензора массы 132
§ 33. Тензор энергии для электромагнитного поля 139
§ 34. Масса и энергия 144

Глава III. **Общий тензорный анализ**

§ 35. Допустимые преобразования координат и времени 148
§ 36. Общий тензорный анализ и обобщенная геометрия 155
§ 37. Определение вектора и тензора. Тензорная алгебра 158
§ 38. Уравнения геодезической линии 168
§ 39. Параллельный перенос вектора 176
§ 40. Ковариантное дифференцирование 181
§ 41. Примеры составления ковариантных производных 185
§ 42. Закон преобразования скобок Кристоффеля и локально геодезическая система координат. Условия приводимости основной квадратичной формы к постоянным коэффициентам 190
§ 43. Тензор кривизны 195
§ 44. Основные свойства тензора кривизны 199

Глава IV. **Формулировка теории относительности в произвольных координатах**

§ 45. Свойства пространства-времени и координаты 205
§ 46. Уравнения математической физики в произвольных координатах 210
§ 47. Вариационное начало для системы уравнений Максвелла — Лоренца 214
§ 48. Вариационный принцип и тензор энергии 220
§ 49. Интегральная форма законов сохранения в произвольных координатах 226

Глава V. **Основы теории тяготения**

§ 50. Обобщенный закон Галилея 230
§ 51. Квадрат интервала в ньютоновом приближении 232
§ 52. Уравнения тяготения Эйнштейна 235
§ 53. Характеристики уравнений Эйнштейна. Скорость распространения тяготения 238
§ 54. Сравнение с постановкой задачи в теории Ньютона. Предельные условия 241
§ 55. Решение уравнений тяготения Эйнштейна в первом приближении и определение постоянной 245
§ 56. Уравнения тяготения в статическом случае 251
§ 57. Строгое решение уравнений тяготения для одной сосредоточенной массы 255

§ 58. Движение перигелия планеты 263
§ 59. Отклонение луча света, проходящего мимо Солнца 270
§ 60. Вариационный принцип для уравнений тяготения 273
§ 61. О локальной эквивалентности полей ускорения и тяготения 278
§ 62. О парадоксе часов 284

Глава VI. **Закон тяготения и законы движения**

§ 63. Уравнения свободного движения материальной точки и их связь с уравнениями тяготения 288
§ 64. Общая постановка задачи о движении системы масс 292
§ 65. Расходимость тензора массы во втором приближении 295
§ 66. Приближенный вид тензора массы для упругого тела при учете поля тяготения 298
§ 67. Приближенные выражения для скобок Кристоффеля и для некоторых других величин 301
§ 68. Приближенная форма уравнений тяготения 307
§ 69. Связь между расходимостью тензора массы и величинами Γ^{ν} 313
§ 70. Уравнения движения и условия гармоничности 317
§ 71. Внутренняя и внешняя задачи механики системы тел. Ньютоновы уравнения для поступательного движения 322
§ 72. Ньютоновы уравнения вращательного движения 328
§ 73. Внутренняя структура тела. Уравнение Ляпунова 334
§ 74. Вычисление некоторых интегралов, характеризующих внутреннюю структуру тела 337
§ 75. Преобразование уравнений движения, написанных в интегральной форме 341
§ 76. Вычисление количества движения во втором приближении . 346
§ 77. Вычисление силы 351
§ 78. Уравнения поступательного движения в лагранжевой форме 358
§ 79. Интегралы уравнений движения системы тел 361
§ 80. Дополнительные замечания к задаче о движении системы тел. Явная форма интегралов движения для случая невращающихся масс 369
§ 81. Задача двух тел конечной массы 374

Глава VII. **Приближенные решения, законы сохранения и некоторые принципиальные вопросы**

§ 82. Потенциалы тяготения для невращающихся масс (пространственные компоненты) 382
§ 83. Потенциалы тяготения для невращающихся масс (смешанные и временна́я компоненты) 389
§ 84. Потенциалы тяготения на больших расстояниях от системы тел (пространственные компоненты) 395
§ 85. Потенциалы тяготения на больших расстояниях от системы тел (смешанные и временна́я компоненты) 400
§ 86. Решения волнового уравнения в волновой зоне 407
§ 87. Потенциалы тяготения в волновой зоне 410
§ 88. Общие замечания о законах сохранения 417
§ 89. Формулировка законов сохранения 419
§ 90. Излучение гравитационных волн и его роль в балансе энергии 426
§ 91. Связь между законами сохранения для поля и интегралами механики 430

§ 92. Теорема единственности для волнового уравнения 435
§ 93. О единственности гармонической координатной системы . . 441
§ 94. Пространство Фридмана — Лобачевского 447
§ 95. Теория красного смещения 455
§ 96. Развитие теории тяготения и теории движения масс (критический обзор) 465

Заключение 473

Добавление А. К выводу преобразования Лоренца 475

Добавление Б. Преобразование тензора Эйнштейна 483

Добавление В. Характеристики обобщенного уравнения Даламбера . 493

Добавление Г. Интегрирование уравнения фронта волны 496

Добавление Д. Необходимое и достаточное условие евклидовости трехмерного пространства 500

Литература 503

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью этой книги является, прежде всего, изложение наших исследований по теории тяготения Эйнштейна. Сюда относятся: вывод уравнений движения системы тел с учетом их внутренней структуры и вращения, приближенное решение уравнений тяготения и исследование асимптотического вида решений, исследования по вопросу о существовании системы координат, определяемой с точностью до преобразования Лоренца, и другие.

Результаты этих исследований привели нас к убеждению о возможности, по крайней мере для наиболее важного класса физических задач, достигнуть однозначности решения уравнений тяготения путем наложения совместных с ними дополнительных условий. Это убеждение послужило основанием для новой точки зрения на всю теорию тяготения. Поэтому возникла потребность в изложении всей теории пространства, времени и тяготения с этой, вновь выработанной, точки зрения, что и сделано в этой книге.

Для стройности логического построения мы включили в книгу и обычную теорию относительности (теорию галилеева пространства). Такое расширение материала имеет и то преимущество, что делает книгу более доступной, так как предполагает у читателя меньше предварительных знаний.

В процессе работы по изложению обычной теории относительности возник ряд вопросов, выяснение которых также привело к некоторым новым результатам, отчасти, впрочем, методического характера. К ним относятся: новая форма доказательства линейности преобразования, связывающего две инерциальные системы, исследование функции Лагранжа для системы зарядов, вывод интегралов движения, исследование вопроса об астрономической аберрации на основе понятия о пространстве скоростей Лобачевского—Эйнштейна и другие.

Главное внимание мы уделяли вопросам и задачам принципиального значения. Мы стремились при этом к возможно большей логической строгости рассуждений, что для нас было особенно важно ввиду новизны нашей точки зрения на теорию и вытекающей отсюда необходимости достаточно убедительно ее обосновать.

С этим профилем книги связаны и ее недостатки, прежде всего, лишь беглые указания на экспериментальное обоснование теории, небольшое количество рассмотренных приложений, отсутствие подробного исторического обзора и подробного списка литературы, а быть может и другие.

Так как в книге дано построение теории, начиная с самых основ, то в ней содержится и материал, вполне доступный студентам физических факультетов университетов, а также всем лицам с соответствующим общим образованием. Для студентов-физиков теоретической специальности, а тем более для аспирантов-теоретиков, доступна и вся книга. Ученые-специалисты найдут в ней по ряду вопросов новые, впервые публикуемые результаты.

В. Фок

Май 1955 г.
Ленинград

ВВЕДЕНИЕ *)

С точки зрения геометрической, теория пространства и времени естественно разделяется на теорию однородного (галилеева) пространства и теорию неоднородного (риманова и эйнштейнова) пространства **).

Галилеево пространство максимально однородно. Это выражается в том, что в нем: (а) все точки и моменты времени равноправны, (б) все направления равноправны и (в) все инерциальные системы, движущиеся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, равноправны (принцип относительности Галилея).

Однородность пространства и времени проявляется в наличии группы преобразований, оставляющих без изменения выражение для четырехмерного расстояния (интервала) между двумя точками. Выражение для интервала играет в теории пространства и времени большую роль, так как форма его непосредственно связана с формой основных законов физики, а именно закона движения свободной материальной точки и закона распространения фронта световой волны в свободном пространстве.

Перечисленные выше признаки (а), (б) и (в) однородности галилеева пространства связаны со следующими преобразованиями.

(а) Равноправию всех точек и моментов времени соответствует преобразование, состоящее в смещении начала координат и начала счета времени и содержащее четыре параметра (три начальные координаты и начальный момент времени).

(б) Равноправию всех направлений соответствует преобразование, состоящее в повороте координатных осей и содержащее три параметра (три угла).

---

*) Во Введении мы часто пользуемся терминами и понятиями, которые будут точнее определены только в дальнейшем тексте. Это представляет известную непоследовательность, без которой мы, однако, не могли обойтись, так как мы хотели уже во Введении дать понятие о нашей точке зрения на теорию, составляющую предмет этой книги. Впрочем, неудобство такого изложения смягчается тем, что, как мы надеемся, читатель, приступающий к чтению этой книги, уже имеет некоторое предварительное представление о ее предмете. Если же сказанное во Введении будет недостаточно понятным, лучше всего перечитать его еще раз после всей книги.

**) Мы будем часто говорить вместо „пространство и время“ просто „пространство“.

(в) Равноправию инерциальных систем соответствует преобразование, состоящее в переходе от данной системы отсчета к другой, движущейся прямолинейно и равномерно относительно данной; это преобразование содержит три параметра (три составляющие относительной скорости).

Самое общее преобразование содержит десять параметров. Это есть преобразование Лоренца.

Известно, что в пространстве n измерений группа преобразований, оставляющая без изменения выражение для квадрата расстояния между бесконечно близкими точками, может содержать не более $\frac{1}{2}n(n+1)$ параметров. Если существует группа, содержащая все $\frac{1}{2}n(n+1)$ параметров, то пространство является максимально однородным; это будет либо пространство постоянной кривизны, либо, если кривизна равна нулю, евклидово (или псевдо-евклидово) пространство.

В рассматриваемом нами случае пространства-времени число измерений равно четырем и, следовательно, наибольшее возможное число параметров равно десяти. Так как последнее число совпадает с числом параметров в преобразовании Лоренца, то галилеево пространство (к которому это преобразование относится) и является, как мы уже говорили, максимально однородным.

Основанную на преобразованиях Лоренца теорию галилеева пространства принято называть частной теорией относительности. Точнее можно сказать, что предметом этой теории является формулировка физических законов в соответствии со свойствами галилеева пространства. Основоположником теории относительности является Альберт Эйнштейн (1879—1955). Предшественниками Эйнштейна следует считать Пуанкаре и Лоренца. В этой книге теории галилеева пространства будут посвящены главы I—IV.

Всемирное тяготение не может быть уложено в рамки однородного галилеева пространства. Более глубокая причина этого была выяснена Эйнштейном: она состоит в том, что не только инертная, но и тяжелая масса тела зависит от его энергии.

Теорию всемирного тяготения оказалось возможным создать на основе отказа от однородности пространства в целом*) и признания

*) Термины „пространство в целом", „условия на бесконечности" и т. п. употребляются нами не в буквальном, а в математическом смысле, принятом в теории поля. Под пространством в целом мы разумеем область, достаточно большую, чтобы на ее границах поле от рассматриваемой системы тел было пренебрежимо мало; к границам этой области и относятся „условия на бесконечности". В зависимости от характера задачи фактические размеры этой области могут быть весьма различными: для атома или молекулы можно считать бесконечно большими расстояния порядка микрона, для Солнечной системы — порядка светового года, для системы галактик — сотни миллионов световых лет. Но никогда мы не разумеем под „пространством в целом" всю Вселенную; вводить в рассмотрение всю Вселенную представляется нам невозможным по гносеологическим соображениям.

за ним известного рода однородности только в бесконечно малом. Математически этому соответствует отказ от евклидовой (точнее, псевдо-евклидовой) геометрии и введение геометрии Римана. Современная теория тяготения также была создана Эйнштейном.

То, что, согласно теории тяготения, в бесконечно малом все же имеет место однородность, подобная той, какая выражается преобразованиями Лоренца, связано с возможностью имитировать, вблизи данной точки и в данный момент времени, поле тяготения полем ускорения (принцип эквивалентности). Физической основой этого является известный еще Галилею закон, согласно которому все тела падают, при отсутствии сопротивления среды, с одинаковой скоростью (точнее, с одинаковым ускорением). В обобщенном виде закон Галилея может быть формулирован, как закон равенства массы инертной и массы весомой. Следует подчеркнуть, что этот фундаментальный закон имеет общий характер, тогда как принцип эквивалентности строго локален, а при не-локальном его применении он становится неточным и справедливым только для слабых полей и для медленных движений.

При изучении пространства и времени нельзя, однако, ограничиться локальным рассмотрением (т. е. рассмотрением бесконечно малых областей пространства и промежутков времени). Необходимо так или иначе характеризовать свойства пространства в целом: в противном случае вообще нельзя поставить задачу однозначным образом. Это особенно ясно из того факта, что уравнения всякого поля (также и поля тяготения) представляют уравнения в частных производных, решения которых получаются однозначно лишь при наличии начальных и предельных условий или условий, их заменяющих. Уравнения поля и предельные условия неразрывно связаны друг с другом, и последние никак нельзя считать чем-то менее важным, чем самые уравнения. Но в задачах, относящихся ко всему пространству, предельные условия относятся к отдаленным областям пространства и для их формулировки необходимо знать свойства пространства в целом.

Заметим, что недостаточность локального рассмотрения и важность предельных условий были явно недооценены Эйнштейном, в связи с чем в наших работах и в настоящей книге нам пришлось внести в постановку основных задач теории тяготения существенные изменения.

Наиболее простым и вместе с тем наиболее важным случаем является тот, когда можно предположить пространство однородным (в смысле преобразования Лоренца) на бесконечности. В этом случае вызываемые массами неоднородности будут иметь местный характер; массы с их полями тяготения будут как бы погружены в неограниченное галилеево пространство. Этот случай особенно важен потому, что существование интегралов движения связано с однородностью пространства на бесконечности. Только если пространство на бесконечности допускает полное преобразование Лоренца с десятью параметрами, существуют все десять интегралов движения, включая интеграл энергии.

Главы V, VI и VII этой книги почти целиком посвящены случаю пространства, однородного на бесконечности.

Возможно также предположение, что пространство-время в целом обладает не полной однородностью, а только частичной: попрежнему допустимы произвольный перенос начала пространственных координат и произвольный поворот пространственных осей, что дает шесть параметров, остальные же четыре параметра преобразования Лоренца, а именно три составляющие скорости и начало счета времени, определяются через первые шесть. Такое пространство-время было впервые рассмотрено Фридманом, а так как пространственная часть его обладает геометрией Лобачевского, то его можно назвать пространством Фридмана — Лобачевского. В отличие от пространства Галилея, это пространство допускает существование определенного поля тяготения при средней плотности весомой материи, отличной от нуля. Поэтому можно предположить, что в космологии, при рассмотрении огромных областей размерами в сотни миллионов световых лет, приблизительно равномерно заполненных галактиками, пространство Фридмана — Лобачевского является лучшим приближением к действительности, чем пространство Галилея. Теория местных неоднородностей в пространстве Фридмана — Лобачевского еще совершенно не разработана, и мы посвящаем этому пространству только §§ 94 и 95 этой книги.

В зависимости от свойств пространства в целом решается и вопрос о существовании привилегированной системы координат.

В галилеевом пространстве привилегированными являются обычные декартовы координаты и время; совокупность этих переменных носит название галилеевых координат. Привилегированное положение этих координат основано на том, что преобразования Лоренца, выражающие однородность пространства, будут в этих координатах линейными.

В случае пространства, однородного только на бесконечности, также оказывается возможным ввести привилегированную систему координат, определяемую с точностью до преобразования Лоренца (гармонические координаты). Этот факт, впервые установленный в наших работах, имеет большое принципиальное значение; только опираясь на него, можно показать, что привилегированное положение гелиоцентрической системы Коперника по сравнению с геоцентрической системой Птоломея сохраняется и в теории тяготения Эйнштейна. Более подробное обоснование его дано в §§ 92 и 93 этой книги. Все рассмотренные в этой книге конкретные задачи теории тяготения решаются нами в гармонических координатах. Этим достигается однозначность решения.

В пространстве Фридмана—Лобачевского, вероятно, тоже существуют привилегированные системы координат. Вопрос этот, однако, не исследован, поскольку еще не создана теория местной неоднородности в таком пространстве.

В вопросе о существовании привилегированных систем координат создатель теории тяготения Эйнштейн придерживался точки зрения, противоположной нашей, а именно, он отрицал существование таких систем. Это связано с отмеченной выше переоценкой лежащего в основе римановой геометрии локального способа рассмотрения свойств пространства и недооценкой важности рассмотрения пространства в целом. Несомненно, что здесь сыграла роль также философская позиция Эйнштейна, всю свою жизнь находившегося под влиянием идей Маха.

Вопрос о различных координатных системах и об изменении вида уравнений при переходе от одной координатной системы к другой занимает в теории пространства и времени важное место.

Особенно большое значение принято придавать ковариантности уравнений. Под ковариантностью разумеется следующее. Рассмотрим преобразование кооординат, сопровождаемое преобразованием зависимых переменных (функций) по определенному (например, тензорному) правилу и обратим внимание на вид уравнений, которым удовлетворяют первоначальные и преобразованные функции. Если полученные в результате такого преобразования новые функции от новых переменных удовлетворяют уравнениям того же вида, как старые функции от старых переменных, то уравнения называются ковариантными. Ковариантность уравнений позволяет писать их, не предрешая выбора координатной системы. Кроме того, требование ковариантности уравнений имеет большое эвристическое значение, так как ограничивает разнообразие формы уравнений и, тем самым, помогает отобрать из них правильные. Необходимо, однако, подчеркнуть, что это ограничение имеет место при обязательном условии, что ограничивается также и число вводимых функций; если же допустить введение любого числа новых вспомогательных функций, то практически любым уравнениям можно придать ковариантную форму.

Таким образом, сама по себе ковариантность уравнений отнюдь не является выражением какого-либо физического закона. Так, например, в механике системы материальных точек уравнения Лагранжа 2-го рода являются ковариантными по отношению к любым преобразованиям координат, хотя и не выражают никакого нового физического закона по сравнению, например, с уравнениями Лагранжа 1-го рода, которые пишутся в прямоугольных координатах и ковариантными не являются.

В случае уравнений Лагранжа ковариантность достигнута путем введения, в качестве новых вспомогательных функций, коэффициентов квадратичного выражения для функции Лагранжа через скорости.

В геометрии Римана новыми вспомогательными функциями являются коэффициенты $g_{\mu\nu}$ квадратичного выражения для квадрата бесконечно малого расстояния. Введение этих функций позволяет составлять выражения, ковариантные по отношению к любым преобразованиям координат. Само по себе это не дает ничего нового. Но требование, чтобы эти ковариантные выражения уже никаких дальнейших функций, кроме самих $g_{\mu\nu}$, не содержали, настолько сильно их ограничивает, что приводит почти однозначно к найденным Эйнштейном уравнениям гравитационного поля.

Выяснив смысл понятия ковариантности в применении к геометрии Римана, сопоставим его с рассмотренным ранее понятием однородности пространства.

Как мы указывали выше, свойство однородности галилеева пространства проявляется в преобразованиях, оставляющих без изменения выражение для четырехмерного расстояния между двумя точками. Подробнее можно сказать, что в этих преобразованиях остаются без изменения коэффициенты этого выражения, т. е. величины $g_{\mu\nu}$. В общем же случае геометрии Римана преобразований, оставляющих без изменения величины $g_{\mu\nu}$, не существует, ибо пространство Римана не однородно. В геометрии Римана речь идет о преобразованиях координат, *сопровождаемых преобразованиями величин* $g_{\mu\nu}$, а такого рода совместные преобразования, равно как и ковариантность по отношению к ним, никакого отношения к однородности или неоднородности пространства не имеют *).

Теперь мы уже можем перейти к выяснению тех недоразумений, которые связаны с укоренившимся в литературе неправильным употреблением слова „относительность“.

В первых работах по теории относительности понятие относительности связывалось с понятием однородности пространства. Теорией относительности называлась теория галилеева пространства, однородность которого характеризуется преобразованиями Лоренца. Название это можно считать в известной мере оправданным, поскольку большую роль в теории играет обобщение принципа относительности Галилея.

Однако с созданием теории тяготения Эйнштейна вошел в употребление термин „общая относительность“, который все запутал. Термин этот стал применяться в смысле „общей ковариантности“ (т. е. в смысле ковариантности уравнений по отношению к произвольным преобразованиям координат, сопровождаемым преобразованием величин $g_{\mu\nu}$). Но мы видели, что такая ковариантность ничего не имеет общего с однородностью пространства, а это значит, что „общая относительность“ ничего не имеет общего с „относительностью просто“. Между тем эта последняя получила название „частной“, которое как бы указывает, что она является частным случаем „общей“.

---

*) Эти идеи высказывались Э. Картаном [1].

Чтобы дать понятие о том, к каким недоразумениям это приводит, рассмотрим ряд примеров.

Как будет показано в главе IV, теория однородного галилеева пространства может быть формулирована не только в виде, ковариантном в смысле преобразований Лоренца, но и в общековариантном виде. На языке „общей“ и „частной“ относительности выразить эту простую мысль крайне затруднительно, и мы это делать не беремся, так как нам пришлось бы сказать, что „частная“ относительность заключает в себе „общую“ или что-нибудь в таком роде.

Если вспомнить, что уже в ньютоновой механике мы имеем дело с общековариантными уравнениями Лагранжа 2-го рода, то пришлось бы также сказать, что и ньютонова механика содержит в себе „общую относительность“.

Термин „общая относительность“ или „общий принцип относительности“ употребляется (прежде всего, самим Эйнштейном) еще и в смысле теории тяготения. Уже основная работа Эйнштейна по теории тяготения (1916 г.) озаглавлена: „Основы общей теории относительности“. Это еще больше запутывает дело. Так как в теории тяготения пространство предполагается неоднородным, а относительность связана с однородностью, то выходит, что в общей теории относительности нет никакой относительности. Если даже учитывать, что в теории тяготения пространство однородно в бесконечно малом, то и тогда придется признать, что теория тяготения несет с собой ограничение, а не обобщение понятия относительности, поскольку она отказывается от галилеева пространства, однородного не только в бесконечно малом, но и в целом.

Сказанного достаточно, чтобы стало ясно, что употребление терминов „общая относительность“, „общая теория относительности“ или „общий принцип относительности“ недопустимо. Оно не только приводит к недоразумениям, но и отражает неправильное понимание самой теории. Как это ни парадоксально, такое непонимание проявил сам автор теории Эйнштейн, который как в названии своей теории и своих сочинений, так и в своих рассуждениях подчеркивал слова „общая относительность“ и не видел, что созданная им новая теория, если ее рассматривать как обобщение старой, содержит обобщение не понятия относительности, но других понятий, а именно геометрических.

В настоящей книге мы термина „общая относительность“ не употребляем. Теорию галилеева пространства мы называем также, следуя установившемуся обычаю, теорией относительности (но без прибавления слова „частная“). Теорию эйнштейнова пространства мы называем теорией тяготения (но не „общей теорией относительности“, поскольку такое название, как мы видели, смысла не имеет).

Общефилософская сторона наших взглядов на теорию пространства, времени и тяготения сложилась под влиянием философии диалектического материализма, в особенности же под влиянием книги Ленина „Материализм и эмпириокритицизм“. Учение диалектического материализма помогло нам критически подойти к точке зрения Эйнштейна на созданную им теорию и заново ее осмыслить. Оно помогло нам также правильно понять и истолковать полученные нами новые результаты. Мы хотели бы здесь это констатировать, хотя в явной форме философские вопросы в этой книге и не затрагиваются.

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Координаты и время

Пространство и время — понятия первичные. В общефилософском смысле пространство и время суть формы существования материи. Простейшим понятием, относящимся к пространству и времени, является точка пространства, рассматриваемая в определенный момент времени. Чтобы „отметить“ точку в пространстве, нужно поместить туда материальное тело достаточно малых размеров. Положение этого тела может быть задано только по отношению к другим материальным телам, ибо никакой „вросшей в пространство“ и независимой от материальных тел градусной сетки не существует. Когда выбрана система отсчета или „базис“, т. е. система материальных тел, по отношению к которой рассматривается положение данного тела-точки, это положение может быть задано тремя координатами, относящимися к определенному моменту времени, отсчитываемому по „часам“ базиса. В общем случае координаты суть вспомогательные величины, характеризующие расположение тел по отношению к базису и позволяющие вычислить, по законам евклидовой геометрии (или ее обобщения — геометрии Римана), взаимное расположение тел, в частности их взаимные расстояния и углы между направлениями, их соединяющими. В качестве координат обычно берут прямолинейные прямоугольные координаты, ибо они проще всего связаны с длинами и расстояниями, но допустимы и всякие другие (криволинейные) координаты, например, два угла, характеризующих направление на рассматриваемое тело-точку, и расстояние до него.

Необходимо подчеркнуть, что как самые координаты, так и вычисляемые при помощи них взаимные расстояния, углы и другие величины, характеризующие взаимное расположение тел, получают определенный смысл лишь в предположении определенного базиса. Точно так же и моменты времени, к которым относятся координаты и расстояния, а также промежутки времени, становятся определенными лишь в предположении определенного базиса и определенного отсчета времени на базисе, т. е. в предположении определенной системы отсчета.

2 Зак. 485. В. А. Фок

Таким образом, переменные x, y, z, t (координаты и время), с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем, связаны с базисом.

§ 2. Положение тела в пространстве в данный момент времени в заданной системе отсчета

Отвлечемся сперва от роли времени и рассмотрим обычные способы определения расположения предметов в пространстве. В принципе эти способы основаны, кроме гипотезы о применимости евклидовой геометрии к реальному физическому пространству, на двух предположениях: о существовании твердых тел и о прямолинейности распространения света. В самом деле, чтобы найти положение удаленного предмета, необходимо отмерить твердым жезлом определенный базис (в смысле обычной триангуляции) и засечь при помощи лучей света направления на предмет из разных точек этого базиса. Предполагая лучи света прямолинейными, можно вычислить тогда по законам евклидовой геометрии расстояние до предмета и все другие данные, характеризующие его положение. Прямолинейность лучей света в вакууме есть основной постулат; прямолинейность лучей в атмосфере является приближенной и должна контролироваться (учет рефракции и т. п.). Справедливость законов евклидовой геометрии для реального физического пространства следует рассматривать как опытный факт, а не как априорное допущение. Действительно, хотя эти законы оправдываются с огромной степенью точности, теория всемирного тяготения Эйнштейна как раз и осно́вана на рассмотрении малых отклонений от них.

Таким образом, свойства света и свойства твердых тел играют основную роль в установлении геометрии реального физического пространства.

Необходимо, однако, заметить, что понятие твердого тела является здесь в известной мере вспомогательным понятием. Абсолютно твердых тел не существует; реальные физические тела могут рассматриваться как твердые и обладающие неизменными геометрическими размерами лишь приближенно и лишь при определенных условиях (постоянство температуры, отсутствие упругих колебаний и т. п.). Неизменность эталона длины с наибольшей точностью может быть проверена путем сравнения его с длиной волны определенной спектральной линии. Таким образом, понятие длины сводится, в конечном счете, к свойствам атомов (или молекул), излучающих данную линию, и к свойствам света.

Другой возможный способ определения положения предметов в пространстве, принципиально отличный от триангуляции, есть радиогеодезия или радиолокация. В принципе этот способ заключается в том, что с некоторого пункта посылаются радиосигналы, которые отражаются от наблюдаемого предмета и возвращаются в точку отправления. При этом отмечается время прохождения сигнала (туда и обратно), а также, конечно, направление. Зная скорость распространения радиосигнала (она равна скорости света), получают расстояние до предмета, умножая на нее половину времени прохождения сигнала.

В принципиальном отношении этот способ важен потому, что в нем измерение длин сводится к измерению промежутков времени и не используются свойства абсолютно твердых тел. Существенным предположением является постоянство скорости света. Сама скорость света играет здесь роль переводного множителя от времен к длинам. Численное значение скорости света должно устанавливаться другими опытами, в которых уже используются эталоны длины.

Измерение времени может быть, в принципе, произведено при помощи любого периодического процесса. Наибольшей точностью в настоящее время обладают часы, основанные на использовании собственных колебаний кристаллической решетки кварца или молекул аммиака. Практически принято астрономическое измерение времени, основанное на применении законов движения Ньютона к вращению земного шара, с учетом всех, вытекающих из теории, поправок на неравномерность вращения (нутация и пр.).

Указанные способы измерения времени дают возможность регулировки часов на „базисе".

При измерении положения движущихся предметов с определенного базиса возникает вопрос: к какому моменту времени (по часам базиса) относятся полученные значения расстояний (и вообще пространственных координат)? Мы примем следующее определение: если момент отправления светового сигнала (или радиосигнала с локационной станции) есть t_1, момент возвращения сигнала есть t_2, то полученные значения координат предмета x, y, z (а также расстояния $r = c\frac{t_2 - t_1}{2}$) относятся к моменту времени $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$. Это определение соответствует естественному предположению, что скорость света „туда" и „обратно" одинакова.

Мы установили, что, исходя из определенного базиса, снабженного масштабами и часами (а также другими необходимыми приборами), можно измерять положение тел в пространстве (по отношению к этому базису) и относить получаемые значения координат (например декартовых x, y, z) к определенному моменту времени t (по часам базиса). Такого рода базис мы будем называть в дальнейшем „системой отсчета". Слово „базис" мы будем употреблять в тех случаях, когда желательно подчеркнуть то обстоятельство, на которое мы уже указывали в начале § 1, а именно, что система отсчета не есть какая-то вросшая в пространство координатная сетка в соединении с каким-то „мировым временем", а есть нечто связанное с масштабами и часами, находящимися в определенном месте и определенным образом движущимися.

§ 3. Закон распространения фронта электромагнитной волны

Законы распространения света в свободном пространстве хорошо изучены. Они выражаются известными уравнениями Максвелла

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{curl}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E}=0;\\ &\operatorname{curl}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0, \end{aligned}\right\} \tag{3.01}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного поля. Нас интересует, однако, не общий случай распространения света, а лишь распространение сигнала, идущего с предельной скоростью, т. е. распространение фронта волны. Впереди фронта волны все составляющие поля равны нулю; позади фронта некоторые из них отличны от нуля. Таким образом, на фронте волны некоторые из составляющих поля терпят разрыв.

С другой стороны, задание поля на некоторой поверхности (движущейся в пространстве), вообще говоря, определяет, в силу уравнений Максвелла, и значения производных от поля на этой поверхности. Тем самым определяется и значение поля на бесконечно близкой поверхности, а скачки поля становятся невозможными. Это будет не так только в том случае, когда данная поверхность (ее форма и движение) подчинена особым условиям, при выполнении которых значения производных от поля не определяются значениями поля. Поверхность называется тогда характеристической поверхностью, или проще, характеристикой. Таким образом, скачки поля возможны только на характеристике. Но так как на фронте волны поле заведомо терпит скачок, то ясно, что фронт волны должен быть характеристикой.

Найдем уравнение характеристик для системы уравнений Максвелла.

Пусть значения поля заданы для тех точек и для тех моментов времени, координаты которых связаны уравнением

$$t=\frac{1}{c}f(x,\ y,\ z). \tag{3.02}$$

В частности, при $f\equiv 0$ это будут *начальные данные*. Уравнение (3.02) можно рассматривать как уравнение некоторой гиперповерхности в четырехмерном многообразии пространства-времени. То же самое уравнение можно (по крайней мере, если $(\operatorname{grad} f)^2>1$) рассматривать как уравнение обыкновенной поверхности, движущейся в пространстве (см. также § 35). Пусть на гиперповерхности (3.02) заданы значения некоторой функции

$$u\left(x,\ y,\ z,\ \frac{f}{c}\right)=u_0(x,\ y,\ z). \tag{3.03}$$

Тем самым на этой гиперповерхности будут заданы и следующие комбинации производных по координатам и времени:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial u_0}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{3.04}$$

Мы обозначили здесь для краткости x, y, z через x_1, x_2, x_3. Если, кроме того, задана производная $\frac{\partial u}{\partial t}$, то будут известны и значения на поверхности всех первых производных от u по координатам и времени.

Возьмем теперь в качестве функции u одну из составляющих электромагнитного поля, например E_x, и обозначим значение этой составляющей на гиперповерхности через $E_x^0=E_x^0(x,\ y,\ z)$. Аналогичные обозначения (значок 0 сверху) введем для других составляющих. Если на гиперповерхности задано поле, то все величины $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ можно считать известными функциями от координат x, y, z. Подобно (3.04), мы будем иметь, например,

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial E_x^0}{\partial z} \quad \text{и т. д.,} \tag{3.05}$$

откуда

$$\operatorname{div}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad}f\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)=\operatorname{Div}\mathbf{E}^0, \tag{3.06}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\operatorname{grad}f\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right]=\operatorname{Curl}\mathbf{E}^0, \tag{3.07}$$

а также

$$\operatorname{div}\mathbf{H}+\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad}f\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right)=\operatorname{Div}\mathbf{H}^0, \tag{3.08}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}+\frac{1}{c}\left[\operatorname{grad}f\times\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right]=\operatorname{Curl}\mathbf{H}^0. \tag{3.09}$$

В последних формулах мы обозначили операции div и curl, примененные к $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$, большими буквами (Div, Curl).

Заданные шесть функций $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ не являются независимыми, а должны удовлетворять двум соотношениям, которые мы сейчас выведем.

Умножая уравнения (3.07) и (3.09) скалярно на $\operatorname{grad}f$ и пользуясь уравнениями Максвелла (3.01), получим

$$(\operatorname{grad}f\cdot\operatorname{Curl}\mathbf{E}^0)=-\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad}f\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right), \tag{3.10}$$

$$(\operatorname{grad}f\cdot\operatorname{Curl}\mathbf{H}^0)=\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad}f\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right). \tag{3.11}$$

С другой стороны, в левых частях тождеств (3.08) и (3.06) первые члены в силу уравнений Максвелла равны нулю, а вторые члены совпадают с правыми частями (3.10) и (3.11). Поэтому мы будем иметь

$$\operatorname{Div} \mathbf{H}^0 + (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{Curl} \mathbf{E}^0) = 0, \tag{3.12}$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{E}^0 - (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{Curl} \mathbf{H}^0) = 0. \tag{3.13}$$

Таковы условия, налагаемые на заданные функции $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$. В случае $f = \mathrm{const}$ мы имеем обычные начальные данные, и тогда эти условия сводятся к очевидному требованию, чтобы и в начальный момент было $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$.

Пользуясь уравнениями Максвелла, мы можем написать уравнения (3.07) и (3.09) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left[\operatorname{grad} f \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right] = c \operatorname{Curl} \mathbf{H}^0, \tag{3.14}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \left[\operatorname{grad} f \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right] = c \operatorname{Curl} \mathbf{E}^0. \tag{3.15}$$

Умножая эти уравнения векториально на $\operatorname{grad} f$ и пользуясь выведенными ранее соотношениями, мы можем преобразовать их к виду

$$\left(1 - (\operatorname{grad} f)^2\right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dot{\mathbf{E}}^0 - (\operatorname{grad} f \cdot \dot{\mathbf{E}}^0) \operatorname{grad} f - [\operatorname{grad} f \times \dot{\mathbf{H}}^0]; \tag{3.16}$$

$$\left(1 - (\operatorname{grad} f)^2\right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \dot{\mathbf{H}}^0 - (\operatorname{grad} f \cdot \dot{\mathbf{H}}^0) \operatorname{grad} f + [\operatorname{grad} f \times \dot{\mathbf{E}}^0]. \tag{3.17}$$

Здесь мы положили для краткости

$$\dot{\mathbf{E}}^0 = c \operatorname{Curl} \mathbf{H}^0; \quad \dot{\mathbf{H}}^0 = -c \operatorname{Curl} \mathbf{E}^0. \tag{3.18}$$

В правых частях уравнений (3.16) и (3.17) стоят известные функции. Эти уравнения могут быть решены относительно производных по времени, если коэффициент при них, т. е. величина $1 - (\operatorname{grad} f)^2$, не равен нулю. Но в таком случае формулы, аналогичные (3.05), дают и для всех остальных первых производных от поля конечные значения, а следовательно, самое поле будет на поверхности (3.02) непрерывным. Чтобы там был возможен разрыв, необходимо обращение в нуль коэффициента при производных по времени. Это приводит к условию

$$(\operatorname{grad} f)^2 = 1, \tag{3.19}$$

при выполнении которого данная поверхность будет характеристической. Если мы будем писать уравнение поверхности, не решая его относительно t, а в виде

$$\omega(x, y, z, t) = 0, \tag{3.20}$$

то уравнение характеристик (3.19) примет вид

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - (\operatorname{grad} \omega)^2 = 0. \tag{3.21}$$

Таким образом, распространение фронта электромагнитной волны подчиняется уравнению (3.21).

В частности, уравнению (3.19) или (3.21) удовлетворяют функции

$$t = \frac{1}{c}(\alpha x + \beta y + \gamma z) \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1); \tag{3.22}$$

$$t = t_0 + \frac{1}{c}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{3.23}$$

Первая — дает плоскую, а вторая — сферическую волну.

§ 4. Уравнения для лучей

Уравнение распространения фронта волны может быт написано в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + c\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 0. \tag{4.01}$$

(Для определенности мы выбрали перед корнем знак плюс.) Оно имеет тот же вид, как уравнение Гамильтона — Якоби в механике, причем ω играет роль функции действия S, а производные ω_x, ω_y, ω_z — роль „моментов“ p_x, p_y, p_z. Гамильтоновой функции здесь соответствует выражение

$$H = c\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \tag{4.02}$$

Траекториям будут здесь соответствовать лучи. Уравнения для лучей будут аналогичны уравнениям Гамильтона. Они напишутся

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\omega_x} = c\frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}} \quad \text{и т. д.}; \tag{4.03}$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad \text{и т. д.} \tag{4.04}$$

Уравнения (4.04) показывают, что величины ω_x, ω_y, ω_z вдоль луча постоянны (они могут, конечно, меняться от луча к лучу). Отсюда следует, что лучи будут прямыми

$$x - x_0 = c\frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}}(t - t_0) \quad \text{и т. д.} \tag{4.05}$$

При изменении знака ω (а значит и ω_x, ω_y, ω_z) направление луча меняется на противоположное; знак ω должен быть выбран в соответствии с заданным направлением (ориентацией) луча.

Всякая волновая поверхность может рассматриваться, как образованная из точек, движущихся со скоростью света по лучам (4.05). Это дает возможность построить волновую поверхность для момента времени t, когда известен ее вид для момента времени t_0.

Пусть уравнение волновой поверхности для момента времени t_0 имеет вид

$$\omega^0(x_0, y_0, z_0) = 0, \tag{4.06}$$

где x_0, y_0, z_0 — текущие координаты на поверхности. Зная уравнение поверхности, мы можем вычислить величины

$$\alpha(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\omega_x^0}{\sqrt{\omega_x^{0^2} + \omega_y^{0^2} + \omega_z^{0^2}}}\right)_0 \quad \text{и т. д.,} \tag{4.07}$$

причем знак правых частей определяется из заданного направления распространения волны. Уравнение луча, проходящего через точку x_0, y_0, z_0 начальной волновой поверхности, напишется

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= c\alpha(t - t_0), \\ y - y_0 &= c\beta(t - t_0), \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1). \\ z - z_0 &= c\gamma(t - t_0) \end{aligned}\right\} \tag{4.08}$$

Величины x, y, z дадут положение точки, в которую перейдет точка x_0, y_0, z_0 к моменту времени t. Придавая величинам x_0, y_0, z_0 всевозможные значения, связанные соотношением $\omega^0 = 0$, мы получим из (4.08) все точки, лежащие на волновой поверхности в момент времени t.

Если мы решим уравнения (4.08) относительно x_0, y_0, z_0 и подставим функции

$$x_0 = x_0(x, y, z, t - t_0) \quad \text{и т. д.} \tag{4.09}$$

в уравнение волновой поверхности $\omega^0 = 0$, мы получим соотношение

$$\omega(x, y, z, t - t_0) = 0, \tag{4.10}$$

т. е. явную форму уравнения волновой поверхности для момента времени t. Очевидно, что при $t = t_0$ будет $x_0 = x$, $y_0 = y$, $z_0 = z$, и уравнение (4.10) приведется к (4.06), т. е. к заданному уравнению начальной волновой поверхности.

Из уравнений луча (4.05) получается соотношение

$$c^2(t - t_0)^2 - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] = 0, \tag{4.11}$$

связывающее координаты начальной и конечной точек на каждом луче. Уравнение (4.11) представляет уравнение шара с центром в точке x_0, y_0, z_0 и с радиусом $R = c(t - t_0)$, растущим пропорционально времени. Оно, так же как и исходное уравнение (3.21), выражает постоянство скорости распространения света.

Для бесконечно близких точек соотношение (4.11) принимает вид

$$c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0. \tag{4.12}$$

В такой форме оно вытекает непосредственно из уравнений Гамильтона (4.03).

Более подробное изложение математической теории характеристик можно найти, например, в курсе акад. В. И. Смирнова (т. IV).

§ 5. Инерциальные системы отсчета

В § 2 мы выяснили, что такое система отсчета, и подчеркнули, что она связана с некоторым базисом, снабженным масштабами и часами; этот базис можно грубо представить себе в виде некоторой радиолокационной станции. Во всяком случае, „базис“ состоит из некоторых материальных тел, которые как-то расположены и ориентированы в пространстве и как-то движутся.

Всякое явление, в частности явление распространения света и движение материальных тел, описывается в определенной системе отсчета, т. е. по отношению к определенному базису. Например, для описания движения планет применяется гелиоцентрическая система отсчета с началом координат (местоположение воображаемого базиса) в центре инерции Солнечной системы и с осями координат, направленными на три неподвижные звезды (ориентировка базиса).

В различных системах отсчета математическая форма законов природы будет, вообще говоря, различной. Так, например, при описании движения тел относительно Земли можно пользоваться как системой отсчета с осями, ориентированными на три неподвижные звезды, так и системой с осями, скрепленными с Землей; в последнем случае необходимо ввести в уравнения движения также и силы Кориолиса.

Существуют системы отсчета, в которых законы движения имеют особенно простой вид и которые ближе всего соответствуют (в известном смысле) природе. Мы имеем в виду инерциальные системы отсчета, в которых тело при отсутствии действующих на него сил движется прямолинейно и равномерно. (Здесь возникает вопрос, как убедиться в отсутствии сил, действующих на тело; мы будем считать, что силы отсутствуют, если все тела, от которых они могут исходить, достаточно удалены от данного тела.) С очень большой точностью инерциальной является гелиоцентрическая система отсчета. В инерциальной системе мы будем почти всегда пользоваться декартовыми координатами, так как в них законы евклидовой геометрии, а также законы механики (в частности прямолинейность и равномерность движения тела, не подверженного действию сил) формулируются наиболее просто. Самое же понятие инерциальной системы допускает, конечно, переход к любым другим (криволинейным) координатам, причем, если формулы перехода не содержат явно времени, то можно считать, что первоначальные и преобразованные координаты относятся к одной и той же инерциальной системе.

В дорелятивистской физике понятие инерциальной системы связывалось только с законами механики. Мы видели, однако, что в определении понятий, относящихся к пространству и времени, фундаментальную роль играют законы распространения света. Поэтому более правильно будет связывать понятие инерциальной системы не только с законами механики, но и с законами распространения света.

Обычная форма уравнений Максвелла относится к какой-то инерциальной системе отсчета. Само собой разумеется (и это всегда предполагалось, даже и до теории относительности), что существует по крайней мере одна система отсчета, которая является инерциальной в смысле механики и в которой в то же время справедливы уравнения Максвелла. К этой инерциальной системе относится и закон распространения фронта электромагнитной волны в форме

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]=0. \tag{5.01}$$

Систему отсчета, в которой закон распространения фронта электромагнитной волны имеет вид (5.01), можно назвать инерциальной в электромагнитном смысле. Просто инерциальной системой мы будем называть систему отсчета, инерциальную как в механическом, так и в электромагнитном смысле.

Таким образом, инерциальная система отсчета, по принятому здесь определению, характеризуется следующими двумя свойствами:

1. В инерциальной системе тело при отсутствии сил движется прямолинейно и равномерно (инерциальность в обычном механическом смысле).

2. В инерциальной системе уравнение распространения фронта электромагнитной волны имеет вид (5.01) (инерциальность в отношении поля).

Мы говорили здесь о законе распространения фронта *электромагнитной* волны и, тем самым, как бы отдавали предпочтение электромагнитному полю перед другими полями. Это предпочтение, однако, только кажущееся. На самом деле, предельная скорость распространения полей любой природы должна быть одной и той же, в силу чего уравнение (5.01) имеет универсальный характер. Этот вопрос будет подробнее освещен в следующем параграфе.

§ 6. Основные положения теории относительности

Основной постулат теории относительности (называемый также принципом относительности) утверждает независимость явлений от неускоренного движения замкнутой системы, внутри которой они происходят.

Попытаемся уточнить содержание этого постулата *).

Пусть имеется замкнутая система материальных тел, внутри которой происходят различного рода процессы (механические, электромагнитные и любые другие). Будем описывать состояние этой системы тел (включая входящие в нее поля электромагнитной и другой природы) по отношению к той или иной системе отсчета (к тому или иному „базису“ в смысле § 2). Рассмотрим два базиса **). Пусть

*) См. Л. И. Мандельштам [6].

**) Чтобы не путать „систему тел“ с „системой отсчета“, мы будем здесь вместо „системы отсчета“ говорить „базис“.

первый представляет инерциальную систему отсчета, а второй движется относительно первого прямолинейно и равномерно. Фиксируем начальное состояние системы по отношению к первому базису (под словом „начальное" мы разумеем здесь „относящееся к начальному моменту времени по часам данного базиса"). Вообразим себе теперь второй экземпляр нашей системы тел, начальное состояние которого по отношению ко второму базису в точности такое же, как начальное состояние первого экземпляра системы по отношению к первому базису. (Слово „начальное" понимается каждый раз в соответствующем смысле.) Тогда можно поставить вопрос о сравнении дальнейшего хода процессов в первом экземпляре системы по отношению к первому базису с ходом процессов во втором экземпляре системы по отношению ко второму базису.

Принцип относительности утверждает, что в обоих случаях процессы будут идти совершенно одинаковым образом (поскольку они вообще детерминированы). Если процесс в первом экземпляре системы описывается посредством некоторых функций от координат и времени первого базиса, то процесс во второй системе будет описываться посредством *тех же самых функций* от координат и времени второго базиса.

Менее точно, но более наглядно, можно сказать, что *равномерное и прямолинейное движение материальной системы как целого не влияет на ход процессов, происходящих внутри системы.*

Многие законы природы, управляющие ходом различных физических процессов, формулируются при помощи дифференциальных уравнений, вид которых не зависит от начального состояния системы; начальные условия присоединяются к ним дополнительно. Таковы, например, уравнения движения механики, уравнения электромагнитного поля и связанное с ними уравнение распространения фронта электромагнитной волны. Из принципа относительности вытекает, что математическая форма таких законов должна быть одинакова как в исходной инерциальной системе отсчета, так и в любой другой, движущейся относительно нее равномерно и прямолинейно. Припоминая наше определение инерциальной системы отсчета (инерциальность в механическом смысле и в отношении поля), можно вывести отсюда следующее важное заключение. *Если дана инерциальная система отсчета, то всякая другая система отсчета, которая движется относительно нее прямолинейно и равномерно, сама является инерциальной.* Это положение послужит основой для вывода формул, связывающих координаты и время в двух неускоренно движущихся системах отсчета.

Принцип относительности подтверждается всей совокупностью наших знаний о природе. В области механики он был известен уже давно (принцип относительности Галилея). Заслугою Эйнштейна является распространение его на все явления (в первую очередь на электромагнитные) и вывод из него следствий, относящихся к природе и взаимной связи пространства и времени.

Теория относительности может быть построена на основе двух постулатов: принципа относительности и принципа независимости скорости света от скорости источника. Второй из этих принципов учтен нами с самого начала, так как мы положили в основу нашего построения теории закон распространения фронта электромагнитной волны. Независимость скорости света от скорости источника непосредственно вытекает из этого закона.

Здесь уместно дать обобщенное толкование закону распространения фронта волны и формулировать следующее общее положение.

Существует предельная скорость распространения всякого рода действий. Эта скорость численно равна скорости света в свободном пространстве.

Значение этого принципа связано с тем, что в определении понятий, относящихся к пространству и времени, фундаментальную роль играет передача сигналов с предельной скоростью. На существовании таких сигналов основано самое понятие определенной системы отсчета, которая служит для описания явлений в пространстве и времени. В § 2 мы рассматривали способы определения положения тел в пространстве, основанные на применении световых и вообще электромагнитных сигналов. В принципе возможна, однако, передача сигналов не только при помощи электромагнитных волн, но и при помощи волн другой природы. Можно, например, представить себе передачу сигналов при помощи предельно быстрых частиц и соответствующих им в смысле квантовой механики волн материи. Мыслимо также (хотя практически и неосуществимо) использование гравитационных волн, существование которых вытекает из теории тяготения Эйнштейна (см. § 90). Не исключено открытие каких-либо новых полей, способных передавать сигналы. Поэтому возникает вопрос: является ли понятие о системе отсчета, основанное на использовании одних только световых сигналов, достаточно общим? Ведь если бы существовали сигналы, идущие с большей скоростью, или даже мгновенные сигналы, то понятие о системе отсчета, основанное на законах распространения света, не отражало бы в должной мере свойств пространства и времени, а являлось бы, самое большее, одним из возможных.

Формулированный выше принцип, утверждающий существование общего предела для скорости передачи каких бы то ни было действий и сигналов, придает скорости света универсальное значение, не связанное с частными свойствами агента, передающего сигналы, а отражающее некоторое объективное свойство пространства и времени.

Этот принцип находится в логической связи с принципом относительности. В самом деле, если бы не существовало единой предельной скорости, а различные агенты (например, свет и тяготение) распространялись бы в пустоте с различными скоростями, то принцип относительности был бы нарушен по крайней мере по отношению к одному из этих агентов.

Математически принцип существования общей предельной скорости может быть уточнен следующим образом.

Уравнение распространения фронта волны любой природы, идущей с предельной скоростью и способной передавать сигнал, совпадает с уравнением распространения фронта световой волны в свободном пространстве.

Таким образом, уравнение

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - (\text{grad}\ \omega)^2 = 0 \tag{6.01}$$

приобретает общий характер; оно является более общим, чем уравнения Максвелла, из которых оно нами выведено. На основании только что формулированного принципа существования общей предельной скорости можно утверждать следующее. Дифференциальные уравнения для любого поля, способного передавать сигнал, должны быть таковы, чтобы соответствующие уравнения характеристик совпадали с уравнением характеристик для световой волны *).

Как мы увидим в главах V—VII, наличие гравитационного поля несколько изменяет вид уравнения характеристик, и оно будет несколько отличаться от (6.01). Но и тогда одно и то же уравнение характеристик дает закон распространения фронта волн любой природы, идущих с предельной скоростью, в том числе световых и гравитационных.

Уравнение (6.01) положено нами (наряду с прямолинейностью и равномерностью движения тела в отсутствии сил) в основу определения инерциальной системы отсчета.

Формулированный выше принцип, утверждающий универсальность этого уравнения, показывает, что такое определение инерциальной системы отсчета действительно целесообразно.

§ 7. Преобразование Галилея и необходимость его обобщения

Пусть одно и то же явление описывается в двух системах отсчета, из которых одна является инерциальной, а другая движется относительно нее равномерно и прямолинейно (согласно принципу относительности она сама будет инерциальной). Возникает вопрос о пересчете от описания явления в одной системе отсчета к описанию того же явления в другой системе. В качестве грубой иллюстрации можно представить себе две радиолокационные установки: одну — расположенную на земле, а другую — на самолете; вопрос состоит тогда в пересчете от показаний одной установки к показаниям другой.

Для такого пересчета нужно прежде всего знать связь между координатами и временем x, y, z, t в одной системе отсчета и координатами и временем x', y', z', t' в другой системе. Старая физика

*) Близкая к нашей формулировка основных положений теории относительности, как теории „абсолютных“ свойств пространства и времени, имеется в работах А. Д. Александрова [2], [3].

принимала как нечто самоочевидное существование единого мирового времени t, одинакового во всех системах отсчета. Поэтому с точки зрения старой физики необходимо было положить $t' = t$ или, самое большее, допустить изменение начала отсчета времени.

Если рассматривать два события, происшедших в моменты времени t и τ, то промежуток времени между ними должен был (с точки зрения старой физики) получиться одинаковым во всех системах отсчета. Отсюда

$$t - \tau = t' - \tau'. \tag{7.01}$$

Далее, старая физика считала очевидным, что длина твердого стержня, измеряемая в двух системах отсчета, должна получаться одинаковой. (Вместо длины твердого стержня можно рассматривать расстояние между „одновременными“ положениями двух точек, которые необязательно связаны жесткой связью.) Если обозначить координаты начала и конца стержня (или данных двух точек) в одной системе отсчета через (x, y, z) и (ξ, η, ζ) и в другой системе через (x', y', z') и (ξ', η', ζ'), то, согласно старой физике, должно быть

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \\ = (x'-\xi')^2 + (y'-\eta')^2 + (z'-\zeta')^2. \tag{7.02}$$

Из (7.01) и (7.02) однозначно вытекает общий вид преобразования, связывающего координаты и время x, y, z, t с координатами и временем x', y', z', t'. Это преобразование состоит из переноса начала отсчета координат и времени, из поворота пространственных координатных осей и из преобразования вида

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - V_x t, \\ y' &= y - V_y t, \\ z' &= z - V_z t, \\ t' &= t, \end{aligned}\right\} \tag{7.03}$$

где V_x, V_y, V_z — постоянные, физический смысл которых легко найти: это есть скорость движения штрихованной координатной системы относительно нештрихованной (точнее — составляющие этой скорости в нештрихованной системе).

Преобразование (7.03) носит название преобразования Галилея.

Таким образом, старая физика утверждала, что если дана инерциальная система отсчета (x, y, z, t), то координаты и время во всякой другой системе отсчета, движущейся относительно нее прямолинейно и равномерно, связаны с (x, y, z, t) преобразованиями Галилея (с точностью до переноса начала и поворота осей).

Преобразование Галилея удовлетворяет принципу относительности в отношении законов механики (мы имеем в виду механику Ньютона), но не удовлетворяет ему в отношении законов распространения света. Действительно, уравнение распространения фронта световой волны меняет в результате преобразования Галилея свой вид. Если бы преобразование Галилея было правильным (а принцип относительности в общей форме — неправильным), то существовала бы только одна инерциальная система в смысле нашего определения, и по измененному виду уравнения распространения фронта волны было бы возможно определить скорость движения (даже равномерного и прямолинейного) всякой другой системы отсчета относительно этой единственной инерциальной системы („неподвижного эфира“). Отрицательный результат многочисленных точнейших опытов, поставленных с целью обнаружения такого относительного движения, не оставляет сомнений в том, что форма закона распространения фронта волны одна и та же во всех неускоренных системах отсчета и что, следовательно, принцип относительности во всяком случае применим и к электромагнитным явлениям.

Отсюда следует, что преобразование Галилея в общем случае неправильно и должно быть заменено другим.

Формулированные в предыдущих параграфах общие положения дают всё необходимое для вывода того преобразования координат и времени, которое должно заменить собой преобразование Галилея.

Наша задача может быть поставлена следующим образом.

Пусть дана система отсчета, инерциальная в смысле нашего определения (т. е. в механическом и в электромагнитном смысле, см. § 5). Координаты и время в ней обозначим через x, y, z, t. Пусть дана другая система отсчета (с координатами и временем x', y', z', t'), которая движется относительно данной инерциальной системы прямолинейно и равномерно. Требуется найти связь между величинами (x', y', z', t') и (x, y, z, t).

Первый шаг в решении этой задачи осуществляется на основании принципа относительности. Согласно этому принципу, *новая система отсчета сама является инерциальной*. Поэтому задача сводится к нахождению связи между координатами и временем в двух инерциальных системах. Но эта последняя задача уже чисто математическая: для решения ее не требуется никаких дальнейших физических предположений.

Мы разобьем решение этой математической задачи на два этапа: сперва докажем линейность искомого преобразования, а затем найдем его коэффициенты.

§ 8. Доказательство линейности преобразования, связывающего две инерциальные системы

Из первого условия, характеризующего инерциальные системы (условия инерциальности в механическом смысле), вытекает, что при переходе от одной инерциальной системы к другой свойство прямолинейности и равномерности движения должно сохраняться. Это значит, что уравнения

$$x = x_0 + v_x(t - t_0); \quad y = y_0 + v_y(t - t_0); \quad z = z_0 + v_z(t - t_0) \qquad (8.01)$$

должны иметь следствием уравнения

$$\left.\begin{aligned} &x' = x'_0 + v'_x(t' - t'_0); \quad y' = y'_0 + v'_y(t' - t'_0); \\ &z' = z'_0 + v'_z(t' - t'_0). \end{aligned}\right\} \tag{8.02}$$

Второе условие для инерциальных систем требует, чтобы из уравнения

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0, \tag{8.03}$$

имеющего место в нештрихованной системе, вытекало уравнение

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t'}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z'}\right)^2\right] = 0 \tag{8.04}$$

для штрихованной системы. Это второе условие мы можем, однако, написать в виде, аналогичном первому условию. В самом деле, из уравнения вида (8.03) вытекают уравнения (4.08) для лучей, т. е. прямолинейное распространение света с постоянной скоростью. Это должно иметь место как в нештрихованной, так и в штрихованной системе отсчета. Поэтому если мы для точки пересечения луча света с волновой поверхностью имеем

$$x = x_0 + v_x(t - t_0); \quad y = y_0 + v_y(t - t_0); \quad z = z_0 + v_z(t - t_0), \tag{8.05}$$

где

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2,$$

то должно быть и

$$\left.\begin{aligned} &x' = x'_0 + v'_x(t' - t'_0); \quad y' = y'_0 + v'_y(t' - t'_0); \\ &z' = z'_0 + v'_z(t' - t'_0), \end{aligned}\right\} \tag{8.06}$$

где

$$v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = c^2.$$

Таким образом, второе условие сводится к добавочному требованию чтобы в уравнениях для прямолинейного и равномерного движения из $v^2 = c^2$ вытекало $v'^2 = c^2$.

Наша задача состоит в том, чтобы найти самый общий вид функций

$$\left.\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z, t), \\ y' &= f_2(x, y, z, t), \\ z' &= f_3(x, y, z, t), \\ t' &= f_4(x, y, z, t), \end{aligned}\right\} \tag{8.07}$$

таких, чтобы из написанных выше уравнений для нештрихованных величин вытекали аналогичные уравнения для штрихованных величин *).

*) Задача эта рассматривалась также Умовым [4] и Вейлем [7].

Прежде чем перейти к решению этой задачи мы введем более симметричные обозначения.

Мы положим

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3 \tag{8.08}$$

и введем вместо времени пропорциональную ему величину

$$x_0 = ct, \tag{8.09}$$

физический смысл которой есть путь, проходимый светом за данное время. (Таким образом, в новых обозначениях x_0 уже не есть начальное значение координаты x). Искомое преобразование мы напишем в виде

$$x'_i = f_i(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{8.10}$$

Начальные значения величин x_0, x_1, x_2, x_3 мы будем обозначать через ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 (и аналогично для штрихованных величин). Введем произвольную положительную постоянную γ_0 и параметр $s = \frac{c}{\gamma_0}(t - t_0)$ и положим

$$\gamma_i = \gamma_0 \frac{v_i}{c} \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{8.11}$$

тогда уравнения прямолинейного равномерного движения напишутся

$$x_i = \xi_i + \gamma_i s, \tag{8.12}$$

и наше первое условие будет заключаться в том, чтобы из уравнений (8.12) вытекали уравнения

$$x'_i = \xi'_i + \gamma'_i s' \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{8.13}$$

где ξ'_i и γ'_i — новые постоянные и s' — новый параметр (они могут быть выражены через старые после того, как будет найден вид функций f_i).

Второе условие заключается в требовании, чтобы из соотношения

$$\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0 \tag{8.14}$$

вытекало соотношение

$$\gamma_0'^2 - (\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 + \gamma_3'^2) = 0. \tag{8.15}$$

Само собою разумеется, что уравнения преобразования (8.10) должны быть разрешимы относительно старых переменных x_0, x_1, x_2, x_3. Для этого нужно, чтобы якобиан преобразования не обращался в нуль:

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\| \neq 0. \tag{8.16}$$

Переходим к выводу уравнений для функций f_i.

Разумея под x_i линейные функции (8.12) от параметра s, мы будем иметь

$$\frac{df_i}{ds} = \sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}. \tag{8.17}$$

Составим производную

$$\frac{dx'_i}{dx'_0} = \frac{\gamma'_i}{\gamma'_0}, \tag{8.18}$$

которая по условию должна быть постоянной. Мы имеем

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}}{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_0}{\partial x_k}} = \frac{\gamma'_i}{\gamma'_0} = \text{const}. \tag{8.19}$$

Приравнивая нулю логарифмическую производную от этого выражения по s, получим

$$\frac{\sum\limits_{k,\,l=0}^{3} \gamma_k \gamma_l \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\, \partial x_l}}{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}} = \frac{\sum\limits_{k,\,l=0}^{3} \gamma_k \gamma_l \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_k\, \partial x_l}}{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_0}{\partial x_k}} \tag{8.20}$$

В этом равенстве аргументами в частных производных от f_0 и f_i являются величины (8.12), которые сами зависят от γ_i. Поскольку, однако, величины ξ_i в (8.12) являются произвольными, мы можем рассматривать γ_i и x_i как независимые переменные. [К тому же заключению мы придем, если положим в (8.20) $s = 0$ и затем будем писать x_i вместо ξ_i]. Таким образом, уравнения (8.20) должны выполняться тождественно относительно γ_i и x_i.

Как функции от γ_i, выражения (8.20) представляют рациональные дроби. Однако ни при каких конечных значениях γ_k все четыре знаменателя в них [т. е. четыре выражения (8.17) для $i = 0, 1, 2, 3$] не могут обратиться в нуль одновременно, так как определитель (8.16) всегда отличен от нуля. Поэтому каждая из дробей всегда остается конечной, даже если знаменатель в ней обращается в нуль. Но это может быть только в том случае, когда числитель дроби делится на знаменатель, так что фактически выражения (8.20) представляют не дроби, а целую функцию от γ_k, которую мы будем писать в виде

$$2 \sum_{l=0}^{3} \gamma_l \psi_l. \tag{8.21}$$

Таким образом, мы имеем

$$\sum_{k,\, l=0}^{3} \gamma_k \gamma_l \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\, \partial x_l} = 2 \sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \sum_{l=0}^{3} \gamma_l \psi_l. \tag{8.22}$$

Так как это есть тождество относительно γ_i, то мы будем иметь

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\, \partial x_l} = \psi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \psi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k}. \tag{8.23}$$

Мы приходим к следующему выводу. Для того чтобы прямолинейное и равномерное движение переходило в прямолинейное и равномерное, необходимо, чтобы функции преобразования f_i удовлетворяли системе уравнений в частных производных (8.23), где ψ_k — некоторые функции от x_0, x_1, x_2, x_3.

Найдем теперь условие, которому должны удовлетворять функции f_i для того, чтобы из соотношения (8.14) вытекало (8.15). Вследствие (8.19) соотношение (8.15) равносильно следующему:

$$\left(\sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_0}{\partial x_k}\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)^2 = 0. \tag{8.24}$$

Это уравнение должно быть следствием уравнения

$$\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0. \tag{8.14}$$

Так как левые части (8.24) и (8.14) — квадратичные функции от γ_i, то они должны быть друг другу пропорциональны. Чтобы записать вытекающие отсюда формулы в более удобном виде, введем четыре величины:

$$e_0 = 1;\ e_1 = e_2 = e_3 = -1, \tag{8.25}$$

и напишем (8.24) и (8.14) в виде

$$\sum_{i,\, k,\, l=0}^{3} e_i \gamma_k \gamma_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = 0, \tag{8.26}$$

$$\sum_{k=1}^{3} e_k \gamma_k^2 = 0. \tag{8.27}$$

Полагая левую часть (8.26) пропорциональной левой части (8.27), получим

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = \lambda e_k \delta_{kl}, \tag{8.28}$$

где λ — некоторая функция от x_0, x_1, x_2, x_3, а символ δ_{kl} имеет обычное значение:

$$\delta_{kl} = 0 \quad \text{при } k \neq l;\ \delta_{kk} = 1. \tag{8.29}$$

Мы выведем из условия (8.28) другое, по форме аналогичное условию (8.23).

Дифференцируя (8.28) по x_m и полагая

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_m} = 2\lambda\varphi_m, \tag{8.30}$$

будем иметь

$$\sum_{i=0}^{3} e_i\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\,\partial x_m}\frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l\,\partial x_m}\frac{\partial f_i}{\partial x_m}\right) = 2\lambda\varphi_m e_k\delta_{kl}. \tag{8.31}$$

Чтобы получить условие, аналогичное (8.23), положим*)

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\,\partial x_m} = \sum_{r=0}^{3}\Gamma_{km}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial x_r}; \quad \Gamma_{km}^{r} = \Gamma_{mk}^{r} \tag{8.32}$$

и подставим (8.32) в (8.31). Пользуясь уравнениями (8.28), мы получим, по сокращении на λ,

$$e_l\Gamma_{km}^{l} + e_k\Gamma_{lm}^{k} = 2\varphi_m e_k\delta_{kl}. \tag{8.33}$$

Чтобы найти отсюда коэффициенты Γ_{km}^{l}, присоединим к уравнению (8.33) два других, получаемых из него круговой перестановкой букв k, l, m:

$$e_m\Gamma_{lk}^{m} + e_l\Gamma_{mk}^{l} = 2\varphi_k e_l\delta_{lm}, \tag{8.34}$$

$$e_k\Gamma_{ml}^{k} + e_m\Gamma_{kl}^{m} = 2\varphi_l e_m\delta_{mk}. \tag{8.35}$$

Теперь возьмем сумму последних двух из этих трех уравнений и вычтем из нее первое. Пользуясь симметрией величин Γ_{km}^{r} относительно нижних значков, мы получим тогда

$$e_m\Gamma_{kl}^{m} = \varphi_k e_l\delta_{lm} + \varphi_l e_m\delta_{mk} - \varphi_m e_k\delta_{kl} \tag{8.36}$$

или

$$\Gamma_{kl}^{m} = \varphi_k\delta_{lm} + \varphi_l\delta_{km} - e_m\varphi_m e_k\delta_{kl}. \tag{8.37}$$

Подставляя это значение в (8.32), мы получаем окончательно

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\,\partial x_l} = \varphi_k\frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \varphi_l\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - e_k\delta_{kl}\sum_{m=0}^{3} e_m\varphi_m\frac{\partial f_i}{\partial x_m}, \tag{8.38}$$

причем, согласно (8.30),

$$\varphi_m = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m}(\lg\sqrt{\lambda}). \tag{8.39}$$

---

*) Это всегда возможно вследствие (8.16) и вследствие того, что число коэффициентов Γ_{km}^{r} равно числу вторых производных от f_i.

Таково условие, вытекающее из требования, чтобы прямолинейному и равномерному движению со скоростью света соответствовало, после преобразования, такое же движение.

Но искомые функции f_i должны, кроме того, удовлетворять условию

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \psi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \psi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \tag{8.23}$$

вытекающему из аналогичного требования для движения со скоростью, не равной скорости света.

Чтобы сравнить между собой уравнения (8.23) и (8.38), удобно писать (8.38) в виде (8.32) и представить в аналогичном виде также и уравнение (8.23). Вместо (8.23) мы можем написать

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{m=0}^{3} \Lambda_{kl}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_m}, \tag{8.40}$$

где

$$\Lambda_{kl}^m = \psi_k \delta_{lm} + \psi_l \delta_{km}. \tag{8.41}$$

Чтобы правые части (8.38) и (8.23) были между собою равны, необходимо, чтобы для всех значков k, l, m имело место равенство

$$\Gamma_{kl}^m = \Lambda_{kl}^m, \tag{8.42}$$

откуда

$$(\varphi_k - \psi_k)\,\delta_{lm} + (\varphi_l - \psi_l)\,\delta_{km} - e_m \varphi_m e_k \delta_{kl} = 0. \tag{8.43}$$

Полагая здесь $k = m$, $l \neq m$, получим

$$\psi_l = \varphi_l \qquad (l = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

После этого, полагая в (8.43) $k = l$, получаем $\varphi_m = 0$. Следовательно

$$\psi_l = \varphi_l = 0 \qquad (l = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{8.44}$$

Таким образом, правые части уравнений (8.38) и (8.23) могут быть равны только в том случае, когда они равны нулю. При этом величина λ в (8.39) оказывается постоянной, а уравнения для f_i приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0. \tag{8.45}$$

Мы приходим к выводу, что из совокупности двух условий, характеризующих инерциальные системы, вытекает, что формулы преобразования, связывающие координаты и время в этих двух системах, должны быть линейными.

Вопрос о том, что вытекает из каждого из этих условий, взятого в отдельности [т. е. из уравнения (8.38) в отдельности и из уравнения (8.23) в отдельности], мы рассмотрим в Добавлении А.

§ 9. Определение коэффициентов линейного преобразования и масштабного множителя

В уравнение (8.28) для функций f_i входит неизвестный постоянный множитель λ. Чтобы учесть явным образом влияние его на вид преобразования, будем писать наши линейные функции f_i в виде

$$x'_i = f_i = \sqrt{\lambda}\left(a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k\right). \tag{9.01}$$

Уравнения (8.28) будут выполняться тождественно относительно λ, если коэффициенты a_{ik} удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl}, \tag{9.02}$$

из которых следует, что будет и

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ki} a_{li} = e_k \delta_{kl}. \tag{9.03}$$

Уравнения (9.01) могут быть решены относительно x_i, причем получается

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki}\left(\frac{x'_k}{\sqrt{\lambda}} - a_k\right). \tag{9.04}$$

Мы имеем также

$$dx'^2_0 - (dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3) = \lambda\,[dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)] \tag{9.05}$$

и для произвольной функции ω

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_3}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right]\right\}. \tag{9.06}$$

Очевидно, что множитель λ (точнее $\sqrt{\lambda}$) характеризует отношение масштабов в штрихованной и нештрихованной координатных системах, причем речь идет о масштабе, общем для пространственных координат и для времени, так что изменение его не влияет ни на углы между пространственными направлениями, ни на значения скорости. Мы покажем, что этот множитель нужно положить равным единице.

Рассмотрим точку, неподвижную в штрихованной системе отсчета. Тогда скорость этой точки в нештрихованной системе дает скорость движения самой штрихованной системы относительно нештрихованной.

Обозначим составляющие этой скорости (взятые в нештрихованной системе) через V_1, V_2, V_3. Таким образом,

$$V_i = \frac{dx_i}{dt} = c\frac{dx_i}{dx_0} \quad \text{для } dx'_1 = dx'_2 = dx'_3 = 0. \tag{9.07}$$

Но мы имеем из (9.04)

$$dx_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} a_{0i}\, dx'_0; \qquad dx'_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} a_{00}\, dx'_0 \tag{9.08}$$

и, следовательно,

$$V_i = c\frac{a_{0i}}{a_{00}} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{9.09}$$

Отсюда прежде всего следует, что преобразование (9.01), дающее связь между координатами и временем в двух инерциальных системах, соответствует переходу от данной системы отсчета к другой, движущейся относительно данной прямолинейно и равномерно, как это и должно быть.

Далее из формулы (9.09) следует, что относительная скорость движения систем никак не связана с масштабным множителем λ, а значит и этот множитель не может зависеть от относительной скорости *). Но при относительной скорости, равной нулю, достаточно предположить, что в обеих системах отсчета длина (а также промежутки времени) измеряется одинаковым образом и выражается в одинаковых единицах, чтобы можно было считать $\lambda = 1$. При таком, совершенно естественном, условии λ будет равно единице и для любой инерциальной системы, независимо от ее скорости.

Таким образом, мы можем уточнить наши формулы, положив в них $\lambda = 1$. Вместо (9.05) и (9.06) мы получим тогда

$$dx_0'^2 - (dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2) = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{9.10}$$

и

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_3}\right)^2\right] =$$
$$= \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right], \tag{9.11}$$

а прямые и обратные формулы преобразования напишутся:

$$x'_i = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k, \tag{9.12}$$

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} (x'_k - a_k). \tag{9.13}$$

*) Обычно утверждается, по примеру Эйнштейна, что масштабный множитель „очевидно" может зависеть от относительной скорости и только от нее. Лишь затем доказывается, что фактически он от нее не зависит, ибо равен единице.

Эти формулы носят название преобразования Лоренца. Они составляют формальную основу всей теории относительности.

Заметим, что исходной точкой наших рассуждений было требование, чтобы во всякой инерциальной системе отсчета уравнение распространения фронта электромагнитной волны имело вид (5.01). Отсюда вытекало, что равенство нулю правой части (9.11) должно иметь следствием равенство нулю левой части. Но в результате наложения добавочных условий (о том, чтобы прямолинейное и равномерное движение переходило в такое же движение, и о том, чтобы масштаб в обеих системах отсчета был одинаков) мы получили большее: правая часть (9.11) не только обращается в нуль одновременно с левой частью, но и тождественно равна ей.

§ 10. Преобразование Лоренца

Преобразование Лоренца представляет формулы перехода от координат и времени в одной инерциальной системе отсчета к координатам и времени в другой инерциальной системе, движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно. Оно может быть характеризовано тем, что величина

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{10.01}$$

или

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{10.02}$$

остается при таком преобразовании инвариантной. Самое общее преобразование Лоренца имеет вид

$$x_i' = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k, \tag{10.03}$$

где коэффициенты a_{ik} удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl}, \tag{10.04}$$

$$\sum_{i=0} e_i a_{ki} a_{li} = e_k \delta_{kl}. \tag{10.05}$$

Исследуем физический смысл постоянных, входящих в формулы преобразования.

Прежде всего, очевидно, что постоянные члены a_i соответствуют изменению начала отсчета для координат и времени. Если мы будем считать, что в момент времени $t = 0$ начала координат старой и новой системы отсчета совпадают, то будет

$$a_i = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{10.06}$$

В дальнейшем мы примем это условие и будем писать преобразование Лоренца в виде

$$x'_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k. \tag{10.07}$$

Физический смысл отношения коэффициентов

$$\frac{a_{0i}}{a_{00}} = \frac{1}{c} V_i \tag{10.08}$$

мы уже выяснили. Это есть деленная на скорость света относительная скорость движения двух систем отсчета. Точнее, V_i есть составляющая, взятая в нештрихованной системе отсчета, для вектора скорости движения штрихованной системы относительно нештрихованной. Так как формулы обратного преобразования имеют вид

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} x'_k, \tag{10.09}$$

то определяемая из формулы

$$\frac{a_{i0}}{a_{00}} = \frac{1}{c} V'_i \tag{10.10}$$

величина V'_i есть (взятая в штрихованной системе отсчета) составляющая вектора скорости движения нештрихованной системы относительно штрихованной.

Полагая в формулах (10.04) и (10.05) $k = l = 0$, получим

$$a_{00}^2 - (a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2) = 1, \tag{10.11}$$

$$a_{00}^2 - (a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2) = 1, \tag{10.12}$$

откуда, в соединении с (10.08) и (10.10), следует

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2, \tag{10.13}$$

$$V^2 = V'^2, \tag{10.14}$$

где под V^2 мы разумеем квадрат абсолютной величины скорости. Это значит, что абсолютная величина векторов относительной скорости в той и другой системе отсчета одинакова — результат, который нельзя считать очевидным, хотя он вполне согласуется с нашими наглядными представлениями.

Из уравнений (10.08) и (10.12) следует

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10.15}$$

При корне квадратном нужно взять положительный знак, ибо

$$a_{00} = \frac{\partial t'}{\partial t} > 0. \tag{10.16}$$

Отрицательный знак при a_{00} означал бы изменение направления счета времени.

Из (10.08) и (10.15) получаем

$$a_{0i} = \frac{V_i}{\sqrt{c^2 - V^2}} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{10.17}$$

и аналогично из (10.10) и (10.15)

$$a_{i0} = \frac{V'_i}{\sqrt{c^2 - V^2}} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{10.18}$$

Если в условиях ортогональности положить один из значков равным нулю и воспользоваться (10.17) и (10.18), мы получим

$$a_{00}V'_i = a_{i1}V_1 + a_{i2}V_2 + a_{i3}V_3 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{10.19}$$

$$a_{00}V_i = a_{1i}V'_1 + a_{2i}V'_2 + a_{3i}V'_3 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{10.20}$$

Если оба значка не равны нулю, то условия ортогональности дают

$$a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + a_{3i}a_{3k} = \delta_{ik} + \frac{V_iV_k}{c^2 - V^2}. \tag{10.21}$$

Введем вместо a_{ik} (для $i,\ k = 1,\ 2,\ 3$) новые величины α_{ik}, положив

$$\alpha_{ik} = -a_{ik} + \frac{a_{i0}a_{0k}}{a_{00} + 1} \tag{10.22}$$

или

$$\alpha_{ik} = -a_{ik} + (a_{00} - 1)\frac{V'_iV_k}{V^2}. \tag{10.23}$$

Легко проверить, что вследствие (10.20) и (10.21) будет тогда

$$\alpha_{1i}\alpha_{1k} + \alpha_{2i}\alpha_{2k} + \alpha_{3i}\alpha_{3k} = \delta_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{10.24}$$

Величины α_{ik} представляют, следовательно, коэффициенты трехмерного ортогонального преобразования и могут быть истолкованы как косинусы углов между старыми и новыми координатными осями, причем в α_{ik} первый значок относится к новым, а второй — к старым осям. Формулы (10.22) дают вследствие (10.19) и (10.20)

$$\alpha_{i1}V_1 + \alpha_{i2}V_2 + \alpha_{i3}V_3 = -V'_i, \tag{10.25}$$

$$\alpha_{1i}V'_1 + \alpha_{2i}V'_2 + \alpha_{3i}V'_3 = -V_i \tag{10.26}$$

Последние соотношения можно толковать в том смысле, что вектор $\mathbf{V}'$ (вектор скорости нештрихованной системы относительно штрихованной) и вектор $\mathbf{V}$ (вектор скорости штрихованной системы относительно нештрихованной) равны по величине и противоположны по направлению.

Полученные формулы позволяют выразить все коэффициенты преобразования Лоренца через косинусы α_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ и через три составляющие V_1, V_2, V_3 вектора относительной скорости. Так как девять косинусов α_{ik} связаны шестью соотношениями (10.23) и выражаются через три независимые величины, то всего в преобразование Лоренца входит шесть параметров (не считая постоянных членов a_i, которые мы положили равными нулю).

Для коэффициентов a_{00} и a_{0i} мы уже получили выражения (10.15) и (10.17). Для коэффициентов a_{i0} мы можем взять выражение (10.18) в котором под V_i' мы должны разуметь его значение из (10.24). Подробнее будет

$$a_{i0} = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - V^2}} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{il} V_l \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{10.27}$$

Наконец, для коэффициентов a_{ik} мы получаем из (10.23):

$$a_{ik} = -\alpha_{ik} + (a_{00} - 1)\frac{V_i' V_k}{V^2}, \tag{10.28}$$

или подробнее

$$a_{ik} = -\alpha_{ik} - \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_k}{V^2} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{il} V_l. \tag{10.29}$$

Подставим найденные значения коэффициентов преобразования Лоренца в формулу (10.07) и будем писать в них для наглядности ct вместо x_0. Мы получим

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{1}{c^2}(V_1 x_1 + V_2 x_2 + V_3 x_3)\right). \tag{10.30}$$

Что касается пространственных координат, то формулы для них удобнее всего писать в виде

$$x_i' = \sum_{m=1}^{3} \alpha_{im} \overset{*}{x}_m, \tag{10.31}$$

где

$$\overset{*}{x}_m = x_m - V_m t + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_m}{V^2} \sum_{k=1}^{3} V_k (x_k - V_k t). \tag{10.32}$$

Таким образом, общее преобразование Лоренца можно выполнить в два этапа. Первый этап состоит в переходе от переменных (x_1, x_2, x_3, t) к переменным $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$, где x_1^*, x_2^*, x_3^* определяются из (10.31), а t^* совпадает с t' и равно

$$t^* = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{1}{c^2}(V_1x_1 + V_2x_2 + V_3x_3)\right). \tag{10.33}$$

Второй этап состоит в переходе от $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ к (x_1', x_2', x_3', t'), где, согласно (10.30) и (10.31),

$$x_i' = \alpha_{i1}x_1^* + \alpha_{i2}x_2^* + \alpha_{i3}x_3^*; \qquad t' = t^*. \tag{10.34}$$

Очевидно, что второй этап есть простой поворот пространственной координатной системы, тогда как первый этап есть переход к системе отсчета, движущейся со скоростью (V_1, V_2, V_3), причем этот переход не сопровождается поворотом осей.

Мы могли бы, конечно, сперва произвести поворот осей, а затем перейти к движущейся системе отсчета.

Обратное преобразование может быть также произведено в два этапа: во-первых, переход от (x_1', x_2', x_3', t') к $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ по формулам

$$x_i^* = \alpha_{1i}x_1' + \alpha_{2i}x_2' + \alpha_{3i}x_3'; \qquad t^* = t', \tag{10.35}$$

представляющим простой поворот осей и, во-вторых, переход от $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ к (x_1, x_2, x_3, t) по формулам

$$x_m = x_m^* + V_m t^* + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_m}{V^2}\sum_{k=1}^{3} V_k(x_k^* + V_k t^*), \tag{10.36}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t^* + \frac{1}{c^2}(V_1x_1^* + V_2x_2^* + V_3x_3^*)\right), \tag{10.37}$$

представляющим обращение формул (10.32), (10.33). Прямые и обратные формулы, связывающие $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ с (x_1, x_2, x_3, t), получаются друг из друга изменением знака скорости V_i.

Заметим, что якобиан этих формул перехода равен единице. Что касается подстановки (10.34) и обратной ей (10.35), то якобиан этих подстановок будет равен единице, если они представляют поворот осей в собственном смысле (не сопровождаемый переходом от правой координатной системы и левой или наоборот). Отсюда следует, что при условии сохранения направления отсчета времени и сохранения правой (или левой) системы пространственных координат якобиан преобразования Лоренца будет равен единице. В таком случае преобразование Лоренца принято называть собственным преобразованием. В дальнейшем мы будем пользоваться только собственным преобразованием Лоренца.

Поворот осей не представляет, в сущности, перехода к другой инерциальной системе и поэтому для нас не интересен. Характерные особенности преобразования Лоренца заключаются в формулах (10.32), (10.33) и обратных им (10.36), (10.37). Эти формулы упростятся, если выбрать координатные оси так, чтобы направление одной из них, например первой, совпало с направлением относительной скорости V. Полагая

$$V_1 = V; \qquad V_2 = V_3 = 0, \tag{10.38}$$

мы получим из (10.32) и (10.33):

$$\overset{*}{x}_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \qquad \overset{*}{x}_2 = x_2; \qquad \overset{*}{x}_3 = x_3, \tag{10.39}$$

$$t^* = \frac{t - \frac{Vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10.40}$$

Обратные формулы получатся отсюда заменой V на $-V$. Для большей наглядности мы будем писать x, y, z вместо x_1, x_2, x_3. Заменив звездочку штрихом, мы получим тогда

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z, \tag{10.41}$$

$$t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{10.42}$$

и, выражая x, t через x', t',

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z', \tag{10.43}$$

$$t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10.44}$$

Эти формулы дают частное преобразование Лоренца, которое, однако, содержит в себе все характерные особенности общего преобразования.

§ 11. Определение расстояний и синхронизация часов в одной инерциальной системе отсчета

Прежде чем переходить к обсуждению следствий из преобразования Лоренца, вернемся к рассмотренному в §§ 1 и 2 вопросу об измерении расстояний и промежутков времени в одной инерциальной системе отсчета. Мы остановимся несколько подробнее на понятии одновременности в разных точках пространства и на вопросе о синхронизации удаленных друг от друга часов.

Расстояния между телами, неподвижными в одной инерциальной системе отсчета, могут измеряться различными способами: путем непосредственного наложения масштабов (измерительных жезлов), путем триангуляции и путем радиолокации. В первом способе используются только свойства твердых тел; во втором способе используется, кроме того, прямолинейность распространения света; в третьем способе существенную роль играет скорость света, которая предполагается известной. Само собою разумеется, что во всех трех способах предполагается справедливость евклидовой геометрии; если бы евклидова геометрия была не верна, то, например, триангуляция, произведенная по различным путям, привела бы к противоречивым результатам. Мы уже подчеркивали в § 2, что справедливость законов евклидовой геометрии следует рассматривать как опытный факт, а не как априорное допущение.

Все три способа измерения расстояний основаны на свойствах твердых тел и на свойствах света. Так как свет представляет более простое явление, то его следует рассматривать, как первичное, и проверять, например, неизменность эталона длины оптическим путем (определяя число длин волн, укладывающихся на протяжении эталона).

Для измерения скорости света нужно уметь измерять промежутки времени и расстояния способами, не зависящими от знания скорости света. При этом, если сделать допущение, что скорость света в прямом и в обратном направлении одинакова, то достаточно уметь измерять время в одной точке. Для этого может, в принципе, служить любой периодический процесс, например колебания молекулы аммиака или кристалла кварца. Прибор для измерения времени мы будем называть часами или хронометром, независимо от того, представляет ли он механический прибор (как обыкновенные часы) или действует на каком-нибудь ином принципе.

Определение скорости света сводится в принципе к определению промежутка времени τ, в течение которого свет проходит туда и обратно заранее отмеренное (путем триангуляции или наложением масштабов) расстояние r; скорость света будет равна $c = 2r/\tau$. Таким образом, дело сводится, по существу, к нахождению переводного множителя от расстояний, выраженных в единицах длины и измеренных путем триангуляции или непосредственно наложением масштабов, к расстояниям, выраженным в единицах времени и измеренным путем радиолокации. Этот переводный множитель может быть определен раз и навсегда.

Переходим к вопросу о сравнении показаний часов, неподвижных в некоторой инерциальной системе отсчета и находящихся на заданном расстоянии друг от друга. Предполагается, что часы — одинакового устройства и обладают одинаковым ходом, так что задача состоит только в том, чтобы их „одинаково" поставить. Пусть в точке A расположены одни часы (часы A) и в точке B, на расстоянии r от A — другие (часы B). Из A посылается в момент t_1 световой сигнал, который отражается от зеркала, поставленного в B, и возвращается в A в момент t_2. Спрашивается, какое время должны показывать „одинаково поставленные" часы B, когда до них дошел сигнал? Мы будем считать, что часы B одинаково поставлены, или *синхронны*, с часами A, если в момент дохождения до них сигнала они показывают время $t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$. В этом заключается эйнштейновское определение синхронности часов, расположенных в разных точках. Это определение вполне естественно и согласуется с основным положением теории относительности о постоянстве скорости света. В самом деле, если сигнал был послан из A в момент t_1, то он дошел до B в момент

$$t = t_1 + \frac{r}{c},$$

так как он прошел расстояние r со скоростью c. С другой стороны, так как он вернулся в A в момент t_2, а до того прошел путь r от B до A, то он должен был отразиться от B в более ранний момент

$$t = t_2 - \frac{r}{c}.$$

Из последних двух формул следует, что моменту отражения сигнала от B мы должны приписать на часах A значение $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$, и если часы B синхронны с часами A, то и они должны при отражении от них сигнала показать время $t' = t$.

Из того, что скорость света в прямом и обратном направлении одинакова, следует, что синхронность двух часов в определенном выше смысле есть свойство взаимное: если часы B синхронны с часами A, то и обратно, часы A синхронны с часами B. Далее, из справедливости евклидовой геометрии и из одинаковости скорости света в любом направлении (то и другое содержится в уравнении распространения фронта световой волны) следует, что если часы A синхронны с несколькими часами B, C, D, ..., то все эти часы синхронны между собою.

Последнее обстоятельство позволяет построить такую модель инерциальной системы отсчета: твердый каркас, во всех узловых точках которого находятся синхронно идущие часы. С точки зрения такой модели движение какого-нибудь тела относительно данной инерциальной системы отсчета может быть описано следующим образом. Пусть тело проходит последовательно мимо неподвижных часов с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и т. д., причем часы (x_i, y_i, z_i) показывают при прохождении мимо них тела время t_i. Тогда координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ тела в данной системе отсчета будут такими функциями времени t этой системы, которые при $t = t_i$ принимают значения (x_i, y_i, z_i).

Такая модель, при всей своей громоздкости, может быть иногда полезной и часто излагается в курсах теории относительности. Мы предпочитаем ей, однако, модель радиолокационной станции, которая позволяет, *исходя из одного места*, определять непрерывным образом как положение движущегося тела, так и момент времени (по часам станции), к которому это положение относится. В силу независимости скорости света от скорости движения источника обе модели дают одни и те же значения координат и времени; разница между ними только в том, что в радиолокационной модели определение расстояний и синхронизация часов производятся не заранее, а, так сказать, на ходу.

Радиолокационная модель является более гибкой и сохраняет свою наглядность также и в тех случаях, когда модель твердого каркаса становится явно непригодной, например, когда речь идет об астрономических расстояниях. Кроме того, радиолокационная модель системы отсчета легче поддается обобщению.

Изложенный выше эйнштейновский способ синхронизации часов при помощи световых сигналов с учетом запаздывания представляется настолько естественным, что на первый взгляд может показаться, что он не содержит в себе ничего характерного для теории относительности. Между тем это не так. Указанный способ заключает в себе *определение* одновременности в разных точках пространства с точки зрения данной инерциальной системы. Это определение основано на законах теории относительности и оно является не произвольным, а, напротив того, единственно рациональным с точки зрения этой теории.

В до-релятивистской физике принималось, как нечто само собою разумеющееся, существование единого мирового времени и соответственно этому как бы допускалось, что понятие одновременности в разных точках пространства не нуждается в определении. В связи с этим предполагалось, что любой способ синхронизации часов (например, путем перевозки хронометров или путем световых сигналов) должен дать то же самое. На самом же деле это не так.

Как мы увидим ниже, из теории относительности вытекает, что если часы A синхронизованы с часами B при помощи световых сигналов и если хронометр C, сверенный с часами в точке A, перевезен затем в точку B, то его показания в точке B даже при идеальном ходе хронометра не будут совпадать с показаниями часов в B, а будут зависеть от скорости перевозки (они будут совпадать лишь при бесконечно малой скорости).

К этому вопросу мы вернемся в следующем параграфе. Мы хотели здесь подчеркнуть, что даже такое простое физическое понятие, как одновременность в одной инерциальной системе отсчета, требует точного определения, с которым должны быть согласованы все применяемые способы измерения соответствующей физической величины.

§ 12. Последовательность событий во времени в разных системах отсчета

Преобразование Лоренца заключает в себе формальные основы всего учения о пространстве и времени, содержащегося в теории относительности.

Рассмотрим, на основе преобразования Лоренца, вопрос о последовательности событий во времени в разных системах отсчета. Под „событиями" мы будем разуметь здесь мгновенные события, характеризуемые положением точки в пространстве и соответствующим моментом времени.

Чтобы иметь конкретную картину, предположим, что „события" заключаются в мгновенной вспышке световых сигналов. Пусть первая вспышка произошла в момент времени t_1 в точке с координатами x_1, y_1, z_1, а вторая вспышка — в момент t_2 в точке x_2, y_2, z_2. Вводя обычные трехмерные векторные обозначения, мы можем положение и время первой вспышки характеризовать символами $(\mathbf{r}_1, t_1)$, а второй вспышки — символами $(\mathbf{r}_2, t_2)$.

Поставим прежде всего вопрос: которая из двух вспышек произошла раньше другой?

Ответ будет бесспорен, если свет от одной вспышки успел достигнуть места другой вспышки до того, как та произошла. А именно, если

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{c}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|, \tag{12.01}$$

то первая вспышка бесспорно произошла раньше второй, а если

$$t_2 - t_1 < -\frac{1}{c}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|, \tag{12.02}$$

то, наоборот, первая вспышка бесспорно произошла позже второй.

События, для которых выполняется одно из неравенств (12.01) и (12.02), мы будем называть *последовательными*. В случае (12.01) мы будем говорить, что второе событие наступило *абсолютно позже* первого, а в случае (12.02) — что оно наступило *абсолютно раньше* первого. В обоих случаях будет

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 > 0. \tag{12.03}$$

Вещественную положительную величину

$$T = \frac{1}{c}\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^2} \tag{12.04}$$

мы будем называть *временным интервалом* между двумя последовательными событиями. Значение временного интервала не зависит от системы отсчета, так как выражение под знаком квадратного корня в (12.04) есть инвариант по отношению к преобразованию Лоренца.

В силу условия $\frac{\partial t'}{\partial t} > 0$, выражающего сохранение направления счета времени [см. (10.16)], соотношения (12.01) и (12.02) также не зависят от системы отсчета. Так это и должно быть, ибо достижение или недостижение световой волной места второй вспышки есть физический факт, от системы отсчета не зависящий. Таким образом, понятия „абсолютно раньше“ и „абсолютно позже“, применимые к последовательным событиям, являются инвариантными понятиями.

Предположим теперь, что свет от одной вспышки не успел достигнуть места другой вспышки до того, как она произошла. Тогда будут иметь место неравенства

$$-\frac{1}{c}|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1| < t_2-t_1 < \frac{1}{c}|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|, \tag{12.05}$$

противоположные (12.01) и (12.02).

События, для которых выполняются неравенства (12.05), мы будем называть *квази-одновременными*. Название это оправдывается тем, что при выполнении неравенств (12.05) понятия „раньше“ и „позже“ становятся относительными: в одних системах отсчета может оказаться, что $t_2-t_1>0$, а в других, что $t_2-t_1<0$. Поэтому и вопрос о том, которая из вспышек произошла раньше, уже не будет иметь теперь однозначного ответа.

Квази-одновременные события характеризуются вытекающим из (12.05) инвариантным неравенством

$$c^2(t_2-t_1)^2-(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^2 < 0. \tag{12.06}$$

Неравенства (12.05) равносильны (12.06) и поэтому сами будут инвариантными. Вещественную положительную величину

$$R = \sqrt{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2} \tag{12.07}$$

мы будем называть *пространственным интервалом* между двумя квази-одновременными событиями.

Покажем, что в случае двух квази-одновременных событий можно всегда выбрать систему отсчета так, чтобы они были в ней одновременными, а в случае двух последовательных событий можно выбрать систему отсчета так, чтобы они имели в ней одинаковые пространственные координаты.

Рассмотрим два квази-одновременных события, для которых разность $t_2 - t_1$ имеет заданное значение, удовлетворяющее неравенствам (12.05). Если мы введем новую (штрихованную) систему отсчета, движущуюся относительно старой со скоростью V, то, согласно формуле (10.30) для преобразования времени, значение разности $t'_2 - t'_1$ в новой системе будет равно

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left\{ t_2 - t_1 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{V} \right\}. \tag{12.08}$$

Относительную скорость $\mathbf{V}$ можно подобрать так, чтобы в новой системе оба события были уже одновременными. Для этого достаточно положить

$$\mathbf{V} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \frac{c^2 (t_2 - t_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}. \tag{12.09}$$

В силу неравенства (12.06) мы будем иметь

$$\mathbf{V}^2 = \frac{c^4 (t_2 - t_1)^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} < c^2, \tag{12.10}$$

так что относительная скорость будет по абсолютной величине меньше скорости света, как и должно быть для преобразования Лоренца.

Чтобы вычислить разность пространственных координат двух квази-одновременных событий в той системе отсчета, где они одновременны, напишем формулу преобразования Лоренца (10.32) в векторной форме:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{\mathbf{V}}{V^2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r} - V^2 t). \tag{12.11}$$

Подставляя сюда вместо t разность $t_2 - t_1$ и вместо $\mathbf{r}$ — разность $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и заменяя $\mathbf{V}$ выражением (12.09), получим для величины $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$ значение

$$\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 (t_2 - t_1)^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{12.12}$$

Пространственное расстояние между обоими событиями в штрихованной системе отсчета будет равно

$$|\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1| = R, \tag{12.13}$$

где R есть пространственный интервал (12.07). Формула (12.13) непосредственно вытекает из инвариантности величины R и из условия, что $t'_2 - t'_1 = 0$.

Таким образом, физическое значение пространственного интервала между двумя квази-одновременными событиями есть расстояние между ними в той системе отсчета, где они одновременны.

Рассмотрим теперь два последовательных события, для которых выполняется одно из неравенств (12.01) или (12.02). Покажем, что в этом случае можно ввести новую (штрихованную) систему отсчета так, чтобы пространственные координаты обоих событий в ней совпадали. Чтобы убедиться в этом, достаточно ввести в формулу (12.11) вместо t разность t_2-t_1 и вместо $\mathbf{r}$ — разность $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ и положить

$$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{t_2-t_1}. \tag{12.14}$$

Тогда вектор $\mathbf{r}'=\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_1'$ обратится в нуль, откуда

$$\mathbf{r}_2'=\mathbf{r}_1'. \tag{12.15}$$

Вследствие неравенства (12.03) скорость $\mathbf{V}$ будет при этом по абсолютной величине меньше скорости света

$$V^2<c^2. \tag{12.16}$$

В новой системе отсчета промежуток времени между обоими событиями будет равен, согласно (12.08),

$$t_2'-t_1'=(t_2-t_1)\sqrt{1-\frac{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2}{c^2(t_2-t_1)^2}}=(t_2-t_1)\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{12.17}$$

При $t_2-t_1>0$ получаем отсюда

$$t_2'-t_1'=T, \tag{12.18}$$

где T есть временной интервал (12.04).

Тем самым выясняется физическое значение временного интервала T. Это есть протекший между двумя последовательными событиями промежуток времени в той системе отсчета, в которой оба события произошли в одной точке. Такая система отсчета имеет весьма наглядный смысл. Это есть, скажем, часы, прямолинейно и равномерно движущиеся от места первого события к месту второго, причем движение их происходит с такой скоростью, что они как раз успевают поровняться с местом первого события, когда оно там происходит, и с местом второго события, когда там наступает оно.

Заметим, что понятие „последовательные события" обладает свойством транзитивности: если дано, что второе событие наступило абсолютно позже первого, а третье событие — абсолютно позже второго, то отсюда следует, что третье событие наступило абсолютно позже первого. Это физически очевидное свойство может быть формально доказано следующим образом: из двух неравенств

$$t_2-t_1>\frac{1}{c}|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|; \qquad t_3-t_2>\frac{1}{c}|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2| \tag{12.19}$$

вытекает путем сложения третье неравенство

$$t_3-t_1>\frac{1}{c}|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|, \tag{12.20}$$

ибо сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны. Понятие же „квази-одновременные события“ свойством транзитивности не обладает: если дано, что два события квази-одновременны, а третье событие квази-одновременно со вторым, то это третье событие может быть, по отношению к первому, как квази-одновременным, так и последовательным (наступить абсолютно раньше или абсолютно позже первого).

Резюмируем сказанное. В теории относительности события разделяются, в отношении их последовательности во времени, на *последовательные* и *квази-одновременные*, причем разделение это не зависит от системы отсчета. Двум последовательным событиям можно сопоставить инвариантный *временной интервал*, равный промежутку времени между ними в определенной системе отсчета. Двум квази-одновременным событиям можно сопоставить инвариантный *пространственный интервал*, равный расстоянию между ними в определенной системе отсчета.

Существующее в теории относительности разделение событий на последовательные и квази-одновременные согласуется с понятием причинности и уточняет его. Если даны два квази-одновременных события, то ни одно из них не может являться непосредственной причиной или следствием другого. (Разумеется, они могут иметь общую причину в виде третьего события, которое наступило абсолютно раньше каждого из них.) Только последовательные события могут (хотя, разумеется, не обязаны) находиться в прямой причинной связи: то из них, которое наступило абсолютно раньше, может оказаться причиной другого.

Введенные здесь понятия являются естественным обобщением понятий старой, дорелятивистской физики. Старые понятия не были согласованы с фактом существования конечного предела для скорости распространения всякого рода действий (конечной скорости света). Они были недостаточно точно определены и приводили поэтому к парадоксам. Новые же понятия с самого начала учитывают конечность скорости света и устраняют эти парадоксы.

В старой физике вводилось априорное (не основанное на опыте) понятие абсолютной одновременности. Рассмотрим один из парадоксов, к которым это понятие приводит. Пусть мы имеем две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, причем в некоторый момент времени начала координат их совпадают. Предположим, что в этот момент времени в общем начале координат произошла световая вспышка, и рассмотрим движение фронта волны с точки зрения обеих систем отсчета. С точки зрения первой системы фронт волны в каждый момент времени есть шар с центром в начале координат первой системы. Но то же самое можно утверждать и с точки зрения второй системы: там фронт волны в каждый момент времени есть шар с центром в начале координат второй системы. Между тем оба начала координат совпадали только в начальный момент времени, а потом разошлись; у шара же не может быть двух разных центров. Рассуждения эти используют, с одной стороны, принцип относительности, т. е. тот факт, что в двух системах, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, все явления происходят одинаково, и, с другой стороны, вытекающий из понятия поля принцип независимости скорости света от скорости источника. Но оба эти принципа совершенно бесспорны. В чем же тогда разъяснение парадокса?

Разъяснение состоит в том, что слова „в каждый момент времени" имеют в применении к первой и ко второй системе отсчета неодинаковый смысл. Парадокс возникает только, если понимать эти слова в смысле „в каждый момент единого абсолютного времени, общего для обеих систем". Существование такого „единого абсолютного времени" считалось само собою разумеющимся в старой физике, но отрицается в теории относительности. Как мы знаем, согласно теории относительности, время в одной системе отсчета не то же самое, что время в другой системе. Фронт волны в каждой системе отсчета определяется как *одновременное с точки зрения данной системы* положение тех точек, до которых дошло световое возмущение. А так как события, одновременные в одной системе отсчета, не будут одновременными в другой, то и фронт волны в первой системе отсчета будет состоять из других точек, чем во второй системе. Если мы для наглядности представим себе, что распространение световой волны происходит в некоторой разреженной среде (в газе), то фронт волны в первой системе будет проходить через другие частицы газа, чем во второй системе. Поэтому мы фактически будем иметь дело с разными фронтами волны, и неудивительно, что у них будут разные центры.

Приведенное здесь разъяснение парадокса с наглядностью показывает логическую необходимость отказа от понятий „абсолютное время" и „абсолютная одновременность".

Полвека назад, когда теория относительности только возникала, отказ этот многим казался чем-то почти неприемлемым, и со стороны создателя теории относительности Эйнштейна потребовалась большая научная смелость, чтобы прийти к убеждению в его необходимости. В настоящее же время мы принимаем этот отказ гораздо легче. Житейское понятие одновременности покрывается понятием квази-одновременности, в научных же вопросах, там, где мы имеем дело с большими расстояниями или с большими скоростями, необходимость уточнения понятия времени представляется совершенно естественной.

§ 13. Сравнение промежутков времени в движущихся системах отсчета. Явление Допплера

Пусть дана некоторая система отсчета (базис), которую мы будем принимать за неподвижную. Проследим с точки зрения этого базиса за ходом некоторого процесса в движущейся системе. В качестве такого процесса можно взять, например, равномерный ход часов, связанных с движущейся системой. Проследить за ходом часов, если они движутся, можно, скажем, заставив их ежесекундно испускать световые сигналы (или просто рассматривая издали показания их стрелок). Кроме того, нужно иметь на базисе такое устройство (скажем радиолокационное), которое бы непрерывно отмечало расстояние от базиса до движущихся часов. Тогда, отмечая по часам базиса моменты поступления „ежесекундных" световых сигналов и вводя каждый раз поправку на время прохождения сигнала от движущихся часов до базиса, мы можем определить моменты t_n испускания этих „ежесекундных" сигналов. Поправка эта вычисляется весьма просто.

Пусть $r(t)$ есть измеренное с базиса расстояние до движущихся часов, выраженное в функции времени t на базисе. Тогда величина t_n получается из непосредственно наблюденной величины t_n^* по формуле

$$t_n + \frac{r(t_n)}{c} = t_n^*. \tag{13.01}$$

Возникает вопрос, будут ли моменты времени t_n также ежесекундными? Другими словами, если на базисе имеются часы точно такого же устройства, как наблюдаемые с базиса движущиеся часы, то будут ли вычисляемые моменты времени t_n совпадать с секундами по часам на базисе?

Ответ на этот вопрос дается формулами преобразования Лоренца. Предположим, что часы удаляются от базиса по прямой, проходящей через начало координат на базисе. (Мы считаем, что прибор, регистрирующий сигналы, находится в начале координат.) Беря эту прямую за ось x и предполагая, что при $t=0$ часы проходили через начало, мы можем определить положение движущихся часов уравнениями

$$x = vt; \quad y = 0; \quad z = 0, \tag{13.02}$$

причем величина x будет также расстоянием r от базиса. Применение формулы (13.01) показывает, что секундный сигнал, воспринятый на базисе в момент t_n^*, был испущен в момент времени

$$t_n = \frac{t_n^*}{1 + \frac{v}{c}} \tag{13.03}$$

по часам базиса. Введем теперь по формулам преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{13.04}$$

систему отсчета, связанную с движущимися часами. Обратные формулы, как мы знаем, имеют вид

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13.05}$$

В штрихованной системе положение часов, подающих сигналы, будет $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, а моменты отправления сигналов будут

$$t'_n = n\tau, \tag{13.06}$$

где постоянная τ (зависящая только от устройства часов, но не от их движения) равна, скажем, 1 секунде. Следовательно, будет

$$t_n = \frac{n\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13.07}$$

С другой стороны, часы такого же устройства, имеющиеся на базисе, отбивают моменты времени $n\tau$. Таким образом, наблюдаемые с базиса движущиеся часы будут *отставать* по сравнению с часами на базисе. Определяемые по наблюдениям на базисе моменты отправления сигналов будут отстоять не на величину τ (одну секунду), а на бо̀льшую величину

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13.08}$$

Необходимо помнить, что этот результат получается уже после введения поправки на конечную скорость распространения сигналов. Непосредственно же наблюдаются моменты прибытия сигналов на базис, равные

$$t_n^* = \left(1 + \frac{v}{c}\right) t_n = n\tau \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \tag{13.09}$$

и отстоящие друг от друга на величину

$$\Delta t^* = \tau \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}. \tag{13.10}$$

Для простоты выкладок мы рассматривали тот случай, когда движущиеся часы удаляются прямо от наблюдателя (т. е. от прибора, регистрирующего посылаемые ими световые сигналы). Рассмотрим теперь более общий случай, когда траектория часов не проходит через прибор. Пусть прибор попрежнему расположен в начале координат, а движение часов определяется, вместо (13.02), уравнениями

$$x = vt; \quad y = y_0; \quad z = z_0 \tag{13.11}$$

в системе отсчета, связанной с базисом, и уравнениями

$$x' = 0; \quad y' = 0; \quad z' = 0 \tag{13.12}$$

в системе отсчета, связанной с часами.

Переход от одной системы отсчета к другой дается попрежнему преобразованием Лоренца (13.04)—(13.05). Поэтому связь между t' и t, а значит и формула (13.08), дающая отставание движущихся часов, остается без изменения. Изменится только связь между t^* и t, т. е. формула для пересчета от момента приема к моменту испускания сигнала. А именно, мы будем иметь, вместо (13.09)

$$t_n^* = t_n + \frac{1}{c}\sqrt{v^2 t_n^2 + y_0^2 + z_0^2}. \tag{13.13}$$

Считая промежуток времени τ малым, мы можем положить

$$\Delta t^* = \frac{dt^*}{dt}\Delta t = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)\Delta t, \tag{13.14}$$

где

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{v^2 t}{\sqrt{v^2 t^2 + y_0^2 + z_0^2}} \tag{13.15}$$

есть радиальная составляющая скорости часов в момент испускания ими сигнала. Из (13.08) и (13.14) получаем

$$\Delta t^* = \tau \cdot \frac{c + v_r}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{13.16}$$

Эта формула заменяет (13.10) для общего случая.

Отличие Δt^* от τ является выражением эффекта Допплера, который, как известно, состоит в следующем. Если в движущейся системе происходит периодический процесс с периодом τ, то регистрируемый в некоторой точке неподвижной системы период Δt^* оказывается большим чем τ, когда система удаляется от этой точки, и меньшим чем τ, когда система приближается к ней. Формула (13.16) дает релятивистское выражение эффекта Допплера для случая распространения света в свободном пространстве. Классическая дорелятивистская формула получится, если не делать различия между t' и t и заменить в (13.14) Δt на τ (это вносит относительную ошибку порядка v^2/c^2).

Заметим, что исторически первое определение скорости света в свободном пространстве, произведенное в 1675 г. Олафом Ремером, было, в сущности, основано на эффекте Допплера. Движущимися часами служила система спутников Юпитера, а наблюдавшийся периодический процесс состоял в периодических затмениях спутников. Примерно на протяжении половины земной орбиты Земля приближается к Юпитеру, и тогда $v_r < 0$, на протяжении другой половины Земля удаляется от Юпитера, и тогда $v_r > 0$. Применяя вместо (13.16) упрощенную формулу (13.14), можно взять в качестве Δt средний (за год) наблюдаемый промежуток времени между двумя затмениями. Тогда на той части земной орбиты, где $v_r < 0$, будет $\Delta t^* < \Delta t$, т. е. будет наблюдаться опережение затмений по сравнению со средним, а на той части, где $v_r > 0$, будет $\Delta t^* > \Delta t$, т. е. будет наблюдаться запаздывание. Так как скорость v_r известна из теории движения Земли и Юпитера, то соотношение (13.14) дает возможность вычислить скорость света c. Ремер получил таким путем значение c равное $3{,}1 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, т. е. чрезвычайно близкое к принятому теперь значению $3{,}0 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, полученному гораздо более точными методами.

Подчеркнем еще раз, что в теории явления Допплера учитываются два фактора: во-первых, пересчет от момента t^* прибытия к моменту t испускания светового сигнала и, во-вторых, связь между временем t в системе отсчета, в которой сигналы регистрируются, и временем t' в системе отсчета, связанной с телом, которое эти сигналы испускает. Первый из этих факторов (пересчет от t^* к t) вводит множитель, зависящий от радиальной составляющей скорости; этот фактор учитывался уже в дорелятивистской теории. Второй фактор (пересчет от t^* к t) вводит множитель, зависящий от абсолютной величины скорости; он основан на преобразовании Лоренца и является характерным для теории относительности.

§ 14. Сличение показаний часов в движущихся системах отсчета

В предыдущем параграфе мы рассмотрели способ сравнения промежутков времени в разных системах отсчета, основанный на использовании световых сигналов, с учетом времени их распространения. Принципиально возможен, однако, и другой способ, в котором сравниваются показания часов, проходящих в непосредственной близости друг от друга.

Представим себе ряд часов, расположенных на одной прямой, принадлежащих одному базису, неподвижных в нем и заранее синхронизованных друг с другом. Пусть мимо них движутся часы A. Чтобы проследить за ходом часов A, достаточно сличить их показания с показаниями тех часов базиса, мимо которых они в данный момент проходят. Очевидно, достаточно иметь на базисе двое часов; можно представить себе базис состоящим из этих двоих часов, соединенных твердым стержнем.

В системе отсчета базиса координаты неподвижных часов и движущихся часов A будут

$$\left.\begin{aligned} &x = a \text{ (первые часы базиса)},\\ &x = b \text{ (вторые часы базиса)},\\ &x = vt \text{ (часы } A).\end{aligned}\right\} \tag{14.01}$$

По формулам преобразования Лоренца (13.04) — (13.05) мы можем ввести систему отсчета, связанную с часами A. В ней координаты часов базиса и часов A будут

$$\left.\begin{aligned} &x = -vt' + a' \text{ (первые часы базиса)},\\ &x' = -vt' + b' \text{ (вторые часы базиса)},\\ &x' = 0 \qquad\quad \text{(часы } A),\end{aligned}\right\} \tag{14.02}$$

где постоянные a' и b' связаны с a и b соотношениями

$$a' = a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}; \quad b' = b\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{14.03}$$

Не становясь на точку зрения какой-либо из этих двух систем отсчета, мы запишем следующие объективные данные: во-первых, показания часов A и первых часов базиса, когда они приходились друг против друга, и, во-вторых, показания часов A и вторых часов базиса, когда друг против друга приходились они. Обозначая показания часов A через t_1' и t_2' и соответственные показания первых и вторых часов базиса через t_1 и t_2, будем иметь, вследствие (14.01) и (14.02):

$$\left.\begin{aligned} &t_1 = \frac{a}{v}; \quad t_1' = \frac{a'}{v},\\ &t_2 = \frac{b}{v}; \quad t_2' = \frac{b'}{v},\end{aligned}\right\} \tag{14.04}$$

причем, вследствие (14.03),

$$t_1' = t_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}; \quad t_2' = t_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{14.05}$$

Эти данные позволяют нам судить, с одной стороны, о ходе часов A, наблюдаемом с базиса, и, с другой стороны, о ходе часов базиса, наблюдаемом в системе отсчета, связанной с A. Под ходом процесса, наблюдаемым в той или иной системе отсчета, мы разумеем ход процесса, выраженный через то время, которое соответствует присущей данной системе отсчета синхронизации.

Величины t_1 и t_2 представляют показания разных часов базиса; но так как в системе отсчета базиса эти часы синхронизованы, то, употребляя слово „когда" в смысле *этой* синхронизации, мы можем утверждать, что когда вторые часы показывали время t_2, то и первые часы показывали то же время t_2. Поэтому разность $t_2 - t_1$ представляет просто время, протекшее в системе отсчета базиса, пока показания часов A изменились на $t'_2 - t'_1$. Таким образом, ход часов A, наблюдаемый с базиса, определяется уравнением

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{14.06}$$

Так как $|t'_2 - t'_1| < |t_2 - t_1|$, то часы A, наблюдаемые с базиса, будут *отставать*. Полагая $t'_2 - t'_1 = \tau$, $t_2 - t_1 = \Delta t$, мы получим совпадение с формулой (13.08).

Рассмотрим теперь ход часов базиса, наблюдаемый в системе отсчета, связанной с A. Чтобы судить о ходе часов, необходимо проследить за показаниями *одних и тех же* часов, в данном случае — за показаниями либо первых, либо вторых часов базиса. Остановимся для определенности на вторых часах. Для них мы имеем только одно *непосредственное* показание (когда они находились против часов A, показывавших время t'_2, сами они показывали время t_2). Другое показание вторых часов нужно *вычислить* по имеющимся данным. Поставим поэтому вопрос: где были вторые часы и сколько они показывали, когда против часов A находились первые часы? Существенно помнить, что слова „где“ и „когда“ употребляются теперь в смысле системы отсчета, связанной с A (в смысле штрихованной системы). На этот вопрос легко ответить. Когда против A находились первые часы, часы A показывали время $t'_1 = \frac{a'}{v}$, вторые же часы находились тогда (согласно 14.02) в точке $x' = b' - a'$. Показание t вторых часов получится подстановкой значений $t' = t'_1$ и $x' = b' - a'$ в формулу преобразования Лоренца (13.05). Мы будем иметь

$$t = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}(b' - a')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t_1 + \frac{v}{c^2}(b - a) \tag{14.07}$$

или

$$t = t_1 + (t_2 - t_1)\frac{v^2}{c^2}. \tag{14.08}$$

(Показание t вторых часов уже не будет совпадать с показанием t_1 первых часов, потому что одновременность понимается теперь в смысле системы отсчета, связанной с A, а не с базисом). Вычисленное по формуле (14.08) показание вторых часов вместе с непосредственно наблюденным их показанием t_2 позволяет определить ход вторых часов в системе отсчета, связанной с часами A. Мы имеем

$$t_2 - t = (t_2 - t_1)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \tag{14.09}$$

откуда окончательно

$$t_2 - t = (t'_2 - t'_1)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (14.10)$$

Таким образом, в системе отсчета A движущиеся относительно нее часы на базисе опять-таки *отстают*, и мы имеем относительно обеих систем отсчета полную взаимность.

Иногда говорят, что в движущейся системе время идет медленнее, чем в неподвижной. Такая формулировка, однако, неправильна, так как, на основании принципа относительности, всегда можно поменять ролями движущуюся и неподвижную систему, и тогда получилось бы противоречие.

Характер возникающих здесь недоразумений легче всего пояснить на математическом примере (который, впрочем, имеет прямое отношение к данному вопросу). Мы видели в § 10, что для преобразования Лоренца

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1. \qquad (14.11)$$

Но и для обратного преобразования мы имеем

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1. \qquad (14.12)$$

Если забыть про то, что в (14.11) производная по t берется при постоянных x, y, z, а в (14.12) производная по t' берется при постоянных x', y', z', то может показаться странным, что $\frac{\partial t}{\partial t'}$ не равно обратной величине $\frac{\partial t'}{\partial t}$, а равно ей самой. Ясно, однако, что никакого „парадокса" тут нет.

Возвращаясь к физической стороне дела, можно сказать, что в данной задаче речь идет не о „ходе времени" в разных системах отсчета, а об описании хода некоторого *локализованного процесса* в разных системах отсчета. Пусть процесс локализован в точке, неподвижной в нештрихованной системе отсчета (постоянные x, y, z). Тогда из $\frac{\partial t'}{\partial t} > 1$ мы заключаем, что длительность (или период) процесса в „своей" (нештрихованной) системе отсчета будет меньше, чем во всякой другой (штрихованной) системе, которая относительно „своей" системы движется. Если же процесс локализован в точке с постоянными координатами x', y', z', то „своей" системой будет штрихованная, и мы будем иметь $\frac{\partial t}{\partial t'} > 1$, но по существу заключение не изменится.

Если длительность процесса в „своей" системе отсчета была $d\tau$ то в другой системе отсчета, движущейся относительно нее со скоростью V, она будет равна $dt > d\tau$, причем

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, dt. \qquad (14.13)$$

Здесь V есть скорость, входящая в преобразование Лоренца, связывающее обе рассматриваемые системы отсчета. По абсолютной величине V равно той скорости v, с которой движется точка, где локализован процесс, и составляющие которой равны

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (14.14)$$

Поэтому мы можем, вместо (14.13), написать

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \qquad (14.15)$$

Нетрудно видеть, что это выражение является инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца. Величину $d\tau$ можно рассматривать, как дифференциал „собственного времени" τ, определяемого уравнением

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \qquad (14.16)$$

(Здесь принято, что при $t = 0$ будет $\tau = 0$). Если скорость v — постоянная, то τ есть измеренная в „своей" системе отсчета длительность процесса, связанного с движущейся точкой (отсюда название „собственное время"). Если же скорость v — переменная, то τ не имеет прямого физического смысла, а представляет вспомогательную математическую величину, которой удобно пользоваться ввиду ее инвариантности по отношению к преобразованию Лоренца. Название „собственного времени" сохраняется за величиной τ и в случае переменной скорости v, хотя в этом случае его нельзя понимать буквально.

То обстоятельство, что в случае ускоренного движения величину τ нельзя толковать, как время, показываемое часами, движущимися с заданной скоростью, вытекает из теории тяготения Эйнштейна; в этой теории для времени, показываемого часами, дается другое выражение (см. §§ 61 и 62). Что касается обычной теории относительности, то она позволяет делать в общем виде (т. е. не вникая в сущность происходящих процессов) только те заключения, которые относятся к *неускоренному* движению. Только случай неускоренного движения сводится к рассмотрению разных инерциальных систем отсчета (что, собственно, и составляет предмет теории относительности). Поэтому, в случае ускоренного движения, толкование величины τ, как времени, показываемого движущимися часами, из теории относительности вытекать не может. Такое толкование могло бы быть выдвинуто в качестве отдельного предположения, однако это предположение не оправдывается. Вообще же никакая теория не может, не входя в детали устройства часов, предсказать, как будут себя вести эти часы в условиях, когда они подвергаются толчкам или произвольному ускорению. Этого не может сделать и теория тяготения; упомянутое выражение для времени, показываемого ускоренно движущимися часами, относится к тому случаю, когда это ускорение вызвано полем тяготения.

§ 15. Сравнение расстояний и длин в движущихся системах отсчета

Если предмет в данной системе отсчета неподвижен, то определение его геометрических размеров и формы необязательно должно происходить мгновенно. Неподвижный предмет можно обмерить постепенно, отметив последовательно положение разных его точек. Напротив того, чтобы судить о размерах и форме движущегося предмета, совершенно необходимо, чтобы все отмеченные положения разных его точек относились к одному моменту времени: иначе мы получим искаженную картину.

Отсюда ясно, что понятие о размерах и форме движущегося предмета тесно связано с понятием об одновременности. Мы уже видели, что понятие одновременности не является абсолютным, а зависит от системы отсчета; поэтому мы должны ожидать, что размеры и форма предмета также не являются абсолютными, а должны задаваться по отношению к определенной системе отсчета.

В качестве простейшего примера рассмотрим длину стержня, измеряемую в разных системах отсчета.

Пусть две системы отсчета движутся друг относительно друга в направлении их общей оси x. Координаты и время в них связаны преобразованием Лоренца, которое мы выпишем здесь еще раз. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; & t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y; & z' &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (15.01)$$

Пусть направление стержня совпадает с направлением относительной скорости движения обеих систем отсчета (с осью X) и пусть стержень неподвижен в нештрихованной системе. В этой системе отсчета координаты обоих концов стержня будут все время

$$\left.\begin{aligned} &x = a; \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{(первый конец стержня)}, \\ &x = b, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{(второй конец стержня)}, \end{aligned}\right\} \qquad (15.02)$$

и если $b > a$, то длина стержня l будет

$$l = b - a. \tag{15.03}$$

В движущейся относительно стержня штрихованной системе отсчета координаты его концов будут

$$\left.\begin{aligned} x' &= -vt' + a', \quad y' = 0, \quad z' = 0 \quad \text{(первый конец)},\\ x' &= -vt' + b', \quad y' = 0, \quad z' = 0 \quad \text{(второй конец)}, \end{aligned}\right\} \tag{15.04}$$

где

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad b' = b\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{15.05}$$

Длина стержня есть расстояние между одновременными положениями его концов. В штрихованной системе отсчета одновременность понимается в смысле одинаковых значений t', а расстояние выражается по обычной формуле через разности штрихованных координат. Поэтому в штрихованной системе длина стержня будет равна

$$l' = b' - a'. \tag{15.06}$$

Отсюда

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{15.07}$$

Таким образом, в той системе отсчета, в которой стержень имеет (в направлении своей длины) скорость v, стержень оказывается укороченным: длина его l' будет меньше той длины l, какая получается для неподвижного стержня.

Если бы мы ввели в рассмотрение поперечные размеры стержня (в направлениях осей y и z, перпендикулярных к скорости), то мы убедились бы, что эти поперечные размеры не меняются. Следовательно, объем стержня уменьшается в той же пропорции, как его продольные размеры. То же заключение остается справедливым для тела произвольной формы. Если V есть объем тела в той системе отсчета, где оно неподвижно, то в системе, относительно которой тело движется со скоростью v, объем его V' будет равен

$$V' = V \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{15.08}$$

Пусть имеются два одинаковых параллельных стержня, относительная скорость которых параллельна их длине. Тогда в системе отсчета, связанной с первым стержнем, второй будет представляться укороченным и наоборот. Положение вещей здесь то же, как в примере с часами; так же как и там, здесь нет никакого парадокса. Различие в получаемых значениях длины происходит от различия в определении одновременности. Положения концов стержня, которые были одновременными в одной системе отсчета, уже не будут таковыми в другой системе отсчета (там они будут только квазиодновременными). Пусть x_a есть положение конца A в момент времени t_a, а x_b — положение конца B в момент времени t_b. Соответствующие величины в другой системе отсчета мы обозначим теми же буквами со штрихами. В силу инвариантности пространственного интервала мы имеем

$$(x_a - x_b)^2 - c^2(t_a - t_b)^2 = (x'_a - x'_b)^2 - c^2(t'_a - t'_b)^2. \quad (15.09)$$

Если мы положим здесь $t_a = t_b$, то будет $t'_a \neq t'_b$ и, следовательно,

$$|x_a - x_b| < |x'_a - x'_b|. \quad (15.10)$$

Слева стоит длина стержня в нештрихованной системе; величина же в правой части будет длиной стержня в штрихованной системе, если он там неподвижен (ибо тогда необязательно относить x'_a и x'_b к одному и тому же моменту времени t', а можно брать и $t'_a \neq t'_b$).

Если же мы положим $t'_a = t'_b$, то будет $t_a \neq t_b$ и, следовательно,

$$|x_a - x_b| > |x'_a - x'_b|. \quad (15.11)$$

Но теперь левая часть есть длина стержня в той системе отсчета, где он неподвижен, тогда как правая часть есть длина в произвольной штрихованной системе.

В этих рассуждениях симметрия формул относительно штрихованной и нештрихованной системы отсчета очевидна с самого начала; поэтому и самые рассуждения могут показаться тривиальными. Мы привели их для того, чтобы еще раз обратить внимание на тесную связь между понятиями одновременности и длины.

§ 16. Относительная скорость

В дорелятивистской механике относительная скорость двух тел определялась как разность их скоростей. Пусть измеренная в определенной системе отсчета скорость одного тела есть $\mathbf{u}$, а другого $\mathbf{v}$. Тогда скорость второго тела относительно первого полагалась равной $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Такое определение является инвариантным относительно преобразования Галилея, но не относительно преобразования Лоренца. Поэтому оно в теории относительности не годится и должно быть заменено другим. То обстоятельство, что выражение $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ не имеет физического смысла, становится очевидным из рассмотрения следующего примера. Пусть скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ направлены в противоположные стороны, а по абсолютной величине близки к скорости света (или равны ей). Тогда „скорость“ $\mathbf{w}$ будет по абсолютной величине близка (или равна) удвоенной скорости света, что явно нелепо.

Мы дадим поэтому новое определение относительной скорости, согласное с требованиями теории относительности и имеющее прямой физический смысл. Пусть в некоторой системе отсчета скорость первого тела есть $\mathbf{u}$, а второго тела $\mathbf{v}$. Мы можем ввести такую (штрихованную) систему отсчета, в которой скорость одного из тел (например первого) равнялась бы нулю. Тогда скорость $\mathbf{v}'$ второго тела в этой системе отсчета мы и будем толковать, как относительную скорость второго тела по отношению к первому. Мы увидим, что абсолютная величина скорости $\mathbf{v}'$ зависит от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ симметричным образом. Поэтому относительная скорость двух тел не зависит от того, которое из них принимается (в новой системе отсчета) за неподвижное.

Для пояснения физического смысла нашего определения относительной скорости рассмотрим следующий пример. Предположим, что мы наблюдаем с земли два самолета. Пусть скорость первого самолета равна $\mathbf{u}$, а второго $\mathbf{v}$. Предположим теперь, что первый самолет снабжен радиолокационной установкой, позволяющей измерять скорость второго самолета относительно первого. Измеренная таким образом скорость и будет той относительной скоростью, которая отвечает нашему определению.

Нам нужно выразить эту относительную скорость через составляющие скоростей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (через скорости самолетов, наблюдаемые с земли).

Для этого напишем общие формулы преобразования Лоренца, выведенные в § 10. Мы имеем, для прямого преобразования,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{V}t + (a_{00} - 1)\frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r} - V^2 t), \\ t' &= a_{00}\left(t - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{16.01}$$

и для обратного преобразования

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{V}t' + (a_{00} - 1)\frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}' + \mathbf{V}^2 t'), \\ t &= a_{00}\left(t' + \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{16.02}$$

где мы воспользовались обозначением (10.15) и положили

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{16.03}$$

Чтобы в штрихованной системе первый самолет (имевший относительно земли скорость $\mathbf{u}$) был неподвижен, мы должны положить

$$V_x = u_x; \qquad V_y = u_y; \qquad V_z = u_z. \tag{16.04}$$

Скорость второго самолета, измеренная с земли, равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{16.05}$$

тогда как скорость того же второго самолета, измеренная с первого, будет равна

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}. \tag{16.06}$$

Соотношения между этими величинами получатся дифференцированием формул (16.01)—(16.02). Мы будем иметь

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u} + (a_{00} - 1)\frac{\mathbf{u}}{u^2}\left((\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - u^2\right)}{a_{00}\left(1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)}, \tag{16.07}$$

а также

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u}' + (a_{00} - 1)\frac{\mathbf{u}}{u^2}\left((\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}') + u^2\right)}{a_{00}\left(1 + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'}{c^2}\right)}, \tag{16.08}$$

где, согласно (16.03) и (16.04),

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{16.09}$$

Уравнение (16.08) представляет решение уравнения (16.07) относительно $\mathbf{v}$. Так как преобразование Лоренца линейно относительно координат и времени, то штрихованные составляющие скорости v'_x, v'_y, v'_z представляют дробно-линейные функции от нештрихованных составляющих v_x, v_y, v_z.

Составим выражение для квадрата вектора $\mathbf{v}'$, т. е. для квадрата относительной скорости первого и второго самолетов. Мы будем иметь

$$v'^2 = \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^2}. \tag{16.10}$$

Как мы уже отмечали, это выражение симметрично относительно $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Проверим, что из неравенств $u^2 < c^2$, $v^2 < c^2$ вытекает неравенство $v'^2 < c^2$, каковы бы ни были направления векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. В самом деле, мы имеем

$$1 - \frac{v'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^2}. \tag{16.11}$$

В силу условий $u^2 < c^2$, $v^2 < c^2$ правая часть здесь всегда положительна; следовательно, будет положительной и левая часть, откуда $v'^2 < c^2$. В предельном случае, когда одна из скоростей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ равна скорости света, относительная скорость $\mathbf{v}'$ также будет равна скорости света, что соответствует основному предположению, на котором построена вся теория относительности.

Заметим, что квадрат относительной скорости является инвариантом по отношению к преобразованию Лоренца. Это значит, что если мы в формулу (16.10) подставим вместо скоростей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ обоих самолетов относительно земли их скорости $\mathbf{u}''$, $\mathbf{v}''$ относительно какой-нибудь третьей системы отсчета (скажем, относительно третьего самолета), то хотя $\mathbf{u}''$, $\mathbf{v}''$ не будут равны $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, но всё выражение (16.10) для v'^2 примет прежнее значение. Очевидно, так и должно быть по самому смыслу величины v'^2 как квадрата относительной скорости.

Формула (16.07) упрощается, если в данной системе отсчета скорости $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ параллельны или если они перпендикулярны. В первом случае мы получим

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}} \qquad (\text{при} \quad [\mathbf{u}\times\mathbf{v}] = 0), \tag{16.12}$$

а во втором случае мы будем иметь

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \mathbf{u} \qquad [\text{при } (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = 0]. \tag{16.13}$$

Формула (16.12) (в которой скорость $\mathbf{u}$ вводится обычно с обратным знаком) носит название эйнштейновой теоремы сложения скоростей.

В общем случае можно высказать следующее утверждение. Если рассматривать „пространство скоростей“ как пространство Лобачевского, то правило сложения скоростей в теории относительности совпадает с правилом сложения векторов в геометрии Лобачевского. Это утверждение будет доказано в следующем параграфе.

§ 17. Пространство скоростей Лобачевского — Эйнштейна

Рассмотрим относительную скорость двух тел, движущихся с бесконечно близкими скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Деленную на скорость света c абсолютную величину этой относительной скорости мы обозначим через ds. Положив в выражении (16.10) $\mathbf{u} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, получим, по разделении на c^2,

$$ds^2 = \frac{c^2 (d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v}\times d\mathbf{v}]^2}{(c^2 - v^2)^2}, \tag{17.01}$$

или иначе

$$ds^2 = \frac{(c^2 - v^2)(d\mathbf{v})^2 + (\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v})^2}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17.02}$$

По физическому смыслу выражения (17.01), пропорционального квадрату бесконечно малой относительной скорости, оно является инвариантом по отношению к преобразованию Лоренца. Это можно проверить и непосредственно, подставив вместо величин v_x, v_y, v_z их выражение из (16.08) в виде дробно-линейных функций от v'_x, v'_y, v'_z: тогда ds^2 будет той же функцией от v'_x, v'_y, v'_z, dv'_x, dv'_y, dv'_z, как от v_x, v_y, v_z, dv_x, dv_y, dv_z.

Выражение (17.01) или (17.02) мы будем рассматривать, как квадрат элемента длины в некотором пространстве скоростей. Это есть то пространство, в котором строится в обычной механике годограф скоростей. Пространство это обладает всеми свойствами пространства Лобачевского, причем деленные на c составляющие скорости v_x, v_y, v_z являются в нем так называемыми координатами Бельтрами (см. книгу В. Ф. Кагана [9], формула CVIII на стр. 453). Свойства пространства Лобачевского могут быть выведены из рассмотрения выражения (17.01).

Кривая в пространстве Лобачевского может быть задана путем задания величин v_x, v_y, v_z как функций от некоторого параметра p. Если концам кривой соответствуют значения p_1 и p_2, то длина дуги кривой определится формулой

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{2F}\,dp, \tag{17.03}$$

где

$$F = \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{c^2 - v^2} + \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{(c^2 - v^2)^2}, \tag{17.04}$$

причем точкой обозначены производные по параметру p. Найдем уравнения прямой Лобачевского, т. е. кратчайшей кривой, соединяющей точки p_1, p_2. Для этого нужно приравнять нулю вариацию интеграла (17.03), т. е. составить уравнения Лагранжа с функцией Лагранжа

$$L = \sqrt{2F}. \tag{17.05}$$

Эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_x} - \frac{\partial L}{\partial v_x} = 0 \qquad \text{и т. д.} \tag{17.06}$$

или

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\sqrt{2F}}\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x}\right) - \frac{1}{\sqrt{2F}}\frac{\partial F}{\partial v_x} = 0 \qquad \text{и т. д.} \tag{17.07}$$

Параметр p оставался до сих пор произвольным. Мы его выберем так, чтобы было

$$\frac{dF}{dp} = 0, \qquad F = \text{const}. \tag{17.08}$$

При таком выборе параметра p уравнения (17.07) будут равносильны следующим:

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} - \frac{\partial F}{\partial v_x} = 0 \qquad \text{и т. д.} \tag{17.09}$$

Так как функция F не содержит явно параметра p, то будет

$$\dot{v}_x\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} + \dot{v}_y\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_y} + \dot{v}_z\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_z} - F = \text{const}, \tag{17.10}$$

т. е. величина (17.10) будет интегралом уравнений Лагранжа. Но F есть однородная квадратичная функция от $\dot{v}_x$, $\dot{v}_y$, $\dot{v}_z$; поэтому величина (17.10) равна F и, следовательно, условие (17.08) будет следствием уравнений (17.09).

Выпишем уравнения (17.09) подробнее и найдем их интегралы. Мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} = \frac{\dot{v}_x}{c^2 - v^2} + v_x \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{(c^2 - v^2)^2}, \tag{17.11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_x} = v_x \left(\frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{2(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{(c^2 - v^2)^3} \right) + \dot{v}_x \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17.12}$$

Введем вектор $\mathbf{w}$ с составляющими

$$w_x = \frac{\dot{v}_x}{c^2 - v^2}; \quad w_y = \frac{\dot{v}_y}{c^2 - v^2}; \quad w_z = \frac{\dot{v}_z}{c^2 - v^2}. \tag{17.13}$$

Формулы (17.11) и (17.12) напишутся тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} = w_x + v_x \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c^2 - v^2}; \tag{17.14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_x} = v_x \left(w^2 + 2 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}{c^2 - v^2} \right) + w_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}). \tag{17.15}$$

Дифференцируя (17.14) по параметру p и выражая $\dot{\mathbf{v}}$ через $\mathbf{w}$, получим

$$\frac{d}{dp} \frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} = \dot{w}_x + v_x \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}})}{c^2 - v^2} + v_x \left(w^2 + 2 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}{c^2 - v^2} \right) + w_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}). \tag{17.16}$$

Подставляя (17.15) и (17.16) в уравнение Лагранжа (17.09), убедимся, что они приводятся к виду

$$\dot{w}_x + v_x \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}})}{c^2 - v^2} = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{17.17}$$

Легко видеть, что алгебраическим следствием трех уравнений (17.17) является равенство $(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}}) = 0$, из которого следует, что уравнения (17.17) равносильны следующим:

$$\dot{w}_x = 0, \quad \dot{w}_y = 0, \quad \dot{w}_z = 0, \tag{17.18}$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{w}} = 0. \tag{17.19}$$

Таким образом, уравнения Лагранжа приводятся к требованию постоянства вектора $\mathbf{w}$, определяемого формулами (17.13). Но если вектор $\mathbf{w}$, пропорциональный $\dot{\mathbf{v}}$, постоянен, то будет постоянно и векторное произведение

$$[\mathbf{w} \times \mathbf{v}] = \text{const}. \tag{17.20}$$

Это дает еще два линейно-независимых интеграла уравнений Лагранжа.

Из найденных интегралов следует, что уравнения прямой Лобачевского в пространстве скоростей имеют вид *линейных* соотношений между составляющими скорости v_x, v_y, v_z. Мы знаем, что преобразование Лоренца соответствует дробно-линейной подстановке между составляющими скорости. Поэтому очевидно, что после преобразования линейные соотношения остаются линейными.

Определим длину отрезка прямой Лобачевского, соединяющей две точки $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$, и найдем связь между этой длиной и относительной скоростью тел, движущихся со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Так как координаты точек на отрезке связаны линейными соотношениями, то их можно представить параметрически в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \qquad (0 \leqslant \mu \leqslant 1). \tag{17.21}$$

Подставляя это значение $\mathbf{v}$ в (17.04), получим

$$2F = \frac{c^2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}{(c^2 - v^2)^2}\,\dot{\mu}^2. \tag{17.22}$$

Полагая для краткости

$$a = \sqrt{c^2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}, \tag{17.23}$$

мы получим по формуле (17.03) следующее выражение для длины отрезка:

$$s = \int_0^1 \frac{a\,d\mu}{c^2 - v^2}. \tag{17.24}$$

Этот интеграл проще всего вычисляется при помощи подстановки

$$\mu = \frac{(c^2 - v_1^2)\,\xi}{c^2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - v_1^2)\,\xi}, \tag{17.25}$$

которая дает

$$s = \int_0^1 \frac{ab\,d\xi}{b^2 - a^2\xi^2} = \frac{1}{2}\lg\frac{b + a}{b - a}, \tag{17.26}$$

где

$$b = c^2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2. \tag{17.27}$$

Коэффициенты в подстановке (17.25) подобраны так, чтобы пределы по ξ были 0 и 1 и чтобы знаменатель в (17.26) не содержал первой степени ξ. Отсюда получаем

$$\frac{a}{b} = \operatorname{th} s, \tag{17.28}$$

что после возведения в квадрат и умножения на c^2 можно написать в виде

$$\frac{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2}\right)^2} = c^2 \operatorname{th}^2 s. \tag{17.29}$$

Сравнивая эту формулу с (16.10), мы убеждаемся. что слева в ней стоит квадрат относительной скорости. Таким образом, относительная скорость $\mathbf{v}'$ связана с длиной s отрезка прямой Лобачевского соотношением

$$|\mathbf{v}'| = c \operatorname{th} s. \tag{17.30}$$

Предположим, что скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ одинаково направлены. Сопоставляя их абсолютным величинам отрезков прямой Лобачевского, положим

$$v_1 = c \operatorname{th} s_1; \qquad v_2 = c \operatorname{th} s_2. \tag{17.31}$$

Отрезок прямой Лобачевского, соответствующий относительной скорости, будет равен разности отрезков s_2 и s_1. Поэтому относительная скорость будет равна

$$v' = c \operatorname{th}(s_2 - s_1) = c \frac{\operatorname{th} s_2 - \operatorname{th} s_1}{1 - \operatorname{th} s_2 \operatorname{th} s_1} \tag{17.32}$$

или

$$v' = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_2 v_1}{c^2}}. \tag{17.33}$$

Это есть эйнштейнова формула сложения (в нашем случае — вычитания) скоростей.

Рассмотрим теперь угол между относительными скоростями двух тел. Если скорости берутся относительно точки, принимаемой за неподвижную, то косинус угла определяется по обычной формуле

$$\cos(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{|v_1| \cdot |v_2|}. \tag{17.34}$$

Но если скорости берутся относительно точки, которая сама движется со скоростью $\mathbf{u}$, то угол между относительными скоростями определится по более сложной формуле, которую легко получить из следующих соображений. Произведем преобразование Лоренца, после которого точка, двигавшаяся со скоростью $\mathbf{u}$, может рассматриваться как неподвижная, и применим затем обычную формулу (17.34). Мы получим тогда

$$\cos\alpha = \cos(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2') = \frac{\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2'}{|v_1'| \cdot |v_2'|}, \tag{17.35}$$

где $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ — скорости тел после преобразования Лоренца [эти скорости получаются из (16.07) после замены $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}_1$ и на $\mathbf{v}_2$]. Выразив $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, мы получим после несложных выкладок

$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}][\mathbf{v}_2 \times \mathbf{u}]}{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}]^2} \cdot \sqrt{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_2 \times \mathbf{u}]^2}}. \tag{17.36}$$

Но это есть выражение для косинуса угла треугольника в пространстве Лобачевского (угол при вершине $\mathbf{u}$ в треугольнике с вершинами в точках $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$).

В самом деле, наше исходное выражение (17.01) для квадрата элемента длины в пространстве Лобачевского имеет вид

$$ds^2 = \frac{c^2 (d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}]^2}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17.37}$$

Это выражение соответствует „смещению“ $d\mathbf{v}$, исходящему из „точки“ $\mathbf{v}$. Для смещения $\delta\mathbf{v}$, исходящего из той же точки, мы имеем

$$\delta s^2 = \frac{c^2 (\delta \mathbf{v})^2 - [\mathbf{v} \times \delta\mathbf{v}]^2}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17.38}$$

Косинус угла между смещениями мы можем определить инвариантным образом по формуле

$$ds\, \delta s \cos\alpha = \frac{c^2 d\mathbf{v}\, \delta\mathbf{v} - [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}][\mathbf{v} \times \delta\mathbf{v}]}{(c^2 - v^2)^2} \tag{17.39}$$

(эту формулу можно рассматривать, как определение угла в геометрии Лобачевского). Если мы теперь будем в (17.36) писать $\mathbf{v}$ вместо $\mathbf{u}$ и рассмотрим смещения

$$d\mathbf{v} = \varepsilon \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}); \qquad \delta\mathbf{v} = \eta \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}) \tag{17.40}$$

вдоль двух сторон треугольника, исходящих из вершины $\mathbf{v}$, то получаемое из (17.39) выражение для $\cos\alpha$ совпадет с (17.36).

Таким образом, угол между относительными скоростями можно рассматривать как угол в треугольнике Лобачевского. Если имеются три тела, движущихся со скоростями $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, то соответствующий треугольник будет иметь вершины в точках $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, причем относительные скорости будут соответствовать сторонам треугольника и углы между ними будут равны углам треугольника. Такое построение можно сделать и в нерелятивистской кинематике, но там геометрия пространства скоростей будет евклидовой, тогда как в теории относительности геометрия этого пространства будет геометрией Лобачевского.

Справедливость геометрии Лобачевского в пространстве скоростей может быть проверена на опыте. Мы имеем в виду опыт Физо по определению скорости света в движущейся среде и явление астрономической аберрации, открытое Брадлеем.

Опыт Физо имеет целью сравнение скорости распространения света в неподвижной и в движущейся среде. Распространение света в среде является некоторым сложным процессом, в котором принимают участие входящие в состав среды заряды и которому можно приписать скорость $\frac{c}{n}$, где n — показатель преломления среды. Если сама среда движется в направлении распространения света со скоростью v, то $w=\frac{c}{n}$ будет скоростью распространения света относительно среды. Скорость же w' относительно неподвижной системы отсчета получится по формуле Эйнштейна

$$w'=\frac{w+v}{1+\frac{w\cdot v}{c^2}}. \tag{17.41}$$

Подставляя сюда $w=\frac{c}{n}$ и сохраняя члены первого и нулевого порядка относительно c, мы получим

$$w'=\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=w+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right). \tag{17.42}$$

Множитель при v носит название коэффициента увлечения Френеля.

То обстоятельство, что этот множитель отличен от единицы, показывает, что при сложении скоростей нужно пользоваться именно эйнштейновой теоремой сложения, соответствующей геометрии Лобачевского, а не дорелятивистской формулой, соответствующей геометрии Евклида.

Явление астрономической аберрации состоит в принципе в том, что в двух движущихся друг относительно друга системах отсчета направления на одну и ту же звезду оказываются не совпадающими, а отличаются друг от друга на величину аберрации. Чтобы найти эту величину, нужно построить треугольник Лобачевского с вершинами в точках $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3=\mathbf{a}c$, где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости тел, с которыми связаны обе системы отсчета, а вектор $\mathbf{a}$ есть единичный вектор в направлении световой волны, идущей от звезды. В треугольнике $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ угол при вершине $\mathbf{v}_3$ будет равен нулю [см. ниже формулу (17.44)], сумма же углов при вершинах $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ будет меньше двух прямых на величину аберрации (если бы треугольник был евклидов, то эта сумма равнялась бы двум прямым).

Соответствующий тригонометрический расчет легко произвести на основании формулы

$$\cos\alpha_1=\frac{(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1)-\frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_1][\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1]}{\sqrt{(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)^2-\frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_1]^2}\cdot\sqrt{(\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1)^2-\frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1]^2}} \tag{17.43}$$

и двух других формул, получаемых из (17.43) круговой перестановкой значков 1, 2, 3.

Прежде всего, так как $v_3^2 = c^2$, то

$$\cos\alpha_3 = 1; \qquad \alpha_3 = 0. \tag{17.44}$$

Выберем систему отсчета так, чтобы было

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 0, \tag{17.45}$$

и положим

$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v; \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_1 = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_2 = v\cos\beta. \tag{17.46}$$

Относительная скорость двух систем отсчета будет

$$v_{12} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}. \tag{17.47}$$

По формуле (17.43) получаем

$$\cos\alpha_1 = \frac{v - c\cos\beta}{c - v\cos\beta}; \qquad \sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{c^2-v^2}\sin\beta}{c - v\cos\beta} \tag{17.48}$$

и аналогично

$$\cos\alpha_2 = \frac{v + c\cos\beta}{c + v\cos\beta}; \qquad \sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{c^2-v^2}\sin\beta}{c + v\cos\beta}. \tag{17.49}$$

Обозначая через δ величину аберрации, мы можем написать

$$\delta = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \pi - \alpha_1 - \alpha_2. \tag{17.50}$$

Предыдущие формулы дают

$$2\sin^2\frac{\delta}{2} = 1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{2v^2\sin^2\beta}{c^2 - v^2\cos^2\beta}, \tag{17.51}$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{v\sin\beta}{\sqrt{c^2-v^2}}. \tag{17.52}$$

В астрономических наблюдениях сравниваются видимые положения звезды при различных направлениях скорости движения Земли по орбите (годичная аберрация). Так как во все рассуждения входят только относительные скорости тел, воспринимающих луч, идущий от звезды, то очевидно, что общее движение Солнечной системы относительно звезд не играет роли, если только скорость его за рассматриваемые промежутки времени постоянна. Поэтому по величине аберрации нельзя определить скорость звезды относительно Земли или Солнца.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ТЕНЗОРНОЙ ФОРМЕ

§ 18. Замечание о ковариантности уравнений

При обсуждении в § 6 основных положений теории относительности мы установили некоторые общие требования, которым должна удовлетворять форма уравнений, определяющих ход физических процессов. Мы имеем в виду те уравнения, вид которых не зависит от начальных условий. Требования эти определяют правила преобразования уравнений при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Согласно принципу относительности, правила преобразования независимых переменных и неизвестных функций в этих уравнениях должны быть таковы, чтобы уравнения, написанные в одной инерциальной системе отсчета, были эквивалентны уравнениям *того же вида*, написанным в любой другой.

Это требование уже применялось нами при выводе преобразования Лоренца. В самом деле, мы получили это преобразование из условия, чтобы уравнение распространения фронта волны

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]=0 \qquad (18.01)$$

сохраняло свой вид, в соединении с условием, чтобы прямолинейное и равномерное движение оставалось таковым и после перехода к другой системе отсчета.

Таким образом, указанное требование уже определило правило преобразования независимых переменных (координат и времени).

Необходимо рассмотреть еще правила преобразования неизвестных функций, входящих в уравнения.

Простейшим правилом преобразования является простая инвариантность. Например, в случае уравнения (18.01) неизвестной функцией является величина ω, входящая в уравнение фронта волны

$$\omega(x, y, z, t)=0. \qquad (18.02)$$

Преобразованная функция ω', которая дает уравнение фронта волны в новых переменных

$$\omega'(x', y', z', t') = 0, \tag{18.03}$$

будет просто равна старой, и вид ее определяется из условия

$$\omega'(x', y', z', t') \equiv \omega(x, y, z, t). \tag{18.04}$$

Но в большинстве задач для сохранения вида уравнений необходимо сопровождать преобразование Лоренца для независимых переменных тем или иным преобразованием для неизвестных функций. Если существует такое преобразование для неизвестных функций, что новые функции, выраженные в новых переменных, будут удовлетворять уравнениям того же вида, как старые функции в старых переменных, то уравнения называются *ковариантными*.

Требование ковариантности уравнений по отношению к преобразованию Лоренца является обязательным следствием принципа относительности. С другой стороны, ясно, что не всякие уравнения будут ковариантными. Нам надлежит проверить, являются ли ковариантными уравнения, принятые в физике для описания того или иного физического процесса (например, уравнения электродинамики или уравнения механики), и если нет, то видоизменить их так, чтобы новые уравнения стали уже ковариантными.

Проверка ковариантности и составление ковариантных уравнений требуют предварительного изучения величин с наиболее простыми законами преобразования. При этом достаточно ограничиться линейными законами. Полная классификация величин по их закону преобразования составляет предмет одной из глав теории групп. Мы не можем рассматривать здесь этот вопрос во всей его общности, а ограничимся тем, чтó необходимо для формулировки основных уравнений механики и электродинамики.

§ 19. Определение тензора в трехмерном случае и замечание о ковариантных величинах

Формулы поворота пространственных координатных осей имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x'_i &= \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k \\ x_k &= \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x'_i, \end{aligned} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \right\} \tag{19.01}$$

где α_{ik} — косинусы углов между старыми и новыми осями. Мы можем формально определить трехмерный вектор как такую совокупность величин (A_1, A_2, A_3) — его составляющих, которая при повороте осей преобразуется по закону

$$A_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} A_k. \tag{19.02}$$

Частным случаем вектора будет радиус-вектор, для которого $A_1 = x_1$, $A_2 = x_2$, $A_3 = x_3$.

Допустим теперь, что даны два вектора, причем их составляющие A_i и B_i связаны линейной зависимостью

$$B_i = \sum_{k=1}^{3} T_{ik} A_k. \tag{19.03}$$

После поворота осей новые составляющие векторов будут связаны аналогичной зависимостью

$$B_i' = \sum_{k=1}^{3} T'_{ik} A_k', \tag{19.04}$$

причем

$$T'_{ik} = \sum_{j,\, l=1}^{3} \alpha_{ij} \alpha_{kl} T_{jl}. \tag{19.05}$$

В самом деле, для вектора B старые и новые составляющие должны быть связаны теми же формулами, как и для вектора A. Выражая по этим формулам B_i' через B_i и затем в (19.03) A_i — через A_i', получим (19.04) и (19.05).

Совокупность величин T_{ik}, преобразующихся при повороте осей по закону (19.05), называется тензором, или, подробнее, тензором второго ранга (вообще, ранг тензора равен числу его значков).

Примеры тензоров встречаются уже в нерелятивистской механике. Так, составляющие момента количества движения твердого тела (B_i) связаны с составляющими его угловой скорости (A_i) соотношениями вида (19.03), где T_{ik} — тензор моментов инерции. Другой пример дает теория упругости: там такие же соотношения дают связь между составляющими (dF_x, dF_y, dF_z) силы, действующей на некоторую площадку, и проекциями (dS_x, dS_y, dS_z) этой площадки на координатные плоскости, причем коэффициенты T_{ik} представляют тензор напряжений. В обоих примерах тензор T_{ik} симметричен относительно своих значков, но встречаются и тензоры, которые этим свойством не обладают.

Из формулы (19.05) видно, что составляющие тензора преобразуются, как произведения $x_i \xi_k$ координат двух точек (x_1, x_2, x_3) и (ξ_1, ξ_2, ξ_3), которые могут и совпадать $(x_i = \xi_i)$.

Рассмотрим антисимметричный тензор, т. е. такой, составляющие которого удовлетворяют соотношению

$$T_{ik} + T_{ki} = 0. \tag{19.06}$$

Примером такого тензора может служить антисимметричная комбинация произведений координат двух точек

$$T_{ik} = x_i \xi_k - \xi_i x_k. \tag{19.07}$$

Так как значки принимают у нас только три значения (1, 2, 3), то вместо двух значков мы можем писать один (дополнительный) значок и положить

$$\left.\begin{aligned} T_{23} &= -T_{32} = T_1, \\ T_{31} &= -T_{13} = T_2, \\ T_{12} &= -T_{21} = T_3. \end{aligned}\right\} \tag{19.08}$$

В общем виде, если (i, k, l) есть четная перестановка значков (1, 2, 3), мы будем иметь

$$T_{ik} = T_l. \tag{19.09}$$

Используя антисимметрию тензора T_{ik}, мы можем вместо (19.05) написать:

$$T'_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{p, q=1}^{3} (\alpha_{ip}\alpha_{kq} - \alpha_{iq}\alpha_{kp}) T_{pq}. \tag{19.10}$$

В этой сумме из девяти членов три (для $p = q$) равны нулю, а остальные шесть попарно равны друг другу, так что фактически имеются три различных члена.

Пусть теперь (i, k, l) и (p, q, r) — четные перестановки чисел (1, 2, 3). Используя обозначения (19.09) и полагая

$$\alpha_{ip}\alpha_{kq} - \alpha_{iq}\alpha_{kp} = \beta_{lr}, \tag{19.11}$$

мы можем переписать формулу (19.10) в виде

$$T'_l = \sum_{r=1}^{3} \beta_{lr} T_r. \tag{19.12}$$

Рассмотрим теперь определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \tag{19.13}$$

По свойству ортогонального преобразования $\Delta^2 = 1$, причем, если это преобразование есть простой поворот осей, то $\Delta = +1$, а если поворот сопровождается отражением (изменением знака одной или всех трех координат), то $\Delta = -1$. В обоих случаях

$$\beta_{lr} = \Delta \cdot \alpha_{lr}. \tag{19.14}$$

Таким образом, для простого поворота осей мы имеем

$$T'_l = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{lr} T_r, \tag{19.15}$$

а для несобственного ортогонального преобразования (поворот с отражением)

$$T'_l = -\sum_{r=1}^{3} \alpha_{lr} T_r. \tag{19.16}$$

Формула (19.16) показывает, что при простом повороте осей совокупность величин (19.08) преобразуется как вектор, а при повороте с отражением преобразование, подобное векторному, сопровождается изменением знака всех составляющих. Совокупность величин с таким законом преобразования принято называть *аксиальным* вектором, в отличие от *полярного* вектора, который во всех случаях преобразуется по формуле (19.02). Легко видеть, что векторное произведение двух полярных векторов будет аксиальным вектором. Физическим примером полярного вектора может служить вектор электрического поля, а аксиального — вектор магнитного поля (то и другое — в смысле трехмерного векторного исчисления). Формулы (19.08) показывают, что аксиальный вектор является по существу тензором второго ранга; поэтому, если пользоваться терминами „вектор“ и „тензор“ в смысле определений (19.02) и (19.05), то без термина „аксиальный вектор“ можно обойтись.

Аналогично можно определить, в трехмерном евклидовом пространстве, тензор более высокого ранга. Так, например, тензором третьего ранга будет совокупность величин T_{ijk}, преобразующихся при повороте осей по закону

$$T'_{ijk} = \sum_{l,\,m,\,n=1}^{3} \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn} T_{lmn}. \tag{19.17}$$

С другой стороны, величину, которая не меняется при повороте осей, можно также рассматривать как тензор, а именно как тензор нулевого ранга. Такую величину принято называть *скаляром* или инвариантом.

Если дан тензор второго ранга, то можно составить такую комбинацию его составляющих, которая не меняется при повороте осей, т. е. ведет себя, как скаляр. Такой линейной комбинацией является сумма диагональных элементов тензора второго ранга, т. е. величина

$$T = \sum_i T_{ii}. \tag{19.18}$$

Используя свойство

$$\sum_j \alpha_{ij}\alpha_{il} = \delta_{jl} \tag{19.19}$$

коэффициентов ортогонального преобразования, легко проверить, что из (19.05) вытекает

$$T' = T, \tag{19.20}$$

т. е. что T есть скаляр. Подобно этому, из составляющих тензора третьего ранга можно составить три вектора:

$$A_l = \sum_m T_{lmm}; \quad B_l = \sum_m T_{mlm}; \quad C_l = \sum_m T_{mml}. \tag{19.21}$$

Можно поставить себе вопрос: нельзя ли, вместо тензоров, ввести другие величины разных рангов, но так, чтобы из составляющих данного ранга уже нельзя было образовать таких линейных комбинаций, которые преобразовывались бы, как величины более низкого ранга.

Такие величины действительно можно построить. Закон преобразования для них будет тот же, как для гармонических полиномов, связанных с обыкновенными шаровыми функциями. Напомним, что если ввести сферические координаты

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = \cos \vartheta,$$

то умноженная на r^l шаровая функция порядка l будет гармоническим полиномом от x, y, z:

$$r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_{lm}(x, y, z).$$

Порядок l будет соответствовать рангу тензора, но число составляющих данного ранга будет меньше, чем у тензора. После поворота осей гармонический полином $P_{lm}(x', y', z')$ выразится, как линейная комбинация полиномов $P_{lm}(x, y, z)$, соответствующих различным m $(m = -l, \ -l+1, \ \ldots, \ l)$ по одному и тому же l. Коэффициенты этого линейного преобразования и будут характеризовать закон преобразования величин ранга l.

Обратим, наконец, внимание на следующее обстоятельство. В наших рассуждениях мы предполагали, что тензоры (или аналогичные им величины) являются, по их физическому смыслу, величинами вполне определенными, включая их знак. Сообразно этому, коэффициенты в формулах преобразования были у нас однозначными функциями от косинусов α_{ik}. Но можно себе представить и такие величины, которые являются определенными лишь с точностью до знака (вполне определенными будут тогда их квадратичные комбинации). В таком случае необязательно ограничиваться преобразованиями, коэффициенты которых однозначно определяются через α , а можно ввести и коэффициенты, определяемые лишь с точностью до знака (одного и того же во всех коэффициентах). Это приводит к новой категории физических величин — к так называемым спинорам, и к соответствующему обобщению шаровых функций с их законом преобразования. Такие величины применяются в квантовой механике.

Таким образом, тензоры не являются единственными геометрическими величинами с определенным законом преобразования. Однако в обычных (не-квантовых) применениях теории относительности можно ограничиться рассмотрением тензоров.

§ 20. Определение четырехмерного вектора

В предыдущем параграфе мы напомнили определение тензора в трехмерном евклидовом пространстве. Нам нужно теперь обобщить это определение на четырехмерное многообразие пространства и времени. Роль поворота осей будет играть теперь преобразование Лоренца. Существенно новым моментом будет различие в знаках пространственных и временных членов выражения

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{20.01}$$

для квадрата бесконечно малого четырехмерного интервала. Инвариантность выражения (20.01) характеризует, как мы видели, преобразование Лоренца, подобно тому, как инвариантность выражения

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{20.02}$$

характеризует поворот пространственных осей.

Указанное различие в знаках весьма важно для всей теории, так как оно отражает существующее коренное различие между пространством и временем.

Можно было бы, путем введения мнимых величин (мнимых координат или мнимого времени), добиться того, чтобы квадраты всех дифференциалов входили в ds^2 с одинаковым знаком. Этот путь был указан Минковским, а также Умовым. Однако достигаемая таким путем симметрия формул относительно пространства и времени не является, по нашему мнению, целесообразной, так как она затушевывает существующее между пространством и временем различие и не несет с собой особых математических преимуществ. Поэтому мы будем в дальнейшем оперировать с вещественными координатами и вещественным временем.

Если мы положим

$$ct = x_0; \quad x = x_1; \quad y = x_2; \quad z = x_3, \tag{20.03}$$

то выражение для ds^2 примет вид

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k\,dx_k^2, \tag{20.04}$$

где величины e_k равны ± 1 [см (8.25)]. Прямое и обратное преобразования Лоренца напишутся:

$$x'_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k, \tag{20.05}$$

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} x'_k. \tag{20.06}$$

Следовательно, дифференциалы старых и новых координат будут связаны соотношением

$$dx'_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik}\, dx_k, \tag{20.07}$$

а частные производные от какой-нибудь функции φ по старым и новым координатам будут связаны соотношением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i} = \sum_{k=0}^{3} e_i a_{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. \tag{20.08}$$

Если бы квадратичная форма (20.04) была определенной, то все числа e_k были бы друг другу равны и коэффициенты в формулах (20.07) и (20.08) были бы одинаковы. На самом же деле мы имеем

$$e_0 = 1; \qquad e_1 = e_2 = e_3 = -1 \tag{20.09}$$

и некоторые из соответствующих коэффициентов в этих формулах отличаются друг от друга знаком. Поэтому закон преобразования дифференциалов координат уже не будет (как это имело место для чисто пространственных вращений) совпадать с законом преобразования частных производных по координатам. Это необходимо учесть при определении вектора. Мы должны различать такие векторы, которые преобразуются как частные производные по координатам, от таких, которые преобразуются как дифференциалы координат. Первые мы будем называть *ковариантными*, а вторые — *контравариантными*. Составляющие ковариантного вектора мы будем обозначать буквами с *нижними* значками, а составляющие контравариантного вектора — теми же буквами с *верхними* значками. Таким образом, закон преобразования вектора будет иметь вид

$$A'_i = \sum_{k=0}^{3} e_i a_{ik} A_k \tag{20.10}$$

для ковариантного вектора и

$$A'^i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} A^k \tag{20.11}$$

для контравариантного вектора. Эти формулы можно записать в виде

$$A'_i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} A_k \tag{20.12}$$

$$A'^i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} A^k. \tag{20.13}$$

Заметим здесь же, что из правила относительно расположения значков (верхние и нижние значки) делают исключение в случае координат и их дифференциалов: согласно общему правилу, мы должны были бы писать $(dx)^0$, $(dx)^1$, $(dx)^2$, $(dx)^3$, а не dx_0, dx_1, dx_2, dx_3, как это принято.

Если задан ковариантный вектор A_i, то мы всегда можем ввести соответствующий ему контравариантный вектор, положив

$$A^i = e_i A_i. \tag{20.14}$$

Оба вектора не будут существенно различными, и мы будем говорить не о двух векторах, а о ковариантных и контравариантных составляющих одного и того же вектора.

Скалярное произведение двух векторов A_i и B_i определится как сумма

$$\sum_{i=0}^{3} e_i A_i B_i = \sum_{i=0}^{3} e_i A^i B^i, \tag{20.15}$$

которую можно также написать в виде

$$\sum_{i=0}^{3} A_i B^i = \sum_{i=0}^{3} A^i B_i. \tag{20.16}$$

Эта величина будет инвариантной по отношению к преобразованию Лоренца.

Скалярное произведение вектора на самого себя

$$\sum_{i=0}^{3} A_i A^i = (A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2 \tag{20.17}$$

может быть величиной как положительной, так и отрицательной. Про вектор, для которого величина (20.17) положительна, говорят, что он имеет характер времени; вектор, для которого эта величина отрицательна, называют имеющим пространственный характер. Наряду с этими терминами употребительны также термины „временно-подобный“ и „пространственно-подобный“ вектор.

Примером временно-подобного вектора может служить четырехмерная скорость, составляющие которой определяются равенствами

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^i = \frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{20.18}$$

То, что совокупность величин (20.18) есть вектор, вытекает из следующих соображений. Мы знаем, что величина

$$c\,d\tau = ds = \sqrt{c^2 - v^2}\,dt \tag{20.19}$$

есть инвариант. С другой стороны, величины (20.18) могут быть написаны в виде

$$u^0 = c\frac{dt}{d\tau} = \frac{dx_0}{d\tau}; \qquad u^i = \frac{dx_i}{d\tau} \quad (i = 1;\ 2,\ 3). \tag{20.20}$$

Отсюда ясно, что величины u^0, u^1, u^2, u^3 преобразуются, как дифференциалы координат x_0, x_1, x_2, x_3, т. е. как контравариантный вектор. То, что этот вектор временно-подобен, вытекает из тождества

$$(u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = c^2. \tag{20.21}$$

Примером пространственно-подобного вектора может служить четырехмерный вектор ускорения, составляющие которого определяются по формулам

$$w^0 = \frac{du^0}{d\tau}; \qquad w^i = \frac{du^i}{d\tau} \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{20.22}$$

или подробнее:

$$\left.\begin{aligned} w^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right), \\ w^i &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt}\right) \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \tag{20.23}$$

Пространственный характер вектора w может быть доказан следующим образом. Дифференцируя тождество (20.21) по времени (или по τ) получаем

$$u^0 w^0 - u^1 w^1 - u^2 w^2 - u^3 w^3 = 0 \tag{20.24}$$

или

$$c w^0 - v_1 w^1 - v_2 w^2 - v_3 w^3 = 0. \tag{20.25}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$(w^0)^2 < \frac{v^2}{c^2}\left((w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2\right) < (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2, \tag{20.26}$$

которое и доказывает наше утверждение о пространственном характере вектора w.

§ 21. Четырехмерные тензоры

Подобно трехмерному случаю, в четырехмерном многообразии пространства и времени могут быть определены тензоры второго и высшего ранга.

Ковариантным тензором второго ранга называется совокупность величин T_{ik}, которые при преобразовании Лоренца преобразуются по закону

$$T'_{ik} = \sum_{j,\,l=0}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} T_{jl} \tag{21.01}$$

или

$$T'_{ik} = \sum_{j,\,l=0}^{3} e_i e_k a_{ij} a_{kl} T_{jl}. \tag{21.02}$$

Аналогично, контравариантным тензором второго ранга будет совокупность величин, преобразующихся по закону

$$T'^{ik} = \sum_{j,\,l=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} T^{jl} \tag{21.03}$$

или

$$T'^{ik} = \sum_{j,\,l=0}^{3} e_j e_l a_{ij} a_{kl} T^{jl}. \tag{21.04}$$

Наконец, можно определить смешанный тензор второго ранга, ковариантный по отношению к одному значку и контравариантный по отношению к другому. Его составляющие преобразуются по закону

$$T'^{i}_{k} = \sum_{j,\,l=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} T^{j}_{l} \tag{21.05}$$

или

$$T'^{i}_{k} = \sum_{j,\,l=0}^{3} e_j e_k a_{ij} a_{kl} T^{j}_{l}. \tag{21.06}$$

Если бы все числа e_i были друг другу равны, то коэффициенты в формулах (21.02), (21.04), (21.06) совпадали бы. В нашем же случае некоторые из этих коэффициентов отличаются друг от друга знаком.

Формулы преобразования (21.02), (21.04), (21.06) не являются существенно различными, и от величин, преобразующихся по одной из этих формул, можно перейти к величинам, преобразующимся по какой-нибудь другой из них. Для этого достаточно положить

$$T^{ik} = e_i e_k T_{ik}, \tag{21.07}$$

а в качестве T^{i}_{k} ввести одну из двух величин:

$$T^{i}_{\cdot k} = e_i T_{ik} \tag{21.08}$$

или

$$T_{k\cdot}^{\cdot i} = e_i T_{ki}. \tag{21.09}$$

Если тензор T_{ik} симметричен, то величины (21.08) и (21.09) будут совпадать. Как и в случае вектора, мы будем говорить не о разных тензорах, а о ковариантных, контравариантных и смешанных составляющих одного и того же тензора.

Аналогично можно ввести тензоры третьего и высшего рангов. Так, например, тензор третьего ранга с тремя ковариантными значками преобразуется по закону

$$T'_{ikm} = \sum_{j,\,l,\,n=0}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} \frac{\partial x_n}{\partial x'_m} T_{jln} \tag{21.10}$$

или

$$T'_{ikm} = \sum_{j,\,l,\,n=0}^{3} e_i e_k e_m a_{ij} a_{kl} a_{mn} T_{jln}. \tag{21.11}$$

Как и в трехмерном случае, из составляющих тензора второго ранга можно образовать скаляр

$$T = \sum_{i=0}^{3} e_i T_{ii}, \tag{21.12}$$

а из составляющих тензора третьего ранга — три вектора:

$$A_i = \sum_k e_k T_{ikk}; \quad B_i = \sum_k e_k T_{kik}; \quad C_i = \sum_k e_k T_{kki}. \tag{21.13}$$

На затронутом в конце § 19 вопросе о не-тензорных величинах с простейшими (в известном смысле) законами преобразования мы здесь останавливаться не будем ввиду того, что в основных не-квантовых применениях теории относительности главную роль играют тензоры.

Если даны два тензора, то из них можно построить новые тензоры, ранг которых равен сумме или разности рангов данных тензоров (а также тензоры промежуточных рангов одной четности с суммой или разностью). Поясним это на примерах. В § 20 мы видели, что из двух векторов A_i и B_i можно составить скаляр

$$C = \sum_{i=0}^{3} e_i A_i B_i. \tag{21.14}$$

Здесь векторы рассматриваются как тензоры первого ранга, а скаляр — как тензор нулевого ранга. С другой стороны, из тех же векторов можно составить тензор второго ранга

$$C_{ik} = A_i B_k \quad \text{или же} \quad C_{ik} = B_i A_k. \tag{21.15}$$

Если дан тензор второго ранга T_{ik} и вектор A_i, то величина

$$B_i = \sum_k e_k A_k T_{ik} \tag{21.16}$$

будет вектором, а величина

$$C_{ikl} = A_i T_{kl} \tag{21.17}$$

[и другие, отличающиеся от (21.17) перестановкой значков в правой части] будет тензором третьего ранга.

В качестве дальнейшего примера составим из двух заданных тензоров второго ранга T_{ik} и U_{ik} скаляр

$$C = \sum_{i,k=0}^{3} e_i e_k T_{ik} U_{ik}, \tag{21.18}$$

тензор второго ранга

$$C_{ik} = \sum_m e_m T_{im} U_{km} \tag{21.19}$$

и тензор четвертого ранга

$$C_{iklm} = T_{ik} U_{lm}. \tag{21.20}$$

В этом случае, очевидно, будет

$$C_{ik} = \sum_m e_m C_{imkm}, \tag{21.21}$$

$$C = \sum_i e_i C_{ii}. \tag{21.22}$$

Тензорный характер всех этих величин легко проверяется на основании равенств (10.04) и (10.05), выражающих свойства коэффициентов преобразования Лоренца.

Заметим, что во всех суммах, содержащих произведения ковариантных составляющих тензоров, эти произведения входят умноженными на добавочный (знаковый) множитель e_i, e_k, ..., где i, k, ... — значки суммирования. Но можно писать суммы так, чтобы значок суммирования входил в составляющую одного из тензоров в качестве ковариантного (нижнего) значка, а в умножаемую на нее составляющую другого тензора — в качестве контравариантного (верхнего) значка; тогда добавочный знаковый множитель входить не будет. Так, например, скалярное произведение (21.14) может быть написано в виде (10.16), а сумма (21.18), согласно (21.07), — в виде

$$C = \sum_{i,k=0}^{3} T^{ik} U_{ik}. \tag{21.23}$$

Из данного тензора можно получить новый не только путем умножения на другой тензор, но и путем дифференциальных операций. При этом операция дифференцирования по координате x_i играет роль умножения на ковариантную составляющую некоторого вектора. Так, например, величина

$$C = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial A^i}{\partial x_i} \tag{21.24}$$

есть скаляр, а совокупность величин

$$B_i = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \tag{21.25}$$

есть вектор (расходимость тензора T_{ik}). В частности, если

$$A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{21.26}$$

где φ — некоторый скаляр, то составленное по формуле (21.24) выражение

$$\Box\varphi = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \tag{21.27}$$

также будет скаляром (символ $\Box$ означает оператор Даламбера).

§ 22. Псевдо-тензоры

Наряду с тензорами удобно вводить в рассмотрение величины, закон преобразования которых зависит от знака определителя подстановки

$$D = \frac{D(x_0, x_1, x_2, x_3)}{D(x_0', x_1', x_2', x_3')} = \mathrm{Det}\,(e_i a_{ik}). \tag{22.01}$$

По свойству коэффициентов преобразования Лоренца квадрат определителя D всегда равен единице. Самый же определитель равен $D = \pm 1$ для собственных преобразований Лоренца (сохраняющих направление счета времени и переводящих правую систему пространственных осей в правую же систему) и равен $D = -1$ для несобственных преобразований. Хотя мы условились рассматривать лишь собственные преобразования Лоренца, для классификации геометрических величин полезно знать их поведение также и при несобственных преобразованиях.

Рассмотрим совокупность величин ε_{iklm}, антисимметричных относительно своих значков, причем $\varepsilon_{0123} = 1$. Из этого определения следует, что $\varepsilon_{iklm} = 0$, если два или больше значков совпадают, $\varepsilon_{iklm} = +1$, если $(iklm)$ представляет четную перестановку чисел (0123), и $\varepsilon_{iklm} = -1$, если $(iklm)$ есть нечетная перестановка.

Легко проверить тождество

$$\sum_{pqrs=0}^{3} \varepsilon_{pqrs} \frac{\partial x_p}{\partial x_i'} \frac{\partial x_q}{\partial x_k'} \frac{\partial x_r}{\partial x_l'} \frac{\partial x_s}{\partial x_m'} = D \cdot \varepsilon_{iklm}. \tag{22.02}$$

В самом деле, левая часть представляет разложение определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x'_i} & \frac{\partial x_0}{\partial x'_k} & \frac{\partial x_0}{\partial x'_l} & \frac{\partial x_0}{\partial x'_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_3}{\partial x'_i} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_k} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_l} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_m} \end{vmatrix},$$

который получается из D перестановкой столбцов, если все значки $(iklm)$ различны, и который обращается в нуль, если некоторые из них совпадают.

Формула (22.02) показывает, что при $D = 1$ величины ε преобразуются, как составляющие тензора, а при $D = -1$ закон преобразования этих величин отличается от закона преобразования тензора знаком. Совокупность величин с таким законом преобразования называется *псевдо-тензором.*

Мы можем рассматривать ε_{iklm}, как ковариантные составляющие антисимметричного псевдо-тензора четвертого ранга. Контравариантные составляющие этого тензора получатся по общей формуле

$$\varepsilon^{iklm} = e_i e_k e_l e_m \varepsilon_{iklm}. \tag{22.03}$$

Но так как величины ε отличны от нуля только если все значки различны, а тогда $e_i e_k e_l e_m = e_0 e_1 e_2 e_3 = -1$, то будет просто

$$\varepsilon^{iklm} = -\varepsilon_{iklm}. \tag{22.04}$$

Если φ есть скаляр, то совокупность величин

$$\varphi_{iklm} = \varphi \varepsilon_{iklm} \tag{22.05}$$

будет антисимметричным псевдо-тензором четвертого ранга. Такой псевдо-тензор имеет, подобно скаляру, только одну составляющую; поэтому его принято называть псевдо-скаляром.

Всякому антисимметричному тензору второго ранга A_{ik} можно сопоставить по формуле

$$\overset{*}{A}{}^{ik} = \frac{1}{2} \sum_{l, m=0}^{3} \varepsilon^{iklm} A_{lm} \tag{22.06}$$

антисимметричный псевдо-тензор $\overset{*}{A}{}^{ik}$ того же ранга; он называется дуальным по отношению к данному тензору. В сумме (22.06) только два члена отличны от нуля, и эти члены друг другу равны. Поэтому мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{A}{}^{10} &= A_{23}; & \overset{*}{A}{}^{20} &= A_{31}; & \overset{*}{A}{}^{30} &= A_{12}, \\ \overset{*}{A}{}^{23} &= A_{10}; & \overset{*}{A}{}^{31} &= A_{20}; & \overset{*}{A}{}^{12} &= A_{30}, \end{aligned}\right\} \tag{22.07}$$

Подобно этому, антисимметричному тензору третьего ранга A_{ikl} можно по формуле

$$\overset{*}{A}{}^{i} = \frac{1}{6} \sum_{k,l,m=0}^{3} \varepsilon^{iklm} A_{klm} \tag{22.08}$$

сопоставить псевдо-вектор (т. е. псевдо-тензор первого ранга). В сумме (22.08) отличны от нуля шесть членов, но они между собою равны. Мы получим для составляющих псевдо-вектора явные выражения

$$\overset{*}{A}{}^{0} = -A_{123}; \quad \overset{*}{A}{}^{1} = A_{230}; \quad \overset{*}{A}{}^{2} = A_{310}; \quad \overset{*}{A}{}^{3} = A_{120}. \tag{22.09}$$

Будем для краткости называть „произведением тензора на тензор“ такой тензор, составляющие которого получаются по правилам § 21 путем перемножения составляющих двух данных тензоров. Тогда мы можем сказать, что произведение псевдо-тензора на псевдо-тензор (так же как и тензора на тензор) будет тензором, тогда как произведение тензора на псевдо-тензор будет псевдо-тензором. Этим правилом мы фактически уже пользовались при составлении псевдо-тензора $\overset{*}{A}{}^{ik}$ и псевдо-вектора $\overset{*}{A}{}^{i}$.

§ 23. Бесконечно малое преобразование Лоренца

Общее преобразование Лоренца (с переносом начала) имеет вид

$$x_i' = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k. \tag{23.01}$$

Рассмотрим тот случай, когда преобразование (23.01) бесконечно мало отличается от тождественного преобразования. В этом случае постоянные a_i будут бесконечно малыми, а коэффициенты a_{ik} могут быть написаны в виде

$$a_{ik} = e_k \delta_{ik} + \omega^{ik}, \tag{23.02}$$

где ω^{ik} — бесконечно малые величины. Чтобы подчеркнуть, что координаты представляют собой контравариантный вектор, мы будем в этом параграфе писать при них *верхние* значки

$$x^0 = ct; \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \tag{23.03}$$

Бесконечно малые постоянные, представляющие смещение начала, мы будем также писать с верхними значками (a^i вместо a_i). В новых обозначениях результат подстановки (23.02) в (23.01) напишется:

$$x'^i = x^i + a^i + \sum_{k=0}^{3} e_k \omega^{ik} x^k. \tag{23.04}$$

Так как для бесконечно малого преобразования различие между данной и преобразованной системой отсчета становится несущественным, то разности

$$\Delta x^i = x'^i - x^i \tag{23.05}$$

мы можем рассматривать как вектор, отнесенный к одной из этих систем отсчета, скажем, к первоначальной. Таким образом, выражения

$$\Delta x^i = a^i + \sum_{k=0}^{3} e_k \omega^{ik} x^k \tag{23.06}$$

представляют бесконечно малый контравариантный вектор. Отсюда следует, что постоянные a^i сами образуют такой вектор, а постоянные ω^{ik} образуют контравариантный тензор. Тензор этот будет антисимметричным. В самом деле, условия ортогональности коэффициентов преобразования Лоренца

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl} \tag{23.07}$$

после подстановки в них выражений (23.02) и пренебрежения бесконечно малыми второго порядка принимают вид

$$\omega^{ik} + \omega^{ki} = 0. \tag{23.08}$$

Антисимметричный тензор второго ранга имеет шесть независимых составляющих. Эти шесть величин, вместе с четырьмя компонентами вектора смещения начала, представляют десять независимых параметров, которые и характеризуют бесконечно малое преобразование Лоренца.

Произведем последовательно два бесконечно малых преобразования: одно с параметрами a^i, ω^{ik} и другое с параметрами b^i, φ^{ik}. Легко видеть, что результат двух таких преобразований равносилен, с точностью до величин второго порядка, одному преобразованию с параметрами

$$c^i = a^i + b^i; \quad \psi^{ik} = \omega^{ik} + \varphi^{ik}. \tag{23.09}$$

Отсюда, в частности, следует, что результат двух бесконечно малых преобразований не зависит от их порядка. Пользуясь этим, мы можем последовательно рассмотреть смещение начала, переход к движущейся системе отсчета и бесконечно малый поворот пространственных осей.

Полагая

$$a^0 = c\tau, \quad a^1 = a_x; \quad a^2 = a_y; \quad a^3 = a_z, \tag{23.10}$$

мы получим преобразование, которое соответствует переносу начала счета времени на более *ранний* момент на величину τ и переносу начала координат *назад* на величину вектора **a**. Переход к системе отсчета, движущейся с бесконечно малой скоростью **V**, означает преобразование

$$\left.\begin{aligned} x'-x=\Delta x=-V_x t,\\ y'-y=\Delta y=-V_y t,\\ z'-z=\Delta z=-V_z t \end{aligned}\right\} \qquad (23.11)$$

для координат и преобразование

$$t'-t=\Delta t=-\frac{1}{c^2}(xV_x+yV_y+zV_z) \qquad (23.12)$$

для времени.

Переходя от трехмерной символики к четырехмерной и сравнивая коэффициенты в (23.11) и в (23.06), получаем

$$\omega^{10}=-\frac{V_x}{c};\quad \omega^{20}=-\frac{V_y}{c};\quad \omega^{30}=-\frac{V_z}{c}. \qquad (23.13)$$

Сравнение коэффициентов в (23.12) и в (23.06) дает

$$\omega^{01}=\frac{V_x}{c};\quad \omega^{02}=\frac{V_y}{c};\quad \omega^{03}=\frac{V_z}{c} \qquad (23.14)$$

— результат очевидный, так как тензор ω^{ik} антисимметричен.

Рассмотрим, наконец, бесконечно малый поворот пространственных осей. По известной формуле кинематики мы имеем

$$\Delta\mathbf{r}=[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}], \qquad (23.15)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор бесконечно малого поворота (составляющие его равны бесконечно малым углам поворота вокруг осей x, y, z).

Сравнивая (23.15) и (23.06), получаем

$$\omega^{23}=-\omega^{32}=\omega_x;\quad \omega^{31}=-\omega^{13}=\omega_y;\quad \omega^{12}=-\omega^{21}=\omega_z. \qquad (23.16)$$

Мы выпишем также ковариантные составляющие тензора ω_{ik}. Опуская значки по известному правилу, получаем

$$\left.\begin{aligned} \omega_{10}=\frac{V_x}{c};\quad \omega_{20}=\frac{V_y}{c};\quad \omega_{30}=\frac{V_z}{c},\\ \omega_{23}=\omega_x;\quad \omega_{31}=\omega_y;\quad \omega_{12}=\omega_z, \end{aligned}\right\} \qquad (23.17)$$

тогда как остальные составляющие получаются из условия антисимметрии.

В заключение заметим, что формулы для конечного преобразования Лоренца можно получить, исходя из рассмотрения бесконечно малого преобразования; но на этом мы останавливаться не будем.

§ 24. Закон преобразования электромагнитного поля и ковариантность уравнений Максвелла

При выводе основных формул теории относительности мы исходили из закона распространения фронта электромагнитной волны, вытекающего, как показано в § 3, из уравнений Максвелла. Нам надлежит теперь проверить, что уравнения Максвелла действительно являются ковариантными по отношению к преобразованию Лоренца, а для этого нужно прежде всего установить закон преобразования электромагнитного поля при переходе к новой системе отсчета.

Как известно, электромагнитное поле может быть выражено через скалярный и векторный потенциалы по формулам

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; & E_1 &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1},\\ H_2 &= \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}; & E_2 &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2},\\ H_3 &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}; & E_3 &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \end{aligned}\right\} \tag{24.01}$$

Поле обращается в нуль в том и только в том случае, когда линейная дифференциальная форма

$$\delta\varphi = -c\Phi\, dt + A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + A_3\, dx_3 \tag{24.02}$$

есть полный дифференциал. Мы примем, что эта линейная форма является инвариантом (скаляром). Для этого достаточно считать A_1, A_2, A_3 пространственными (ковариантными) составляющими четырехмерного вектора, нулевая составляющая которого равна

$$A_0 = -\Phi. \tag{24.03}$$

Имея в виду, что $ct = x_0$, мы можем написать $\delta\varphi$ в виде

$$\delta\varphi = \sum_{i=0}^{3} A_i\, dx_i. \tag{24.04}$$

Обычное условие нормировки для потенциалов

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{24.05}$$

будет условием, инвариантным относительно преобразований Лоренца, так как его можно написать в виде

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0 \tag{24.06}$$

или, если ввести контравариантные составляющие

$$A^0 = A_0 = -\Phi; \quad A^1 = -A_1; \quad A^2 = -A_2; \quad A^3 = -A_3, \tag{24.07}$$

в виде

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial A^i}{\partial x_i} = 0. \tag{24.08}$$

Подставляя в (24.01) $x_0 = ct$, $A_0 = -\Phi$, перепишем выражения для поля в новых обозначениях. Мы получим для электрического поля

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial A_0}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_0}, \\ E_2 &= \frac{\partial A_0}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_0}, \\ E_3 &= \frac{\partial A_0}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_0}, \end{aligned}\right\} \tag{24.09}$$

тогда как для магнитного поля останутся прежние выражения. Все эти выражения мы можем записать короче, если положим

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \tag{24.10}$$

Мы будем тогда иметь

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= F_{23} & E_1 &= F_{10} \\ H_2 &= F_{31} & E_2 &= F_{20} \\ H_3 &= F_{12} & E_3 &= F_{30} \end{aligned}\right\} \tag{24.11}$$

Если (A_i) есть ковариантный вектор, то (F_{ik}) есть антисимметричный тензор второго ранга. Таким образом, наше предположение о векторном характере потенциалов приводит нас к заключению, что шесть составляющих электромагнитного поля представляют, в четырехмерном многообразии пространства-времени, антисимметричный тензор. На основании этого легко проверить, что уравнения Максвелла ковариантны по отношению к преобразованию Лоренца. В самом деле, построим из производных от составляющих поля тензор третьего ранга:

$$F_{ikl} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}, \tag{24.12}$$

который, очевидно, будет антисимметричным. По формулам (22.09) ему можно сопоставить псевдо-вектор

$$\overset{*}{F}{}^0 = -F_{123}; \quad \overset{*}{F}{}^1 = F_{230}; \quad \overset{*}{F}{}^2 = F_{310}; \quad \overset{*}{F}{}^3 = F_{120}. \tag{24.13}$$

Вычислим составляющие этого псевдо-вектора. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{F}{}^0 &= -\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_2} - \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = -\operatorname{div}\mathbf{H};\\
\overset{*}{F}{}^1 &= \frac{\partial F_{23}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x_2} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2};\\
\overset{*}{F}{}^2 &= \frac{\partial F_{31}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{10}}{\partial x_3} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_2}{\partial t} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\partial E_1}{\partial x_3};\\
\overset{*}{F}{}^3 &= \frac{\partial F_{12}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x_1} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_3}{\partial t} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1}.
\end{aligned}\right\} \quad (24.14)$$

Для наглядности мы заменили в правой части x_0 на ct. В силу уравнений Максвелла

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \quad (24.15)$$

правые части равенств (24.14) равны нулю.

Следовательно, первая группа уравнений Максвелла может быть записана в ковариантной форме

$$\overset{*}{F}{}^i = 0 \quad (24.16)$$

или

$$F_{ikl} = 0. \quad (24.17)$$

Обратимся теперь ко второй группе уравнений Максвелла. Для этого перейдем от ковариантных составляющих тензора поля к контравариантным

$$\left.\begin{aligned}
F^{23} &= H_1 & F^{10} &= -E_1\\
F^{31} &= H_2 & F^{20} &= -E_2\\
F^{12} &= H_3 & F^{30} &= -E_3
\end{aligned}\right\} \quad (24.18)$$

и составим контравариантный вектор

$$s^i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k}. \quad (24.19)$$

Мы имеем

$$\left.\begin{aligned}
s^0 &= 0 + \frac{\partial F^{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x_3} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3};\\
s^1 &= \frac{\partial F^{10}}{\partial x_0} + 0 + \frac{\partial F^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x_3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3};\\
s^2 &= \frac{\partial F^{20}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial F^{23}}{\partial x_3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1};\\
s^3 &= \frac{\partial F^{30}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x_2} + 0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2}.
\end{aligned}\right\} \quad (24.20)$$

Таким образом, нулевая составляющая вектора s^i равна

$$s^0 = \operatorname{div} \mathbf{E}, \tag{24.21}$$

а пространственные составляющие совпадают с составляющими трехмерного вектора

$$(s^1,\ s^2,\ s^3) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{curl} \mathbf{H}. \tag{24.22}$$

В свободном пространстве правые части этих уравнений равны нулю. Следовательно, вторая группа уравнений Максвелла для свободного пространства может быть записана в ковариантной форме

$$s^i \equiv \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{24.23}$$

В пространстве, заполненном зарядами с плотностью ρ, уравнения Максвелла — Лоренца имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho; \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{24.24}$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока. Ковариантность уравнений Максвелла будет обеспечена, если величины

$$s^0 = 4\pi\rho; \quad s^i = \frac{4\pi}{c} j_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{24.25}$$

будут представлять контравариантные компоненты четырехмерного вектора. В силу тождества

$$\sum_{i,\,k=0}^{3} \frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0 \tag{24.26}$$

мы должны иметь

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0, \tag{24.27}$$

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{24.28}$$

Это уравнение выражает, как известно, закон сохранения заряда.

Четырехмерный векторный характер величин (24.25) вполне согласуется с их физическим толкованием по Лоренцу. Согласно этому толкованию, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, где ρ — плотность заряда, а $\mathbf{v}$ — его скорость. Четырехмерный вектор тока

$$\rho c,\ \rho v_1,\ \rho v_2,\ \rho v_3 \tag{24.29}$$

пропорционален вектору четырехмерной скорости

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^1 = \frac{v_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \\ u^2 &= \frac{v_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^3 = \frac{v_3}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{24.30}$$

[см. (20.18)], причем коэффициент пропорциональности равен

$$\rho^* = \rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{24.31}$$

и представляет собою инвариант, физический смысл которого есть плотность заряда в той системе отсчета, где этот заряд в данный момент неподвижен.

Мы проверили ковариантность уравнений Максвелла и установили, что закон преобразования электромагнитного поля при переходе к другой системе отсчета совпадает с законом преобразования антисимметричного тензора второго ранга. Напишем этот закон преобразования в явной форме, введя вместо коэффициентов преобразования Лоренца a_{ik} их значения, соответствующие тому случаю, когда преобразование Лоренца не сопровождается поворотом пространственных координатных осей. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} a_{00} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \\ a_{0i} &= \frac{a_{00}}{c}V_i; \quad a_{i0} = -\frac{a_{00}}{c}V_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3); \\ a_{ik} &= -\delta_{ik} - (a_{00} - 1)\frac{V_iV_k}{V^2} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \tag{24.32}$$

Подставляя эти значения в общую формулу

$$F'_{ik} = e_ie_k\sum_{j,\,l=0}^{3} a_{ij}a_{kl}F_{jl} \tag{24.33}$$

и пользуясь антисимметрией тензора F_{ik}, получим

$$\begin{aligned} F'_{23} = a_{00}F_{23} - (a_{00} - 1)\frac{V_1}{V^2}(V_1F_{23} + V_2F_{31} + V_3F_{12}) - \\ - \frac{1}{c}a_{00}(V_2F_{30} - V_3F_{20}) \end{aligned} \tag{24.34}$$

и два других уравнения, получаемых из (24.34) круговой перестановкой значков 1, 2, 3, а также

$$F'_{10} = a_{00}F_{10} - (a_{00} - 1)\frac{V_1}{V^2}(V_1F_{10} + V_2F_{20} + V_3F_{30}) + \\ + \frac{1}{c}a_{00}(V_2F_{12} - V_3F_{31}) \qquad (24.35)$$

и два других уравнения, получаемых круговой перестановкой. Переходя, согласно (24.11), к обычным обозначениям для электрического и магнитного поля и пользуясь формулами трехмерного векторного исчисления, мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} E'_1 &= a_{00}E_1 - (a_{00} - 1)\frac{V_1}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}) + \frac{a_{00}}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}]_1, \\ H'_1 &= a_{00}H_1 - (a_{00} - 1)\frac{V_1}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{H}) - \frac{a_{00}}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{E}]_1. \end{aligned}\right\} \qquad (24.36)$$

Переходя от составляющих к векторам, заменяя a_{00} его значением и группируя члены в несколько ином порядке, получим окончательно

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}) + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}]\right); \qquad (24.37)$$

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{H}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\mathbf{H} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{H}) - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{E}]\right). \qquad (24.38)$$

Для сравнения приведем здесь формулы преобразования для ковариантного четырехмерного вектора, причем будем применять для его пространственных составляющих обычные векторные обозначения:

$$A'_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(A_0 + \frac{1}{c}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{A})\right); \qquad (24.39)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cdot\frac{\mathbf{V}}{V^2}\left((\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}) + \frac{V^2}{c}A_0\right). \qquad (24.40)$$

По поводу формул для поля заметим, что

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{V} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{V}; \qquad \mathbf{H}'\cdot\mathbf{V} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{V}. \qquad (24.41)$$

Это значит, что та часть электрического или магнитного поля, которая параллельна скорости $\mathbf{V}$, остается без изменения. В пространственной части четырехмерного вектора, напротив, остается без изменения та часть, которая перпендикулярна скорости $\mathbf{V}$, так как мы имеем

$$\mathbf{A}' - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}') = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}). \qquad (24.42)$$

Если рассматривать частное преобразование Лоренца и положить

$$V_x = V; \quad V_y = V_z = 0, \tag{24.43}$$

то формулы преобразования для поля упростятся и напишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned}
E'_x &= E_x; & H'_x &= H_x, \\
E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(E_y - \frac{V}{c} H_z\right); & H'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(H_y + \frac{V}{c} E_z\right), \\
E'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(E_z + \frac{V}{c} H_y\right); & H'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(H_z - \frac{V}{c} E_y\right).
\end{aligned}\right\} \tag{24.44}$$

Из составляющих поля можно построить две комбинации, которые при преобразовании Лоренца остаются без изменения. Мы имеем

$$\mathbf{E}'^2 - \mathbf{H}'^2 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2; \tag{24.45}$$

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \tag{24.46}$$

Первая из этих величин остается без изменения также и при несобственных преобразованиях Лоренца (см. § 22) и является скаляром. Вторая же меняет при несобственных преобразованиях свой знак и является псевдо-скаляром. В этом легко убедиться при помощи тензорной символики. Мы имеем

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k=0}^{3} F_{ik} F^{ik}; \tag{24.47}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{4} \sum_{i,\,k=0}^{3} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}, \tag{24.48}$$

где $\overset{*}{F}{}^{ik}$ — антисимметричный псевдо-тензор, связанный с тензором поля по формуле, аналогичной (22.06) или (22.07).

Заметим, что для плоской волны оба выражения (24.45) и (24.46) обращаются в нуль (в любой системе отсчета).

Формулы преобразования для поля, как и уравнения Максвелла, указывают на существование самой тесной связи между электрическим полем и магнитным. Так, поле от зарядов, неподвижных в некоторой системе отсчета, будет в этой системе чисто электростатическим; но в другой системе отсчета, которая относительно этих зарядов движется, к электрическому полю добавится еще магнитное. Это становится понятным, если вспомнить, что движущиеся заряды представляют электрический ток. Подобно этому, поле, чисто магнитное в одной системе отсчета, будет в другой системе проявляться, как наложение магнитного и электрического полей.

§ 25. Движение заряженной материальной точки в заданном внешнем поле

Рассмотрим движение частицы с массой m и зарядом e в заданном внешнем поле. Как мы видели ранее [формула (20.23)] четырехмерный вектор ускорения имеет составляющие

$$\left.\begin{aligned} w^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right);\\ w^i &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt}\right) \quad (i=1,\,2,\,3). \end{aligned}\right\} \tag{25.01}$$

Здесь под знаком производных по времени стоят составляющие четырехмерной скорости

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt} \quad (i=1,\,2,\,3), \tag{25.02}$$

причем

$$v^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2. \tag{25.03}$$

Введем такую (штрихованную) систему отсчета, в которой мгновенная скорость частицы равна нулю. Мы будем исходить из предположения, что в этой сопутствующей системе отсчета обычное ускорение пропорционально электрическому полю

$$\frac{d^2x_i'}{dt'^2} = \frac{e}{m}E_i', \tag{25.04}$$

и перейдем затем обратно к исходной системе отсчета.

В штрихованной системе отсчета четырехмерные скорость и ускорение равны

$$u'^0 = c, \quad u'^1 = u'^2 = u'^3 = 0; \tag{25.05}$$

$$w'^0 = 0, \quad w'^i = \frac{d^2x'^i}{dt'^2}. \tag{25.06}$$

Таким образом, в штрихованной системе четырехмерное ускорение выражается через поле следующим образом:

$$w'^0 = 0, \quad w'^i = \frac{e}{m}E_i'. \tag{25.07}$$

По формулам преобразования контравариантного вектора (совпадающим с формулами преобразования координат) мы имеем

$$w^i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} w'^k. \tag{25.08}$$

Подставляя в правую часть значения (25.07) для w'^i, получим для четырехмерного ускорения в исходной системе отсчета выражения

$$w^i = -\frac{e}{m}(a_{1i}E'_1 + a_{2i}E'_2 + a_{3i}E'_3). \tag{25.09}$$

Сюда нужно подставить значения a_{ik} из (24.32). Мы получим

$$w^0 = \frac{e}{m} \cdot \frac{a_{00}}{c}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}'); \tag{25.10}$$

$$w^i = \frac{e}{m}\left(E'_i + (a_{00} - 1)\frac{V_i}{V^2}(\mathbf{V} \cdot E')\right). \tag{25.11}$$

Теперь остается выразить $\mathbf{E}'$ через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Так как $\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}$, формула (24.36) дает, после замены a_{00} его выражением,

$$w^0 = \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{c^2 - V^2}}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}); \tag{25.12}$$

$$w^i = \frac{e}{m}\frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{H}]\right)_i. \tag{25.13}$$

Здесь $\mathbf{V}$ есть скорость сопутствующей системы отсчета; эта скорость совпадает в рассматриваемый момент со скоростью $\mathbf{v}$ частицы. Заменяя поэтому $\mathbf{V}$ на $\mathbf{v}$, перепишем предыдущие уравнения в виде

$$w^0 = \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}); \tag{25.14}$$

$$w^i = \frac{e}{m}\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]\right)_i. \tag{25.15}$$

Теперь мы можем освободиться от сопутствующей системы отсчета, считая, что написанные уравнения справедливы во всякий момент времени, так что они представляют собой уравнения движения частицы. Форма уравнений (25.14) и (25.15), однако, неудобна тем, что в них применен смешанный способ написания: в левой части стоит четырехмерный вектор, тогда как правые части выражены через трехмерные величины. Перейдем поэтому к единообразному способу написания и выразим обе части сперва через четырехмерные, а затем через трехмерные величины.

Пользуясь обозначениями (25.02) для четырехмерной скорости и обозначениями (24.11) для поля, мы можем написать уравнения (25.14) и (25.15) в виде

$$w^0 = \frac{e}{m}(u^1 F_{10} + u^2 F_{20} + u^3 F_{30}); \tag{25.16}$$

$$w^i = \frac{e}{m}(u^0 F_{i0} + u^1 F_{i1} + u^2 F_{i2} + u^3 F_{i3}) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{25.17}$$

Вследствие антисимметрии тензора F_{ik} в правой части каждого из уравнений (25.17) будет фактически не четыре, а три члена. Переходя к ковариантному вектору ускорения

$$w_0 = w^0; \quad w_1 = -w^1; \quad w_2 = -w^2; \quad w_3 = -w^3, \tag{25.18}$$

мы будем иметь для всех значений i от 0 до 3

$$w_i = -\frac{e}{m}\sum_{k=0}^{3} u^k F_{ik}. \tag{25.19}$$

Здесь справа и слева стоит ковариантный вектор; поэтому очевидно, что уравнения движения в форме (25.19) сохраняют свой вид в любой системе отсчета, как и должно быть. Легко проверить, что

$$\sum_{i=0}^{3} u^i w_i = 0 \tag{25.20}$$

в согласии с (20.24). Первое из уравнений движения является поэтому следствием трех остальных.

Ввиду ковариантности уравнений (25.19), для обоснования их достаточно было бы проверить, что в сопутствующей (штрихованной) системе отсчета они приводятся к виду (25.07).

Переходим теперь к трехмерному способу написания. Используя выражения (25.01) для четырехмерного вектора ускорения и вводя трехмерную векторную символику, мы будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = e(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}); \tag{25.21}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\right). \tag{25.22}$$

В уравнении (25.21) правая часть представляет собою мощность, т. е. работу, производимую полем над частицей в единицу времени; по общим принципам механики левую часть следует поэтому толковать, как приращение кинетической энергии частицы в единицу времени. В уравнении (25.22) правая часть представляет лоренцову силу, а левая часть есть приращение, в единицу времени, количества движения частицы.

Таким образом, кинетическая энергия частицы и ее количество движения могут отличаться только на постоянные от выражений

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{25.23}$$

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{25.24}$$

которые стоят в уравнениях движения под знаком производных по времени. Значения этих постоянных определяются из требования ковариантности: необходимо потребовать, чтобы энергия и количество движения частицы*) составляли четырехмерный вектор. Но величины (25.23) и (25.24) сами составляют четырехмерный вектор, поскольку они пропорциональны нулевой и пространственным составляющим четырехмерной скорости. Поэтому упомянутые постоянные равны нулю**). Следовательно, величины (25.23) и (25.24) представляют энергию и количество движения частицы.

При $v=0$ получается, в соответствии со старыми представлениями, $P=0$: количество движения неподвижного тела равно нулю. Но энергия W получает при $v=0$ отличное от нуля значение

$$W_0 = mc^2. \tag{25.25}$$

Этот результат противоречит старым представлениям, но полностью подтверждается на опыте: всякому телу с массой m соответствует запас энергии W_0 (см. ниже § 34). Подобное соотношение

$$W = Mc^2 \tag{25.26}$$

между массой и энергией тела имеет место и для произвольной скорости v, если только разуметь под M величину

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{25.27}$$

которая сама зависит от скорости. Величину M следует рассматривать, как рациональное обобщение понятия массы. Она входит, в качестве множителя при скорости $\mathbf{v}$, в выражение (25.24) для количества движения $\mathbf{P}$ и характеризует поэтому инертность тела (его инертную массу). Величину M называют просто массой, тогда как m называется массой покоя. Сообразно этому, величину W называют просто энергией, а величину W_0 — энергией покоя.

Масса покоя m есть постоянная, которая не зависит от состояния движения частицы как целого, но может зависеть от внутреннего состояния частицы (если последняя имеет сложную структуру и обладает внутренними степенями свободы). Масса покоя m выражается через инвариант четырехмерного вектора энергии — количества движения. В самом деле, инвариант этот от скорости не зависит и равен

$$\frac{W^2}{c^2} - P^2 = m^2c^2. \tag{25.28}$$

*) Точнее, деленная на c энергия и количество движения.

**) Подробнее можно было бы рассуждать так. Упомянутые постоянные должны, с одной стороны, составлять вектор, а с другой стороны, они не должны зависеть от состояния движения, а значит, и от системы отсчета. Но отличного от нуля постоянного вектора, значения составляющих которого не зависели бы от системы отсчета, не существует.

Зависимость массы M от скорости такова, что при приближении скорости частицы к скорости света масса ее неограниченно возрастает. Вследствие этого ни в какой системе отсчета ни одно тело с массой покоя, отличной от нуля, не может достичь скорости света. Это обстоятельство наглядно подтверждает предельный характер скорости света.

Если же скорость частицы мала по сравнению со скоростью света, то разность

$$W - mc^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \ldots \tag{25.29}$$

будет лишь на малые величины отличаться от обычного выражения для кинетической энергии частицы.

Предыдущие соотношения выведены нами из уравнений движения заряженной частицы, но они имеют общий характер. Так, соотношение (25.26) между массой и энергией справедливо не только для рассмотренного здесь случая материальной точки с неизменной массой покоя, но и для любого сложного тела или системы тел, в которой могут происходить внутренние процессы, меняющие массу покоя. Соотношение это выражает фундаментальный закон пропорциональности между массой и энергией. К рассмотрению этого закона мы вернемся в § 34.

§ 26. Приближенная постановка задачи о движении системы зарядов

Задача о движении системы заряженных материальных точек требует совместного определения движения зарядов и электромагнитного поля, в котором они движутся, причем наперед заданным может считаться только внешнее поле. Передача взаимодействия между зарядами осуществляется полем и происходит с конечной скоростью (со скоростью света). Вследствие этого сила, действующая на данный заряд, будет зависеть не от мгновенного, а от предшествующего состояния движения остальных зарядов. Поле, возникающее при ускоренном движении зарядов, не только передает взаимодействие, но и излучается вовне; поэтому энергия системы зарядов будет частично тратиться на излучение и система не будет консервативной. Кроме того, необходимо помнить, что поле обладает бесконечным числом степеней свободы; поэтому система, состоящая из зарядов и поля, будет, строго говоря, системой с бесконечным числом степеней свободы, а не чисто механической системой.

Тем не менее задачу о движении зарядов можно приближенно формулировать как задачу механики, ограничиваясь степенями свободы самих зарядов. Для этого нужно поле (точнее, потенциалы) каждого из зарядов выразить через его положение и скорость и затем приближенно произвести пересчет от предшествующего момента времени к данному так, чтобы значение потенциалов в данной точке в данный момент времени выражалось через положения и скорости частиц в тот же (а не в предшествующий) момент времени. Таким путем можно построить приближенную функцию Лагранжа для системы частиц.

Найдем сперва лагранжеву форму уравнений движения для одной заряженной частицы. Нетрудно проверить, что уравнения (25.22) получаются из функции Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\Phi + \frac{e}{c}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}), \tag{26.01}$$

где $\Phi = -A_0$ и A_k — скалярный и векторный потенциалы. В самом деле, так как $\dot{x}_i = v_i$, то мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}A_i; \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -e\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{e}{c}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial A_k}{\partial x_i}v_k. \end{aligned}\right\} \tag{26.02}$$

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \tag{26.03}$$

и припоминая выражения (24.01) для поля через потенциалы, мы получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) - e\left\{E_i + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]_i\right\} = 0, \tag{26.04}$$

т. е. уравнения (25.22). Что касается уравнения (25.21), то оно является их следствием.

Перейдем теперь к системе частиц. Найдем приближенные выражения для поля от частицы, движение которой известно. Рассматривая сперва сплошное распределение заряда, мы можем написать уравнения для потенциалов

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho; \tag{26.05}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{26.06}$$

Нужное нам решение уравнения (26.05) есть запаздывающий потенциал

$$\Phi = \int\frac{[\rho]\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{26.07}$$

где

$$[\rho] = \rho(\mathbf{r}', t'); \qquad t' = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \tag{26.08}$$

Если движение частицы достаточно медленное и достаточно плавное *), то на неслишком больших расстояниях от нее можно заменить $[\rho]$ первыми членами разложения этой величины по обратным степеням c и писать

$$[\rho] = \rho(\mathbf{r}', t) - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}', t) + \\ + \frac{1}{2c^2}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(\mathbf{r}', t) + \ldots \tag{26.09}$$

Подставляя это разложение в (26.07) и учитывая, что интеграл

$$\int \rho(\mathbf{r}', t)\, dV' = e_a \tag{26.10}$$

представляет заряд частицы и потому не зависит от времени, мы получим

$$\Phi = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{2c^2}\frac{d^2}{dt^2}\int \rho(\mathbf{r}', t)\cdot|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\, dV' + \ldots \tag{26.11}$$

Если мы будем теперь считать, что заряд сосредоточен вблизи точки **)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(t), \tag{26.12}$$

мы получим из (26.11)

$$\Phi = \frac{e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} + \frac{e_a}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|. \tag{26.13}$$

Полагая

$$\dot{\mathbf{r}}_a(t) = \mathbf{v}_a \tag{26.14}$$

и выполняя в (26.13) одно дифференцирование по времени, будем иметь

$$\Phi = \frac{e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{e_a}{2c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{v}_a\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}\right). \tag{26.15}$$

Здесь первый член представляет кулонов потенциал от неподвижного заряда, а второй — поправку на запаздывание.

В выражении для векторного потенциала можно поправочных членов не учитывать ***) и писать его в виде

$$A_i = \frac{e_a v_{ai}}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \tag{26.16}$$

*) Эти условия налагают ограничения на скорость частицы ($v^2 \ll c^2$) и на ее ускорения различных порядков.

**) Значок a при e_a, $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{v}_a$ и т. д. означает здесь номер частицы.

***) В функции Лагранжа и в уравнениях движения члены с векторным потенциалом будут того же порядка, как члены с поправками к скалярному потенциалу.

(Это значение векторного потенциала получится, если пренебречь в (26.06) второй производной по времени, заменить плотность тока $\mathbf{j}$ на $\rho\mathbf{v}_a$ и затем перейти к сосредоточенному заряду).

Выражение (26.14) для скалярного потенциала неудобно тем, что оно содержит не только скорость $\mathbf{v}_a$, но и ускорение $\dot{\mathbf{v}}_a$ частицы, создающей поле. От этого неудобства легко избавиться, если вспомнить, что поле не меняется при градиентном преобразовании потенциалов, т. е. при замене

$$\left.\begin{aligned} \Phi &\to \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}, \\ A_i &\to A_i - \frac{\partial\chi}{\partial x_i}, \end{aligned}\right\} \tag{26.17}$$

где χ — произвольная функция от координат и времени. Полагая

$$\chi = \frac{e_a}{2c}\frac{\mathbf{v}_a\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}, \tag{26.18}$$

мы уничтожим в (26.15) второй член, хотя и усложним немного выражение для A_i. В результате получится

$$\Phi = \frac{e_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}; \tag{26.19}$$

$$A_i = \frac{e_a}{2c}\left\{\frac{v_{ai}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} + \sum_{k=1}^{3}\frac{v_{ak}(x_k-x_{ak})(x_i-x_{ai})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|^3}\right\}. \tag{26.20}$$

Нетрудно проверить, что расходимость нового выражения для векторного потенциала равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0. \tag{26.21}$$

Подставляя эти значения потенциалов в последние два члена функции Лагранжа (26.01), получим

$$\begin{aligned} -e\Phi + \frac{e}{c}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) = &-\frac{ee_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} + \\ &+\frac{ee_a}{2c^2}\left\{\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_a)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} + \frac{(\mathbf{v}_a\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a))(\mathbf{v}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|^3}\right\}. \end{aligned} \tag{26.22}$$

Это выражение симметрично относительно частицы, порождающей поле, и частицы, на которую поле действует. Мы можем считать его приближенным выражением закона взаимодействия двух частиц. Это позволяет нам написать функцию Лагранжа для системы частиц в виде

$$L = -\sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} +$$
$$+ \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} e_a e_b \left\{ \frac{(\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \frac{(\mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))(\mathbf{v}_b \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \right\}. \quad (26.23)$$

Впрочем, так как величины порядка v^2/c^2 предполагаются малыми в законе взаимодействия, то будет последовательнее пренебрегать более высокими степенями этих величин везде. Беря первые члены разложения корня квадратного по степеням v^2/c^2, мы можем писать вместо (26.23):

$$L = -W_0 + \sum_a \left(\frac{1}{2} m_a v_a^2 + \frac{1}{8} m_a \frac{v_a^4}{c^2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} +$$
$$+ \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} e_a e_b \left\{ \frac{(\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \frac{(\mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))(\mathbf{v}_b \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \right\}, \quad (26.24)$$

где

$$W_0 = c^2 \sum_a m_a \quad (26.25)$$

есть сумма „энергий покоя“ отдельных частиц.

Рассмотрим теперь вопрос о преобразовании Лоренца в задаче о движении системы материальных точек. Пусть задача эта решена для некоторой системы отсчета. Это значит, что в данной системе отсчета известны выражения для координат каждой из частиц в функции от времени t этой системы

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(t). \quad (26.26)$$

Произведем теперь преобразование Лоренца и поставим вопрос: каковы будут в новой системе отсчета выражения для новых координат x'_a, y'_a, z'_a как функций от нового времени t'? Формулы преобразования Лоренца имеют вид:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{\mathbf{V}}{V^2} (\mathbf{V} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{V}t)), \quad (26.27)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(t - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}) \right). \quad (26.28)$$

Поэтому новые функции от нового времени получатся в результате исключения переменной t из уравнений

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a(t) - \mathbf{V}t + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\mathbf{V}}{V^2}\left\{\mathbf{V}\cdot(\mathbf{r}_a(t) - \mathbf{V}t)\right\}, \tag{26.29}$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left\{t - \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a(t)\right)\right\}. \tag{26.30}$$

Другими словами, нужно найти корень t уравнения (26.30) и подставить его в (26.29). Это можно сделать только приближенно, считая $\frac{V^2}{c^2}$ малым по сравнению с единицей. Корень уравнения (26.30) будет приближенно равен

$$t = \left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right)t' + \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a(t')\right). \tag{26.31}$$

Прежде чем подставлять его в уравнение (26.29) напишем это уравнение в упрощенном виде:

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a(t) - \mathbf{V}t + \frac{\mathbf{V}}{2c^2}\left\{\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a(t)\right) - V^2t\right\}. \tag{26.32}$$

Подставляя сюда (26.31), получим приближенно

$$\mathbf{r}'_a(t') = \mathbf{r}_a(t') - \mathbf{V}t' + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{v}_a(t')\cdot\left\{-\frac{1}{2}V^2t' + \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a(t')\right)\right\} - \\ - \frac{\mathbf{V}}{2c^2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a(t')\right), \tag{26.33}$$

где

$$\mathbf{v}_a(t') = \left(\frac{d\mathbf{r}_a(t)}{dt}\right)_{t=t'}. \tag{26.34}$$

Дифференцируя формулу (26.33) по переменной t', получим соответствующее выражение для скорости:

$$\mathbf{v}'_a(t') = \mathbf{v}_a(t') - \mathbf{V} + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{v}_a(t')\left\{-\frac{1}{2}V^2 + \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}_a(t')\right)\right\} - \\ - \frac{\mathbf{V}}{2c^2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}_a(t')\right) + \frac{1}{c^2}\,\dot{\mathbf{v}}_a(t')\left\{-\frac{1}{2}V^2t' + \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a(t')\right)\right\}, \tag{26.35}$$

где $\dot{\mathbf{v}}_a$ есть производная от $\mathbf{v}_a$ по своему аргументу.

Заметим, что связь между t и t' зависит от номера частицы a; это вполне понятно, так как пересчет к новой одновременности требует, для различных частиц, введения различных поправок. Старое определение одновременности, принятое в первоначальной системе отсчета, означало одинаковость значений t для всех частиц (причем значения t' оказываются различными). При новом же определении одновременности, принятом в преобразованной системе отсчета, рассматриваются уже одинаковые для всех частиц значения t' (и различные t). Поэтому мы можем не писать при t' значка a. Заменяя, кроме того, символ t' буквой t без штриха и опуская этот аргумент во всех функциях, входящих в формулы (26.33) и (26.35), мы можем эти формулы написать короче в виде

$$\mathbf{r}_a' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_a\left\{-\frac{1}{2}V^2t + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a)\right\} - \frac{\mathbf{V}}{2c^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a), \tag{26.36}$$

$$\mathbf{v}_a' = \mathbf{v}_a - \mathbf{V} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_a\left\{-\frac{1}{2}V^2 + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}_a)\right\} - \frac{\mathbf{V}}{2c^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}_a) + \\ + \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{v}}_a\left\{-\frac{1}{2}V^2t + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a)\right\}. \tag{26.37}$$

Таков будет вид новых функций $\mathbf{r}_a'$, $\mathbf{v}_a'$, выраженных через новую независимую переменную (обозначенную нами той же буквой, как и старая).

Выведенные нами формулы являются приближенными; однако, если считать, что скорости V и v_a — одного порядка, то сделанные в них пренебрежения — в точности те же, какие приходится делать при построении функции Лагранжа (при учете запаздывания), и они лежат поэтому в существе задачи.

Уравнения движения получаются, как известно, путем вариации интеграла действия

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L\,dt, \tag{26.38}$$

причем, если (как обычно) функция Лагранжа зависит только от координат и скоростей (и, быть может, от времени). то они имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} - \frac{\partial L}{\partial x_a} = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{26.39}$$

Если же в функцию Лагранжа входят также и ускорения, то уравнения движения должны быть написаны в виде

$$-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} - \frac{\partial L}{\partial x_a} = 0 \quad \text{и т. д.,} \tag{26.40}$$

где $\ddot{x}_a$, $\ddot{y}_a$, $\ddot{z}_a$ — составляющие ускорения a-той частицы.

Если интеграл действия S инвариантен по отношению к преобразованию Лоренца, то уравнения движения будут, очевидно, ковариантными.

Рассмотрим, например, уравнения движения одной частицы, получаемые из функции Лагранжа (26.01). В этом случае интеграл действия может быть написан в виде

$$S = -mc^2 \int d\tau + \frac{e}{c} \int \sum_{k=0}^{3} A_k \, dx_k \tag{26.41}$$

(где $x_0 = ct$). Его инвариантность вытекает из инвариантности дифференциала собственного времени $d\tau$ и составленной из потенциалов линейной дифференциальной формы (24.02).

Но для ковариантности уравнений инвариантность интеграла действия S не является необходимой: достаточно, чтобы преобразование Лоренца не меняло *вариации* интеграла действия. Это видно уже на примере выражения (26.41). Если мы совершим над потенциалами градиентное преобразование вида (26.17), где χ — некоторая функция, то S заменится на

$$S' = S - \frac{e}{c}(\chi^{(2)} - \chi^{(1)}), \tag{26.42}$$

где $\chi^{(1)}$ и $\chi^{(2)}$ — значения функции χ на нижнем и на верхнем пределе. Но так как на пределах вариации исчезают, то будет

$$\delta S' = \delta S, \tag{26.43}$$

и уравнения движения не изменятся, как это и должно быть, поскольку градиентное преобразование потенциалов не меняет поля.

Применим эти рассуждения к уравнениям движения системы взаимодействующих зарядов и к функции Лагранжа (26.23). Обозначим через $L'(t')$ выражение, полученное из функции Лагранжа $L(t)$ заменой $\mathbf{r}_a(t)$ на $\mathbf{r}'_a(t')$ и $\mathbf{v}_a(t)$ на $\mathbf{v}'_a(t')$ по формулам (26.33) и (26.35). Если первоначальный интеграл действия был

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L(t)\, dt, \tag{26.44}$$

то преобразованный интеграл будет

$$S' = \int_{(1)}^{(2)} L'(t')\, dt'. \tag{26.45}$$

Таким образом, изменение интеграла действия в результате преобразования Лоренца равно

$$S' - S = \int_{(1)}^{(2)} L'(t')\, dt' - \int_{(1)}^{(2)} L(t)\, dt \tag{26.46}$$

или, если мы в первом интеграле обозначим переменную интегрирования t' той же буквой t, как и во втором,

$$S' - S = \int\limits_{(1)}^{(2)} L'(t)\,dt - \int\limits_{(1)}^{(2)} L(t)\,dt. \tag{26.47}$$

Здесь $L'(t)$ есть выражение, получаемое из $L(t)$ заменой $\mathbf{r}_a$ на $\mathbf{r}'_a$ и $\mathbf{v}_a$ на $\mathbf{v}'_a$ по формулам (26.36) и (26.37).

Из соотношения (26.47) следует, что для ковариантности уравнений движения достаточно, чтобы разность

$$\{L'(t) - L(t)\}\,dt = dF \tag{26.48}$$

была полным дифференциалом некоторой функции F. В самом деле, тогда будет

$$S' - S = F^{(2)} - F^{(1)}, \tag{26.49}$$

где $F^{(2)}$ и $F^{(1)}$ — значения функции F на пределах, и, следовательно, вариации интегралов S и S' будут друг другу равны.

Выполняя вычисления, мы можем убедиться, что соотношение (26.48) действительно выполняется, причем функция F равна

$$F = \sum_a \left(-m_a + \frac{1}{2} m_a \frac{v_a^2}{c^2} - \frac{e_a}{2c^2} \sum_{\substack{b \\ (b \neq a)}} \frac{e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}\right)\left((\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a) - \frac{V^2}{2}t\right) - \\ - \frac{1}{c^2}\sum_a m_a (\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}_a) + \\ + \frac{V^2}{2c^2}\sum_a m_a (\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}_a) + \frac{V^4}{8c^2}\sum_a m_a t. \tag{26.50}$$

Тем самым доказано, что получаемые из функции Лагранжа (26.23) или (26.24) уравнения движения действительно ковариантны (в данном приближении) по отношению к преобразованию Лоренца.

§ 27. Вывод законов сохранения в механике системы точек

Обратимся теперь к выводу интегралов уравнений движения. Для этого рассмотрим изученное в § 23 бесконечно малое преобразование Лоренца, содержащее все десять параметров. Напомним, что параметры эти таковы: изменение начала счета времени τ, смещение начала пространственных координат $\mathbf{a}$, переход к системе отсчета, движущейся относительно первоначальной со скоростью $\mathbf{V}$, бесконечно малый поворот пространственных осей на величину $\boldsymbol{\omega}$. Нам нужно вычислить получаемое в результате такого преобразования изменение вида функций от времени, представляющих координаты каждой частицы. Это изменение $\delta\mathbf{r}_b$ происходит от двух причин:

во-первых, от векторного характера $\mathbf{r}_b$ и, во-вторых, от изменения аргумента t.

Изменение от векторного характера $\mathbf{r}_b$ равно, согласно (23.06) и (23.17),

$$\Delta\mathbf{r}_b = \mathbf{a} - \mathbf{V}t + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_b]. \tag{27.01}$$

Аргумент t меняется для b-той частицы на величину

$$\Delta t_b = \tau - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_b), \tag{27.02}$$

где первый член происходит от изменения начала счета времени, а второй — от перехода к движущейся системе отсчета. [Формула (27.02) есть одно из уравнений (23.06).]

Изменение $\Delta^*\mathbf{r}_b$ вследствие изменения аргумента в функции $\mathbf{r}_b(t)$ получается из равенства

$$\mathbf{r}_b(t) = \mathbf{r}'_b(t') \qquad (t' = t + \Delta t_b), \tag{27.03}$$

откуда

$$\mathbf{r}'_b(t) = \mathbf{r}_b(t - \Delta t_b) = \mathbf{r}_b(t) - \mathbf{v}_b\,\Delta t_b \tag{27.04}$$

и, следовательно,

$$\Delta^*\mathbf{r}_b = \mathbf{r}'_b(t) - \mathbf{r}_b(t) = -\mathbf{v}_b\,\Delta t_b. \tag{27.05}$$

Полное изменение вида функции $\mathbf{r}_b(t)$ будет равно

$$\delta\mathbf{r}_b = \Delta\mathbf{r}_b + \Delta^*\mathbf{r}_b = \Delta\mathbf{r}_b - \mathbf{v}_b\,\Delta t_b. \tag{27.06}$$

Таким образом, согласно (27.01) и (27.02), полное изменение $\delta\mathbf{r}_b$ выразится через параметры бесконечно малого преобразования Лоренца следующим образом:

$$\delta\mathbf{r}_b = -\mathbf{v}_b\tau + \mathbf{a} - \mathbf{V}t + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_b(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_b) + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_b], \tag{27.07}$$

тогда как полное изменение $\delta\mathbf{v}_b$ скорости $\mathbf{v}_b$ будет, очевидно, равно

$$\delta\mathbf{v}_b = \frac{d}{dt}\,\delta\mathbf{r}_b. \tag{27.08}$$

В выражении для $\delta\mathbf{r}_b$ члены, содержащие $\mathbf{V}$, совпадают с членами первого порядка (относительно $\mathbf{V}$) в формуле (26.36), как и должно быть.

Вычислим теперь двумя способами изменение функции Лагранжа в результате бесконечно малого преобразования Лоренца. Первый способ основан на применении уравнений движения, а второй — на непосредственном преобразовании, с использованием формул (26.48) и (26.50). Мы имеем

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta\mathbf{v}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta\mathbf{r}_a\right), \tag{27.09}$$

поскольку функция L не содержит явно времени.

Здесь под $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$ разумеется трехмерный вектор с составляющими $\frac{\partial L}{\partial x_a}$, $\frac{\partial L}{\partial y_a}$, $\frac{\partial L}{\partial z_a}$; аналогичное значение имеет $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}$. Используя уравнения движения и соотношение (27.08), мы можем написать

$$\delta L = \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{r}_a. \tag{27.10}$$

С другой стороны, мы можем вычислить изменение функции Лагранжа L и без использования уравнений движения. Очевидно, что L не меняется при смещении начала и при повороте пространственных координат. При изменении начала счета времени L меняется на величину $-\frac{dL}{dt} \cdot \tau$. В самом деле, если $L'(t') = L(t)$, где $t' = t + \tau$, то

$$L'(t) = L(t - \tau) = L(t) - \tau \frac{dL}{dt}. \tag{27.11}$$

Изменение же L в результате перехода к движущейся системе отсчета дается формулой (26.48), где в качестве F достаточно взять члены первого порядка (относительно $\mathbf{V}$) из (26.50), а именно

$$F = \sum_a \Bigl(-m_a + \frac{1}{2} m_a \frac{v_a^2}{c^2} - \frac{e_a}{2c^2} \sum_{\substack{b \\ (b \neq a)}} \frac{e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \Bigr) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_a). \tag{27.12}$$

Таким образом,

$$\delta L = -\tau \frac{dL}{dt} + \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(-\tau L + F). \tag{27.13}$$

Приравнивая (27.10) и (27.13), получаем

$$\frac{d}{dt} \Bigl\{ \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{r}_a + L\tau - F \Bigr\} = 0, \tag{27.14}$$

откуда

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{r}_a + L\tau - F = \mathrm{const}. \tag{27.15}$$

Левая часть этого выражения представляет линейную функцию от десяти параметров преобразования Лоренца. Подставляя в (27.15) выражения (27.07) и (27.12) для $\delta \mathbf{r}_a$ и для F, мы можем написать:

$$I \equiv -\tau W + \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{K} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} = \mathrm{const}, \tag{27.16}$$

где уже W, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ от параметров не зависят и равны:

$$W=\sum_a \mathbf{v}_a\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}-L, \tag{27.17}$$

$$\mathbf{P}=\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}, \tag{27.18}$$

$$\mathbf{K}=\sum_a\left(m_a-\frac{1}{2}m_a\frac{v_a^2}{c^2}+\frac{e_a}{2c^2}\sum_{\substack{b\\(b\neq a)}}\frac{e_b}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|}+\frac{1}{c^2}\mathbf{v}_a\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}\right)\mathbf{r}_a-t\sum_a\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}, \tag{27.19}$$

$$\mathbf{M}=\sum_a\left[\mathbf{r}_a\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}\right]. \tag{27.20}$$

Левая часть (27.16) должна быть постоянна, каковы бы ни были значения параметров τ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\omega}$. Это возможно только, если величины W, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ сами постоянны. Мы получаем, таким образом, десять интегралов, причем каждый из них связан с определенным параметром в бесконечно малом преобразовании Лоренца. Легко видеть, каков физический смысл этих интегралов: W есть интеграл энергии, $\mathbf{P}$ — интеграл количества движения, $\mathbf{K}$ — интеграл движения центра инерции, $\mathbf{M}$ — интеграл момента количества движения. Таким образом, найденные десять интегралов представляют классические интегралы системы материальных точек с поправками на теорию относительности.

Выпишем найденные интегралы в явной форме. Мы имеем

$$W=c^2\sum_a m_a+\frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2+\frac{3}{8}\sum_a m_a\frac{v_a^4}{c^2}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}}\frac{e_ae_b}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|}+$$
$$+\frac{1}{4c^2}\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\frac{e_ae_b(\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b)}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|}+\frac{1}{4c^2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}}\frac{e_ae_b}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|^3}\big(\mathbf{v}_a\cdot(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b)\big)\big(\mathbf{v}_b\cdot(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b)\big). \tag{27.21}$$

Это есть энергия системы.

Если мы положим

$$W=c^2\sum_a m_a+E, \tag{27.22}$$

то величина E будет энергией в обычной нормировке (эта величина обращается в нуль, когда взаимные расстояния неограниченно возрастают, а скорости равны нулю). Наряду с энергией W мы будем рассматривать соответствующую массу

$$M=\frac{W}{c^2}=\sum_a m_a+\frac{E}{c^2}, \tag{27.23}$$

которую можно называть полной массой системы. Согласно определению (27.23), полная масса системы равна сумме масс покоя отдельных частиц, сложенной с той массой, которая соответствует их кинетической энергии и энергии взаимодействия.

Перейдем к остальным интегралам движения системы. Согласно (27.18), интеграл количества движения равен

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a \left(1 + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) + \\ + \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \left\{ \mathbf{v}_a + \frac{(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)(\mathbf{v}_b \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^2} \right\}. \tag{27.24}$$

Чтобы написать в явной форме интегралы движения центра инерции, положим для краткости

$$M_a^* = m_a \left(1 + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) + \frac{e_a}{2c^2} \sum_{\substack{b \\ (b \neq a)}} \frac{e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}. \tag{27.25}$$

Мы будем тогда иметь

$$\mathbf{K} = \sum_a M_a^* \mathbf{r}_a - t\mathbf{P}. \tag{27.26}$$

Заметим, что

$$\sum_a M_a^* = M, \tag{27.27}$$

где под M следует разуметь выражение (27.23), взятое в том же приближении, в каком дано M_a^* (это соответствует нерелятивистскому приближению для энергии E).

Введем радиус-вектор $\mathbf{R}$ центра инерции системы по формуле

$$M\mathbf{R} = \sum_a M_a^* \mathbf{r}_a. \tag{27.28}$$

Выражение (27.26) для $\mathbf{K}$ примет вид

$$\mathbf{K} = M\mathbf{R} - t\mathbf{P}. \tag{27.29}$$

Постоянство величины $\mathbf{K}$ дает закон движения центра инерции системы.

Наконец, интегралы момента количества движения системы равны

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a \left(1 + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a] + \\ + \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \left\{ [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_b] - \frac{[\mathbf{r}_a \times \mathbf{r}_b](\mathbf{v}_b \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^2} \right\}. \tag{27.30}$$

§ 28. Тензорный характер интегралов движения

Мы должны теперь исследовать, что представляют собой найденные интегралы в смысле их поведения при преобразовании Лоренца. Если бы мы наперед знали, что выражение

$$I = -\tau W + \mathbf{a}\cdot\mathbf{P} + \mathbf{V}\cdot\mathbf{K}_{-} + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{M} \tag{28.01}$$

есть инвариант, то мы могли бы заключить о тензорном характере величин W, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ на основании свойств параметров τ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\omega}$ бесконечно малого преобразования Лоренца. Поскольку, однако, инвариантность выражения (28.01) нами не доказана, мы изберем более прямой путь, хотя он и связан с довольно утомительными выкладками (последних мы приводить не будем). А именно, мы подвергнем величины W, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ конечному преобразованию Лоренца и посмотрим, как они выражаются через первоначальные величины.

Обозначим через W', $\mathbf{P}'$, $\mathbf{K}'$, $\mathbf{M}'$ результаты подстановки в W, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ величин $\mathbf{r}'_a$, $\mathbf{v}'_a$ вместо $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{v}_a$ [формулы (26.36) и (26.37)]. Мы получим

$$W' = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{V^4}{c^4}\right)W - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}), \tag{28.02}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{V}\frac{W}{c^2} + \frac{\mathbf{V}}{2c^2}\left(\mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{P} - \mathbf{V}\frac{W}{c^2}\right)\right), \tag{28.03}$$

или, если ввести полную массу M,

$$c^2M' = \left(c^2 + \frac{1}{2}V^2 + \frac{3}{8}\frac{V^4}{c^2}\right)M - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}), \tag{28.04}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{V}M + \frac{\mathbf{V}}{2c^2}\left(\mathbf{V}\cdot(\mathbf{P} - \mathbf{V}M)\right). \tag{28.05}$$

Последние формулы могут быть с той же точностью написаны в виде

$$c^2M' = \frac{c^2M - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{P})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{28.06}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{V}M + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\mathbf{V}}{V^2}\left(\mathbf{V}\cdot(\mathbf{P} - \mathbf{V}M)\right). \tag{28.07}$$

Сравнивая эти формулы с обычными формулами преобразования Лоренца (26.27) и (26.28), мы видим, что составляющие P_x, P_y, P_z вектора $\mathbf{P}$ преобразуются, как координаты x, y, z, а полная масса M преобразуется, как время t. Это значит, что совокупность величин

$$P^0 = Mc = \frac{W}{c}; \quad P^1 = P_x, \quad P^2 = P_y; \quad P^3 = P_z \tag{28.08}$$

представляет контравариантный вектор. Ковариантные составляющие этого четырехмерного вектора равны

$$P_0 = Mc = \frac{W}{c}; \quad P_1 = -P_x; \quad P_2 = -P_y; \quad P_3 = -P_z. \tag{28.09}$$

Если мы будем рассматривать всю систему зарядов, как одно сложное тело, то мы должны приписать ему массу M и количество движения $\mathbf{P}$. Мы можем также приписать ему (точнее, его центру инерции) скорость

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{M} \tag{28.10}$$

и массу покоя

$$\mu = \sqrt{M^2 - \frac{P^2}{c^2}}. \tag{28.11}$$

Величина μ равна значению M' в той системе отсчета, в которой $\mathbf{P}' = 0$. На этом примере видно, что масса покоя тела зависит от его внутреннего состояния (в данном случае — от состояния движения составляющих его частиц).

Обратимся теперь к закону преобразования величин $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$. Производя ту же подстановку (26.36) и (26.37), мы получим для $\mathbf{K}'$ и $\mathbf{M}'$ выражения:

$$\mathbf{K}' = \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)\mathbf{K} - \frac{1}{2c^2}\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{K}) - \frac{1}{c^2}[\mathbf{V}\times\mathbf{M}], \tag{28.12}$$

$$\mathbf{M}' = \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)\mathbf{M} - \frac{1}{2c^2}\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{M}) + \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)[\mathbf{V}\times\mathbf{K}]. \tag{28.13}$$

С той же точностью эти формулы могут быть написаны в виде

$$\mathbf{K}' = \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{K}) + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left\{\mathbf{K} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{K}) - \frac{1}{c^2}[\mathbf{V}\times\mathbf{M}]\right\}, \tag{28.14}$$

$$\mathbf{M}' = \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{M}) + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left\{\mathbf{M} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{M}) + [\mathbf{V}\times\mathbf{K}]\right\}. \tag{28.15}$$

Сравним эти формулы с законом преобразования антисимметричного тензора, причем будем иметь в виду, что в смысле трехмерного векторного анализа $\mathbf{K}$ представляет собою полярный, а $\mathbf{M}$ — аксиальный вектор. Соответствующие формулы преобразования выписаны нами в § 24 для случая тензора электромагнитного поля [формулы (24.37) и (24.38)]. Для того чтобы получить совпадение, мы должны считать, что вектор $\mathbf{M}$ преобразуется как $\mathbf{H}$, а вектор $\mathbf{K}$ как $-\frac{1}{c}\mathbf{E}$. [Другая возможность $\mathbf{M} \sim \mathbf{E}$, $\mathbf{K} \sim \frac{1}{c}\mathbf{H}$ устраняется тем, что $\mathbf{K}$ и $\mathbf{E}$

представляют полярные, а **M** и **H** — аксиальные векторы.] Таким образом, мы можем ввести антисимметричный тензор с ковариантными составляющими:

$$\left.\begin{aligned} M_{23} &= M_x; & M_{31} &= M_y; & M_{12} &= M_z, \\ M_{10} &= -cK_x; & M_{20} &= -cK_y; & M_{30} &= -cK_z, \end{aligned}\right\} \tag{28.16}$$

или, что то же, с контравариантными составляющими:

$$\left.\begin{aligned} M^{23} &= M_x; & M^{31} &= M_y; & M^{12} &= M_z, \\ M^{10} &= cK_x; & M^{20} &= cK_y; & M^{30} &= cK_z. \end{aligned}\right\} \tag{28.17}$$

Проверкой служит то, что для одной частицы

$$\left.\begin{aligned} M_x &= m(x^2u^3 - x^3u^2) \quad \text{и т. д.}, \\ cK_x &= m(x^1u^0 - x^0u^1) \quad \text{и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{28.18}$$

Здесь через u^0, u^1, u^2, u^3 обозначены составляющие четырехмерной скорости; для координат и времени введены обозначения с верхними значками $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ для того, чтобы подчеркнуть, что они представляют контравариантные величины.

Таким образом, мы выяснили, что из десяти интегралов движения четыре (а именно, энергия и количество движения) представляют четырехмерный вектор, а остальные шесть (интегралы центра инерции и момента количества движения) — антисимметричный тензор. Это позволяет утверждать, что если эти величины постоянны в какой-нибудь одной системе отсчета, то они будут постоянными и во всякой другой системе отсчета. То обстоятельство, что законы преобразования выведены нами из приближенных формул, связано с приближенным характером всей постановки задачи: мы уже упоминали, что, строго говоря, энергия и количество движения системы зарядов вообще не остаются постоянными, а могут тратиться на излучение.

Зная тензорный характер интегралов движения, мы можем проверить, что выражение (28.01) действительно представляет собою инвариант. Для этого достаточно переписать выражение для I в четырехмерных обозначениях. Согласно результатам § 23, мы имеем

$$\tau = \frac{1}{c}a_0; \quad a_x = -a_1; \quad a_y = -a_2; \quad a_z = -a_3, \tag{28.19}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 есть ковариантный вектор.

Далее,

$$V_x = c\omega_{10}; \quad V_y = c\omega_{20}; \quad V_z = c\omega_{30}, \tag{28.20}$$

$$\omega_x = \omega_{23}; \quad \omega_y = \omega_{31}; \quad \omega_z = \omega_{12}, \tag{28.21}$$

где ω_{ik} — ковариантные составляющие антисимметричного тензора. Пользуясь четырехмерными обозначениями (28.08) и (28.17) для интегралов движения, мы будем иметь вместо (28.01)

$$I = -a_0 P^0 - a_1 P^1 - a_2 P^2 - a_3 P^3 + \\ + \omega_{10} M^{10} + \omega_{20} M^{20} + \omega_{30} M^{30} + \omega_{23} M^{23} + \omega_{31} M^{31} + \omega_{12} M^{12}, \quad (28.22)$$

или короче

$$I = -\sum_{i=0}^{3} a_i P^i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{3} \omega_{ik} M^{ik}, \quad (28.23)$$

что и доказывает наше утверждение об инвариантности величины I.

§ 29. Замечания по поводу обычной формулировки законов сохранения

В этом параграфе мы сделаем некоторые замечания критического характера по поводу обычной формулировки законов сохранения. Для определенности мы будем говорить о законах сохранения энергии и количества движения, так как они рассматриваются чаще всего.

Выражения для энергии (или полной массы) и для количества движения обычно пишутся в форме

$$W = Mc^2 = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}, \quad (29.01)$$

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \quad (29.02)$$

и относительно них делаются два утверждения: во-первых, что эти величины представляют четырехмерный вектор, и, во-вторых, что они остаются постоянными.

Оба утверждения справедливы, однако, лишь в том случае, когда частицы не взаимодействуют. Но тогда скорость каждой частицы в отдельности остается постоянной, и каждая четверка величин

$$W^{(a)} = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{P}^{(a)} = \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \quad (29.03)$$

будет представлять постоянный четырехмерный вектор. Таким образом, при отсутствии взаимодействия постоянство сумм (29.01) и (29.02) вытекает тривиальным образом из постоянства отдельных членов (29.03), и составление сумм не дает ничего нового.

При наличии же взаимодействия выражения (29.01) и (29.02) не будут постоянными и не будут представлять четырехмерного вектора.

Первое понятно непосредственно, так как даже в нерелятивистском приближении постоянной будет не кинетическая, а полная энергия системы частиц.

Теория относительности вносит поправки, соответствующие взаимодействию, не только в выражение для энергии, но и в выражение для количества движения системы [см. (27.21) и (27.24)]. Лишь с этими поправками оба выражения будут постоянными. Что касается векторных свойств, то на первый взгляд может показаться парадоксальным следующее обстоятельство. Как мы видели в § 25 [формулы (25.23) и (25.24)], для одной частицы совокупность четырех величин (29.03) представляет четырехмерный вектор также и в случае ускоренного движения; далее, сумма векторов есть, как будто, тоже вектор. Между тем мы утверждаем, что суммы (29.01) и (29.02) не представляют собой составляющих четырехмерного вектора. Парадокс разъясняется тем, что величины $W^{(a)}$, $\mathbf{P}^{(a)}$ являются функциями от времени, общего для всех частиц. Их суммы W, $\mathbf{P}$ представляют суммы *одновременных в данной системе отсчета* значений $W^{(a)}$, $\mathbf{P}^{(a)}$. В другой системе отсчета эти значения уже не будут одновременными. Поэтому при переходе к новой системе отсчета нужно не только составить из $W^{(a)}$, $\mathbf{P}^{(a)}$ линейные комбинации по правилам для векторов, но и пересчитать эти величины к новой одновременности (как это разъяснено в § 26). Такой пересчет не даст ничего нового лишь в случае постоянных $W^{(a)}$, $\mathbf{P}^{(a)}$; в общем же случае он требует учета изменения этих величин за время, соответствующее переходу от старой одновременности к новой (все это приближенно проделано в § 26). Поэтому ясно, что для невзаимодействующих частиц суммы $W = \sum_a W^{(a)}$ и $\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{P}^{(a)}$ будут обладать векторными свойствами, а для взаимодействующих частиц они ими обладать не будут.

При наличии взаимодействия векторными свойствами и постоянством во времени будут, в рассматриваемом приближении, обладать те выражения для интегралов движения, которые выведены в § 27. Эти выражения отличаются от (29.01) и (29.02), с одной стороны, учетом членов взаимодействия и, с другой стороны, тем, что величины $\dfrac{m_a}{\sqrt{1-\dfrac{v_a^2}{c^2}}}$ заменены в них первыми членами разложения в ряд по степеням v_a^2/c^2, причем разложение доведено до членов того же порядка, какой учитывается в членах взаимодействия.

Может, однако, оказаться, что вследствие больших расстояний между частицами члены взаимодействия играют незначительную роль, но что, в то же время, скорости частиц весьма велики. В этом предельном случае весьма быстрых, слабо взаимодействующих частиц можно пользоваться выражениями (29.01) и (29.02). При этом, однако, необходимо помнить, что эти выражения применимы лишь *до начала* и *после конца* взаимодействия, тогда как в промежуточное время они не применимы.

В указанном предельном случае можно применять законы сохранения энергии и количества движения в обычной форме

$$\sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{\overset{*}{v}{}_a^2}{c^2}}}, \tag{29.04}$$

$$\sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \sum_a \frac{m_a \overset{*}{\mathbf{v}}_a}{\sqrt{1-\frac{\overset{*}{v}{}_a^2}{c^2}}}, \tag{29.05}$$

где $\mathbf{v}_a$ и $\overset{*}{\mathbf{v}}_a$ — значения скорости a-той частицы до начала и после конца взаимодействия. Из сказанного ясно, что левые части этих равенств не остаются постоянными во все время взаимодействия, но что после окончания взаимодействия они принимают первоначальное значение (то, которое они имели до его начала).

Сделанные в этом параграфе замечания в равной мере относятся и к обычной формулировке закона сохранения момента количества движения, в которой члены взаимодействия не учитываются.

§ 30. Вектор потока энергии (вектор Умова)

Рассмотрим обычные нерелятивистские уравнения движения механики сплошной среды. Они имеют вид:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{30.01}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{30.02}$$

Здесь v_1, v_2, v_3 — составляющие скорости частицы среды, ρ — плотность среды, p_{ik} — тензор *) напряжений, F_i — составляющие внешней силы, действующей на единицу массы. Входящее в левую часть (30.01) выражение для ускорения $\frac{dv}{dt}$ есть так называемая субстанциальная

*) В этом параграфе мы употребляем термины „вектор“ и „тензор“ в трехмерном их значении.

производная, равная

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{30.03}$$

Уравнение (30.02) принято называть уравнением неразрывности. Оно выражает, как известно, закон сохранения массы.

Система уравнений (30.01) и (30.02) сама по себе еще не является полной; она не позволяет, по заданным начальным и предельным условиям, находить движение среды. Чтобы получить полную систему уравнений, нужно, во-первых, выразить тензор напряжений через другие величины, как то: деформации, скорости, давление, температуру, электромагнитное и другие поля, и затем, если число неизвестных функций будет больше четырех [т. е. больше числа уравнений (30.01) и (30.02)], добавить к уравнениям движения ряд других уравнений, как то: уравнение состояния, уравнение притока тепла, уравнения поля и др.

В дальнейшем мы ограничимся случаем консервативной системы при отсутствии внешних сил.

Рассмотрим сперва упругую сжимаемую среду. Мы можем ввести тогда потенциальную энергию Π единицы массы среды и выразить тензор напряжений через нее. Пусть a_1, a_2, a_3 — переменные Лагранжа, в качестве которых можно взять начальные координаты частицы среды. Координаты частицы в момент времени t будут тогда

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{30.04}$$

и деформация среды будет характеризоваться совокупностью величин

$$A_{mn} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_i}{\partial a_n}. \tag{30.05}$$

Потенциальная энергия Π будет функцией от деформаций, причем, если положить

$$d\Pi = \frac{1}{2\rho} \sum_{m, n=1}^{3} P^{mn}\, dA_{mn} \qquad (P^{mn} = P^{nm}), \tag{30.06}$$

то составляющие тензора напряжений p_{ik} выразятся через коэффициенты P^{mn} следующим образом:

$$p_{ik} = \sum_{m, n=1}^{3} P^{mn} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_k}{\partial a_n} \qquad (p_{ik} = p_{ki}). \tag{30.07}$$

Из этих формул нетрудно вывести соотношение

$$\rho \frac{d\Pi}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right) = \sum_{i, k=1}^{3} p_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{30.08}$$

В случае жидкости

$$p_{ik} = -p\delta_{ik}, \tag{30.09}$$

где p — давление, так что тензор p_{ik} сводится к скаляру. В этом случае уравнение (30.08) приводится, в силу (30.02), к виду

$$\rho \frac{d\Pi}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \tag{30.10}$$

и дает обычное выражение

$$\Pi = \int \frac{p\, d\rho}{\rho^2} = \int \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho} \tag{30.11}$$

для потенциальной энергии единицы массы жидкости. В случае бесконечно малых деформаций (обычная теория упругости) соотношение (30.08) также легко проверяется непосредственно, без перехода к переменным Лагранжа.

Интересно сопоставить соотношение (30.08) с термодинамическим тождеством

$$\rho \frac{du}{dt} = \sum_{i,\, k=1}^{3} p_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \rho T \frac{d\sigma}{dt}, \tag{30.12}$$

в котором u — внутренняя энергия, σ — энтропия и T — температура. Для изотермических процессов можно положить

$$\Pi = u - T\sigma = F, \tag{30.13}$$

где F — свободная энергия, а для адиабатических

$$\Pi = u. \tag{30.14}$$

Обратимся теперь к уравнениям движения. При помощи уравнения неразрывности (30.02) можно три уравнения (30.01) написать в виде

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k - p_{ik}) = 0. \tag{30.15}$$

Подобно тому, как уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = 0 \tag{30.02}$$

выражает закон сохранения массы, уравнение (30.15) можно считать выражающим закон сохранения количества движения. В уравнении неразрывности скалярная величина ρ есть плотность массы, а вектор с составляющими ρv_i ($i = 1, 2, 3$) есть плотность потока массы. Подобно этому, в уравнении (30.15) вектор ρv_i есть плотность количества движения, а тензор

$$S_{ik} = \rho v_i v_k - p_{ik} \tag{30.16}$$

есть плотность потока количества движения. При этом вектор ρv_i входит один раз как плотность потока массы и другой раз как плотность количества движения. Подобно этому, величина S_{ik} входит один раз как i-ая составляющая потока ρv_k, а другой раз как k-ая составляющая потока ρv_i (напомним, что $S_{ik} = S_{ki}$).

Мы сейчас видели, что уравнение неразрывности и уравнения движения, написанные в форме (30.02) и (30.15), могут быть истолкованы, как законы сохранения массы и количества движения. Естественно попытаться написать в аналогичном виде и закон сохранения энергии. Это было впервые сделано Умовым, который еще в 1874 г. ввел важное понятие о потоке энергии [4], [5].

Введем скалярную величину

$$S = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi \tag{30.17}$$

и вектор с составляющими

$$S_i = v_i\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right) - \sum_{k=1}^{3} p_{ik} v_k. \tag{30.18}$$

В этих формулах П означает попрежнему потенциальную энергию единицы массы. Очевидно, что в выражении для S первый член есть плотность кинетической энергии, а второй член — плотность потенциальной энергии. Таким образом, величина S есть объемная плотность энергии. Вектор S_i, который мы будем называть вектором Умова *), может быть истолкован, как вектор потока энергии. В самом деле, используя уравнения движения, уравнение неразрывности, а также соотношение (30.08), нетрудно проверить справедливость равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial S_i}{\partial x_i} = 0, \tag{30.19}$$

которое и можно рассматривать, как выражение закона сохранения энергии.

Заметим, что если даны уравнения движения (30.15), то лишь одно из уравнений: уравнение неразрывности (30.02) или уравнение потока энергии (30.16), будет независимым; другое получится из него и из уравнений движения. Вместо уравнения неразрывности или урав-

*) Рассмотренные Умовым выражения для S и S_i отличаются от приведенных здесь отсутствием членов с потенциальной энергией. Поэтому в правой части соответствующего соотношения Умова стоит не нуль, а взятое со знаком минус выражение (30.08), т. е. работа сил упругости в единице объема за единицу времени.

нения потока энергии можно взять их линейную комбинацию, рассмотрев величину $\rho + \lambda S$ и ее поток $\rho v_i + \lambda S_i$, где λ есть постоянная, имеющая размерность, обратную квадрату скорости. В следующем параграфе мы увидим, что релятивистской форме уравнений движения сплошной среды приближенно соответствует линейная комбинация указанного вида со значением постоянной λ, равным $\lambda = \frac{1}{c^2}$.

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. Если задана некоторая величина (например S), то ее поток (вектор $\mathbf{S}$) определяется из соответствующего закона сохранения по заданной его расходимости. Но без наложения дополнительных условий такое определение неоднозначно. В самом деле, если уравнению вида (30.16) удовлетворяет вектор $\mathbf{S}$ (с составляющими S_i), то ему же удовлетворяет вектор $\mathbf{S} + \operatorname{curl} \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — произвольный вектор. Тем не менее, поток *сквозь замкнутую поверхность* определяется вполне однозначно, так как для замкнутой поверхности

$$\int (\operatorname{curl} \mathbf{A})_n \, d\sigma = 0 \tag{30.20}$$

каков бы ни был вектор $\mathbf{A}$.

По своему физическому смыслу вектор потока является, однако, вполне определенной величиной. Поэтому следует ожидать, что путем наложения дополнительных условий можно и формально сделать определение его однозначным. Одним из таких условий является требование, чтобы вектор потока величины S, которая является функцией состояния системы, сам являлся функцией состояния. Это требование будет точнее формулировано и подробно обсуждено в следующем параграфе. Ему удовлетворяет в рассмотренных здесь примерах поток энергии (вектор Умова), поток массы и поток количества движения.

§ 31. Тензор массы

В предыдущем параграфе мы видели, что в случае консервативной системы обычные нерелятивистские уравнения движения сплошной среды могут быть написаны в виде равенства нулю четырех выражений, которые представляют сумму производных по координатам и по времени. Такая форма уравнений движения заставляет думать, что их релятивистским обобщением должны быть уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T^{00}}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial T^{i0}}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{31.01}$$

где T^{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ есть некоторый тензор.

Первое из этих уравнений должно выражать закон сохранения массы и энергии, а остальные три (для $i = 1, 2, 3$) — закон сохранения количества движения. Если T^{00} есть плотность всей массы (включая массу покоя и массу кинетической энергии), то cT^{0i} есть плотность потока массы. Далее, если cT^{i0} есть плотность i-той составляющей количества движения, то c^2T^{ik} $(k = 1, 2, 3)$ представляет плотность потока для этой составляющей. Масса M, заключенная в некотором объеме, и соответствующая ей энергия W выразятся через T^{00} в виде интеграла по объему:

$$M = \frac{W}{c^2} = \int T^{00}\,dV. \tag{31.02}$$

Аналогично, количество движения, заключенное в том же объеме, будет равно

$$P^i = c\int T^{i0}\,dV. \tag{31.03}$$

Уравнения (31.01) выражают тот факт, что увеличение энергии или количества движения, заключенных внутри некоторого объема, происходит только за счет притока этих величин извне (т. е. сквозь поверхность, ограничивающую этот объем). Интегралы (31.02) и (31.03), распространенные по всему объему, представляют полную массу и полное количество движения системы. Эти величины остаются постоянными (не зависят от времени t).

Кроме законов сохранения массы, энергии и количества движения, должны иметь место законы сохранения момента количества движения, а также законы движения центра инерции системы. Их можно написать в форме, аналогичной (31.01). Из уравнений (31.01) вытекают соотношения

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x_0}(x_iT^{k0} - x_kT^{i0}) + \sum\limits_{m=1}^{3}\dfrac{\partial}{\partial x_m}(x_iT^{km} - x_kT^{im}) = T^{ki} - T^{ik} \\ (i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\}. \tag{31.04}$$

Эти соотношения будут иметь форму законов сохранения, если правая часть их обратится в нуль. Мы получаем условие

$$T^{ik} = T^{ki}, \tag{31.05}$$

согласно которому тензор T^{ik} должен быть симметричным. Это условие означает, в частности, что поток массы равен количеству движения не только для уравнений механики, но и в самом общем случае. Соотношения (31.04) для симметричного тензора мы выпишем отдельно для $k = 1, 2, 3$ и для $k = 0$.

Мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(x_i T^{k0} - x_k T^{i0}) + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}(x_i T^{km} - x_k T^{im}) = 0, \quad (31.06)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(x_i T^{00} - x_0 T^{i0}) + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}(x_i T^{0m} - x_0 T^{im}) = 0, \quad (31.07)$$

где i, $k = 1, 2, 3$. Формулы (31.06) можно рассматривать, как законы сохранения момента количества движения, а формулы (31.07) — как законы движения центра инерции системы (те и другие выражены в дифференциальной форме). Если проинтегрировать эти выражения по некоторому объему, получатся соответствующие интегральные соотношения.

Если интегралы

$$M^{ik} = c \int (x_i T^{k0} - x_k T^{i0})\, dV, \quad (31.08)$$

$$K^i = \frac{1}{c} M^{i0} = \int (x_i T^{00} - x_0 T^{i0})\, dV \quad (31.09)$$

распространить по всему объему, то они будут оставаться постоянными. При этом M^{23}, M^{31}, M^{12} будут составляющими момента количества движения системы, а деленные на c величины M^{10}, M^{20}, M^{30} можно толковать, как произведение массы системы на начальные координаты ее центра инерции.

Рассмотренный здесь тензор T^{ik} мы будем называть тензором массы *). Инвариант тензора T^{ik} имеет размерность плотности массы. Умноженный на c^2 тензор T^{ik} называют также тензором энергии; инвариант этого тензора имеет размерность плотности энергии.

Мы наложим на тензор массы еще одно условие, которое можно формулировать в виде следующего физического принципа. *Тензор массы должен быть функцией состояния системы*. Уточним, что мы разумеем под состоянием.

Допустим, что уравнения движения и уравнения поля написаны в виде системы n уравнений первого порядка для неизвестных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, причем эти уравнения могут быть решены относительно производных по времени. Задание начальных значений функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ определяет (вместе с краевыми или иными условиями) их значения во всякий последующий момент времени (принцип причинности). Тогда мы будем говорить, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ характеризуют состояние системы. Всякую функцию от $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, не содержащую их производных по времени, а также не содержащую

*) Мы предпочитаем это название часто употребляемому названию „тензор материи". Понятие „материя" имеет весьма общий характер и его не следует отождествлять с понятием „масса".

явным образом координат, мы будем называть функцией состояния. (Заметим, что в теории относительности производные по координатам и по времени входят симметричным образом; поэтому, если некоторый скаляр, вектор или тензор не содержит производных по времени, то он не содержит также и производных по координатам).

Приведем примеры. В механике системы точек состояние характеризуется координатами и скоростями частиц; всякая функция от координат и скоростей будет функцией состояния. В гидродинамике состояние характеризуется тремя составляющими скорости, плотностью и давлением (последние две величины мы предполагаем связанными некоторым уравнением). В теории электромагнитного поля состояние характеризуется антисимметричным тензором поля.

Таким образом, наш физический принцип *) требует, чтобы составляющие тензора массы содержали только функции, характеризующие состояние системы. Они не должны содержать производных от этих функций, а также не должны содержать явным образом координат (само собою разумеется, мы имеем в виду прямоугольные составляющие).

Обратимся к вопросу о том, насколько однозначно определяется тензор массы из поставленных условий. Рассмотрим сперва уравнения, выражающие равенство нулю расходимости тензора массы,

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{31.10}$$

а также условие симметрии $T^{ik} = T^{ki}$. Кроме того, поставим условие, чтобы десять интегралов уравнений (величины W, P^i, M^{ik}) имели заданное значение.

Пусть $A^{im,\,nk}$ есть некоторый тензор четвертого ранга, обладающий следующими свойствами симметрии: антисимметрия в первой паре значков

$$A^{im,\,nk} = -A^{mi,\,nk} \tag{31.11}$$

антисимметрия во второй паре значков

$$A^{im,\,nk} = -A^{im,\,kn} \tag{31.12}$$

и циклическая симметрия

$$A^{im,\,nk} + A^{in,\,km} + A^{ik,\,mn} = 0. \tag{31.13}$$

Из этих свойств следует, что

$$A^{im,\,nk} = A^{nk,\,im}. \tag{31.14}$$

*) Этот принцип, повидимому, никем не был явным образом формулирован. Однако все применяемые формы тензора массы фактически ему удовлетворяют.

Из вторых производных тензора $A^{im,\,nk}$ построим тензор

$$B^{ik}=\sum_{m,\,n=0}^{3}\frac{\partial^2 A^{im,\,nk}}{\partial x_m\,\partial x_n},\tag{31.15}$$

который будем называть тензором Круткова *). Нетрудно видеть, что тензор Круткова будет симметричным. Далее, в силу антисимметрии $A^{im,\,nk}$ в значках n, k мы имеем тождественно

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial B^{ik}}{\partial x_k}=0.\tag{31.16}$$

Кроме того, тензор Круткова обладает следующим свойством. Если в интегралах вида M, P^i, M^{ik}, K^i [формулы (31.02), (31.03), (31.08), (31.09)] заменить тензор T^{ik} тензором Круткова B^{ik}, то эти объемные интегралы приведутся к поверхностным. При условии, что тензор $A^{im,\,nk}$ и его первые производные обращаются в нуль на поверхности, ограничивающей данный объем (или, если рассматривается все пространство, достаточно быстро убывают на бесконечности), составленные из B^{ik} интегралы эти обратятся в нуль.

Пусть T^{ik} — данный тензор массы. Прибавив к нему тензор Круткова B^{ik}, мы получим новый тензор

$$\overset{*}{T}{}^{ik}=T^{ik}+B^{ik},\tag{31.17}$$

который будет обладать следующими свойствами. Во-первых, он будет симметричным, во-вторых, в силу (31.10) и (31.16), он будет удовлетворять уравнению

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial \overset{*}{T}{}^{ik}}{\partial x_k}=0.\tag{31.18}$$

Наконец, составленные при помощи $\overset{*}{T}{}^{ik}$ интегралы $\overset{*}{M}$, $\overset{*}{P}{}^i$, $\overset{*}{M}{}^{ik}$, $\overset{*}{K}{}^i$ будут равны таким же интегралам, составленным при помощи данного тензора T^{ik}.

Таким образом, если не принимать во внимание требования, чтобы тензор массы был функцией состояния, то тензор $\overset{*}{T}{}^{ik}$, связанный с T^{ik} формулой (31.17), будет удовлетворять всем остальным условиям.

---

*) В случае трех измерений обладающий указанными свойствами симметрии тензор четвертого ранга $A^{im,\,nk}$ сводится к симметричному тензору второго ранга с составляющими $\gamma_{11}=A^{23,\,23}$, $\gamma_{22}=A^{31,\,31}$, $\gamma_{33}=A^{12,\,12}$, $\gamma_{23}=A^{31,\,12}$, $\gamma_{31}=A^{12,\,23}$, $\gamma_{12}=A^{23,\,31}$. Тензор γ_{pq} введен и широко использован Ю. А. Крутковым в его книге [10].

Иначе говоря, при игнорировании этого требования тензор массы не определяется однозначным образом.

Однако наше требование, чтобы тензор массы был функцией состояния, совершенно меняет положение вещей, и определение тензора массы становится однозначным. В самом деле, предположим, что тензор T^{ik} есть функция состояния, так что он удовлетворяет всем поставленным условиям, включая указанное наше требование. Если даже тензор четвертого ранга $A^{im,\,nk}$ тоже есть функция состояния, то его вторые производные этим свойством обладать не будут, и прибавка их к T^{ik} недопустима.

Мы приходим к выводу, что из совокупности физических условий тензор массы определяется единственным образом *). Этот вывод становится особенно существенным в теории тяготения, так как уравнения этой теории содержат самый тензор массы, а не только его расходимость.

Когда мы писали уравнения движения в виде равенства нулю четырехмерной расходимости, мы тем самым предполагали нашу физическую систему консервативной. Сделаем одно общее замечание о системах неконсервативных.

Так как закон сохранения энергии имеет всеобщий характер, то под неконсервативными следует разуметь такие системы, в которых некоторые виды энергии (например, тепловая) явным образом не учитываются. Если имеется некоторый вид энергии, участвующий в общем балансе энергии, но не включенный в тензор T^{ik}, то расходимость этого тензора не будет равняться нулю: в уравнениях (31.01) справа будет стоять приток этого вида энергии и соответствующего количества движения в единицу объема. В дальнейшем мы будем иметь дело только с консервативными системами.

§ 32. Примеры тензора массы

Мы рассмотрим теперь явный вид тензора массы в некоторых конкретных случаях.

Мы начнем с простейшего случая „пылевидной" материи, т. е. такой, частицы которой не взаимодействуют, причем, однако, их скорости распределены непрерывно, так что существует некоторое поле скоростей. Для тензора массы в этом случае мы введем особое обозначение Θ^{ik}. Обозначим через ρ^* инвариантную плотность массы, т. е. плотность, отнесенную к той системе отсчета, относительно которой частицы данного элемента объема в данный момент покоятся („сопутствующая" система отсчета). Пусть u^i есть четырех-

---

*) Для ряда случаев, включая все случаи, рассмотренные в § 32 и 33, единственность тензора массы при поставленных нами условиях строго доказана В. М. Шехтером [11].

мерная скорость частиц. Положим

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2} \rho^* u^i u^k. \tag{32.01}$$

По определению, Θ^{ik} есть четырехмерный контравариантный тензор. Его дважды нулевая составляющая равна

$$\Theta^{00} = \frac{1}{c^2} \rho^* (u^0)^2 = \frac{\rho^*}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{32.02}$$

Эта составляющая должна равняться плотности всей массы, включая массу кинетической энергии. Покажем, что это так и есть. Действительно, если ρ^* есть плотность массы покоя в сопутствующей системе отсчета, то плотность массы покоя в лабораторной системе отсчета (относительно которой частица движется со скоростью $\mathbf{v}$) есть

$$\rho = \frac{\rho^*}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{32.03}$$

Далее, если ρ есть плотность массы покоя, то плотность всей массы (включая массу кинетической энергии) равна

$$\frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\rho^*}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Theta^{00}. \tag{32.04}$$

Эта формула для плотности соответствует обычной формуле

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{32.05}$$

для массы отдельной частицы. Другие составляющие тензора массы в трехмерном написании равны

$$\Theta^{0i} = \frac{1}{c} \frac{\rho^* v_i}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{c} \frac{\rho v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{32.06}$$

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2} \frac{\rho^* v_i v_k}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{c^2} \frac{\rho v_i v_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{32.07}$$

Составим теперь расходимость тензора Θ^{ik}. Мы имеем

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{c^2} u^i \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial (\rho^* u^k)}{\partial x_k} + \frac{\rho^*}{c^2} \sum_{k=0}^{3} u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k}. \tag{32.08}$$

Для входящих сюда сумм мы введем особые обозначения. Положим

$$Q^* = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial (\rho^* u^k)}{\partial x_k}, \tag{32.09}$$

$$w^i = \sum_{k=0}^{3} u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k}. \tag{32.10}$$

Эти формулы можно написать в виде

$$Q^* = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}), \tag{32.11}$$

$$w^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial u^i}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{du^i}{dt}, \tag{32.12}$$

где $\frac{d}{dt}$ есть субстанциальная производная. Отсюда видно, что инвариант Q^* есть увеличение массы покоя в единице жидкого объема за единицу времени *), а вектор w^i есть четырехмерное ускорение, пространственные составляющие которого совпадают, в нерелятивистском приближении, с обычным ускорением. Таким образом

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x_k} = \frac{Q^*}{c^2} u^i + \frac{\rho^*}{c^2} w^i. \tag{32.13}$$

В силу уравнений движения это выражение должно равняться нулю. Но мы имеем тождественно

$$\sum_{i=0}^{3} u_i u^i = c^2; \qquad \sum_{i=0}^{3} u_i w^i = 0. \tag{32.14}$$

Поэтому уравнение

$$Q^* u^i + \rho^* w^i = 0 \tag{32.15}$$

равносильно уравнениям

$$Q^* = 0; \qquad w^i = 0. \tag{32.16}$$

Первое из них представляет уравнение неразрывности, выражающее неизменность массы покоя частиц. В данном случае масса покоя частиц не меняется потому, что они не взаимодействуют и их внут-

*) Под жидким объемом мы разумеем, как принято, объем элемента жидкости, составленного из одних и тех же частиц.

ренняя энергия остается постоянной. Второе уравнение (32.16) выражает постоянство четырехмерной (а следовательно, и трехмерной) скорости. То, что не взаимодействующие частицы должны двигаться с постоянной скоростью, также является физически очевидным. Так как уравнения движения — первого порядка относительно входящих в Θ^{ik} величин ρ^* и u^i, то ясно, что тензор массы Θ^{ik} есть функция состояния. Таким образом, вид тензора массы для случая пылевидной материи может считаться установленным.

Переходим теперь к обобщению уравнений гидродинамики идеальной жидкости. В нерелятивистской теории этот случай характеризуется тем, что тензор напряжений сводится к скаляру. Это условие легко допускает релятивистское обобщение. Предположим, что умноженный на c^2 тензор массы (тензор энергии) имеет вид

$$c^2 T^{ik} = \left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) u^i u^k - p e_k \delta_{ik}, \tag{32.17}$$

где μ^* и p — четырехмерные скаляры, связанные соотношением

$$\mu^* = f(p). \tag{32.18}$$

В сопутствующей системе отсчета (относительно которой скорость в данной точке в данный момент времени равна нулю) составляющая T^{00} тензора массы равна μ^*. Поэтому величина μ^* представляет плотность массы покоя жидкости. Так как жидкость предполагается упругой и может обладать потенциальной энергией сжатия, то здесь в массу покоя включена масса, соответствующая этой энергии. Поскольку энергия сжатия может меняться, масса покоя жидкого объема не будет оставаться постоянной. Имея это в виду, мы ввели для плотности полной массы покоя особое обозначение μ^*, оставляя символ ρ^* для плотности той части массы покоя, которая в ходе процесса не меняется.

Составим уравнения движения. Полагая для краткости

$$Q = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) u^k\right] \tag{32.19}$$

и пользуясь введенным выше обозначением w^i для ускорения, мы будем иметь

$$c^2 \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = Q u^i + \left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) w^i - e_i \frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{32.20}$$

При отсутствии внешних сил это выражение равно нулю.

Используя равенства (32.14), получаем для Q второе выражение:

$$Q = \frac{1}{c^2} \sum_{k=0}^{3} u^k \frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{d\tau}, \tag{32.21}$$

где $\frac{dp}{dt}$ — субстанциальная производная, а $d\tau$ — дифференциал собственного времени частицы. Что касается самой величины p, то из сопоставления полученных уравнений движения с нерелятивистскими легко видеть, что p есть давление. Приравнивая оба выражения для Q, получим

$$\sum_{k=0}^{3}\left\{\left(\mu^*+\frac{p}{c^2}\right)\frac{\partial u^k}{\partial x_k}+u^k\frac{\partial\mu^*}{\partial x_k}\right\}=0. \tag{32.22}$$

Так как мы предполагаем, что μ^* есть функция от p, то мы можем ввести новую величину ρ^* при помощи дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho^*}{\rho^*}=\frac{d\mu^*}{\mu^*+\frac{p}{c^2}}. \tag{32.23}$$

Постоянную интегрирования мы можем выбрать, например, так, чтобы при $p=0$ было $\rho^*=\mu^*$. Используя (32.23), мы можем предыдущее уравнение написать в виде

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho^* u^k)=0. \tag{32.24}$$

Отсюда видно, что величина ρ^* может быть истолкована, как инвариантная плотность той части массы покоя, которая во время движения не меняется. Эта величина, как и μ^*, будет функцией от p.

Положим

$$\mu^*=\rho^*\left(1+\frac{\Pi}{c^2}\right). \tag{32.25}$$

Из дифференциального соотношения между μ^* и ρ^* получаем

$$d\Pi=\frac{p\,d\rho^*}{\rho^{*2}}, \tag{32.26}$$

откуда

$$\Pi=\int_0^p\frac{dp}{\rho^*}-\frac{p}{\rho^*}. \tag{32.27}$$

Величина Π может быть истолкована, по аналогии с (30.11), как потенциальная энергия единицы массы жидкости (под массой мы здесь разумеем ту часть массы покоя, которая не меняется во время движения). Выражая μ^* через ρ^* и Π, мы можем написать тензор энергии в виде

$$c^2T^{ik}=\left[\rho^*+\frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi+p)\right]u^i u^k-pe_k\delta_{ik}. \tag{32.28}$$

тогда как уравнения движения напишутся:

$$\left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right] w^i = e_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\frac{dp}{d\tau} u^i. \tag{32.29}$$

Вместо уравнения для нулевой компоненты ускорения можно взять уравнение неразрывности в форме (32.24).

Заметим, что инвариант тензора массы равен

$$\sum_{i=0}^{3} e_i T^{ii} = \rho^*\left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right) - \frac{3p}{c^2} = \mu^* - \frac{3p}{c^2}. \tag{32.30}$$

Из сопоставления уравнений движения (32.29) с формулой (32.28) для T^{ik} следует, что тензор массы T^{ik} есть функция состояния, как и должно быть.

Выпишем составляющие тензора массы в нерелятивистском приближении, сохраняя, однако, в T^{00} и T^{0i} члены порядка $\frac{1}{c^2}$ по отношению к главным. В главных членах мы положим, согласно (32.03),

$$\rho^* = \rho - \frac{1}{2}\rho\frac{v^2}{c^2}, \tag{33.31}$$

где ρ — обычная плотность, удовлетворяющая уравнению неразрывности (30.02). Мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \rho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right), \\ T^{0i} &= \frac{1}{c}\rho v_i + \frac{v_i}{c^3}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi + p\right), \\ T^{ik} &= \frac{1}{c^2}(\rho v_i v_k + p\delta_{ik}). \end{aligned}\right\} \tag{32.32}$$

Сравнивая поправочные члены в T^{00} и T^{0i} со скаляром и вектором Умова (30.17) и (30.18), мы убедимся, что составляющие T^{00} и T^{0i} тензора массы могут быть написаны в виде

$$T^{00} = \rho + \frac{1}{c^2}S; \qquad T^{0i} = \frac{1}{c}\rho v_i + \frac{1}{c^3}S_i. \tag{32.33}$$

Таким образом, скаляр и вектор Умова дают релятивистские поправки второго порядка к обычным выражениям для плотности массы и плотности количества движения. Что касается пространственных составляющих T^{ik}, то они пропорциональны рассмотренному в § 30 трехмерному тензору плотности потока количества движения.

Пользуясь этим, мы можем написать приближенные выражения для тензора массы также и для случая упругого тела. Мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \rho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right), \\ T^{0i} &= \frac{1}{c}\rho v_i + \frac{1}{c^3}\left\{v_i\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right) - \sum_{k=1}^{3} p_{ik} v_k\right\}, \\ T^{ik} &= \frac{1}{c^2}(\rho v_i v_k - p_{ik}). \end{aligned}\right\} \quad (32.34)$$

Если положить здесь, согласно (30.09), $p_{ik} = -p\delta_{ik}$, мы вернемся к случаю идеальной жидкости.

На релятивистской формулировке теории упругости мы здесь останавливаться не будем. Сделаем только одно замечание по вопросу о возможности применения понятия абсолютно твердого тела в теории относительности. В нерелятивистской механике понятие это вводится как абстракция, согласно которой форма и размеры тела не меняются под действием каких угодно сил. В частности, толчок, сообщенный в некоторый момент одному концу абсолютно твердого тела, немедленно приводит в движение и другой конец тела. На самом же деле для физического твердого тела волна от толчка распространяется внутри тела со скоростью звука. Поэтому принимаемая абстракция содержит в себе предположение, что скорость звука можно рассматривать, как бесконечно большую *). Но очевидно, что если считать бесконечно большой скорость звука, то необходимо считать бесконечно большой и скорость света, так как она превышает скорость звука в сотни тысяч раз. Отсюда ясно, что абстракция, лежащая в основе понятия абсолютно твердого тела, применима только в нерелятивистской теории. В теории же относительности, основанной на учете факта конечной скорости распространения всякого рода действий, абстракция эта неизбежно приводит к противоречию. Таким образом, в теории относительности понятием абсолютного твердого тела пользоваться нельзя.

Это не исключает, однако, возможности применять в рассуждениях теории относительности понятие твердого масштаба. В самом деле, это понятие предполагает только существование таких твердых тел, размеры и форма которых остаются неизменными при определенных внешних условиях (отсутствие ускорений и толчков, постоянство температуры и т. п). Такие твердые масштабы с достаточной точностью реализуются существующими в природе твердыми телами, которые и могут служить эталонами длины, причем постоянство их может проверяться (как мы указывали в § 2), например, путем сравнения с длиной волны определенной спектральной линии.

---

*) К тому же выводу можно прийти, рассматривая абсолютно твердое тело, как предельный случай упругого твердого тела с бесконечно большими значениями модулей упругости.

§ 33. Тензор энергии для электромагнитного поля

В предыдущих параграфах мы рассмотрели тензор массы и пропорциональный ему тензор энергии для случая вещества, между частицами которого существует взаимодействие, передаваемое упругими силами. Мы рассмотрим теперь тензор энергии для вещества, частицы которого взаимодействуют только через посредство электромагнитного поля. Так как мы имеем здесь дело с макроскопической теорией, мы можем представлять себе это вещество в виде сплошной среды с непрерывным распределением зарядов.

Мы будем исходить из уравнений Максвелла в форме Лоренца для составляющих электрического и магнитного поля:

$$\left.\begin{aligned} E_1 = F_{10};\quad E_2 = F_{20};\quad E_3 = F_{30},\\ H_1 = F_{23};\quad H_2 = F_{31};\quad H_3 = F_{12}.\end{aligned}\right\} \tag{33.01}$$

Как мы видели в § 24, в четырехмерной форме уравнения Максвелла имеют вид:

$$F_{ikl} \equiv \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0, \tag{33.02}$$

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i, \tag{33.03}$$

где

$$F^{ik} = e_i e_k F_{ik} \tag{33.04}$$

— контравариантные составляющие антисимметричного тензора поля и четырехмерный вектор s^i имеет составляющие

$$s^0 = 4\pi\rho;\quad s^i = \frac{4\pi}{c} j_i = \frac{4\pi}{c}\rho v_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{33.05}$$

В этих формулах ρ обозначает плотность заряда, v_i — трехмерную скорость и $j_i = \rho v_i$ — плотность тока. Вводя инвариантную плотность заряда ρ^* и четырехмерную скорость u^i, можно вместо (33.05) написать

$$s^i = \frac{4\pi}{c}\rho^* u^i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{33.06}$$

В § 25 мы видели, что уравнения движения частицы с зарядом e и массой покоя m имеют вид

$$m w_i = -\frac{e}{c}\sum_{k=0}^{3} F_{ik} u^k. \tag{33.07}$$

Справа здесь стоит сила Лоренца, действующая на заряд e. Чтобы перейти от отдельной частицы к веществу со сплошным распределением заряда и массы, мы должны ввести вместо заряда e его инвариантную плотность ρ^* и вместо массы покоя m — ее инвариантную плотность μ^*. Мы получим

$$\mu^* w_i = -\frac{\rho^*}{c} \sum_{k=0}^{3} F_{ik} u^k \tag{33.08}$$

или

$$\mu^* w_i = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{3} F_{ik} s^k. \tag{33.09}$$

Так как мы ввели две новые функции ρ^* и μ^* (которые не обязаны быть пропорциональными друг другу), то мы должны присоединить к уравнениям движения два уравнения для этих функций. Уравнение для ρ^* содержится уже в уравнениях Максвелла и выражает закон сохранения заряда

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial (\rho^* u^k)}{\partial x_k} = 0. \tag{33.10}$$

Уравнение же для μ^* должно быть формулировано отдельно. Мы примем, что масса покоя частиц во время движения не меняется (это включает в себе предположение об отсутствии выделения джоулева тепла). Тогда будет

$$Q^* \equiv \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial (\mu^* u^k)}{\partial x_k} = 0. \tag{33.11}$$

Из уравнений движения (33.09) только три являются независимыми, так как мы имеем тождественно

$$\mu^* \sum_{i=0}^{3} u^i w_i = -\frac{\rho^*}{c} \sum_{i,k=0}^{3} F_{ik} u^i u^k = 0. \tag{33.12}$$

Поэтому уравнения движения (33.09) вместе с уравнением сохранения массы покоя (33.11) представляют четыре независимых уравнения. Наша задача состоит в том, чтобы написать эти уравнения в виде равенства нулю расходимости некоторого тензора. Для этого воспользуемся прежде всего формулой (32.13), согласно которой

$$\mu^* w^i + Q^* u^i = c^2 \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x_k}, \tag{33.13}$$

где

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2} \mu^* u^i u^k \tag{33.14}$$

[напомним, что, в отличие от (32.01), инвариантная масса покоя обозначается нами теперь через μ^*, а не через ρ^*]. С другой стороны из уравнений движения (33.09) и уравнения (33.11) мы можем составить четыре независимые комбинации

$$\mu^* w_i + Q^* u_i = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{3} F_{ik} s^k, \tag{33.15}$$

которые, вследствие (33.12), равносильны (33.09) и (33.11). Левая часть этих уравнений (точнее, ее контравариантная форма) уже представлена нами в виде расходимости некоторого тензора. Нам остается представить в аналогичном виде и правую их часть.

Для этого рассмотрим тензор

$$U_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{3} e_m F_{im} F_{km} + \frac{1}{16\pi} e_i \delta_{ik} \sum_{m,\,n=0}^{3} F^{mn} F_{mn} \tag{33.16}$$

и обозначим взятую с обратным знаком расходимость этого тензора через f_i. Мы имеем

$$f_i = -\sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_k}. \tag{33.17}$$

Вычисляя сумму производных, мы получим, после некоторых простых преобразований:

$$f_i = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k,\,l=0} F_{ik} \frac{\partial F^{kl}}{\partial x_l} - \frac{1}{8\pi}\sum_{k,\,l=0}^{3} F^{kl}\; F_{ikl}, \tag{33.18}$$

где F_{ikl} есть величина (33.02). В силу уравнений Максвелла (33.02) и (33.03) это выражение равно

$$f_i = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{3} F_{ik} s^k, \tag{33.19}$$

т. е. стоящей в правой части (33.15) плотности лоренцовой силы. Таким образом, обе части уравнений (33.15) представлены в виде расходимости. Переходя к контравариантным составляющим, мы можем уравнения

$$\mu^* w^i + Q^* u^i - f^i = 0 \tag{33.20}$$

написать в виде

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{33.21}$$

где

$$c^2 T^{ik} = c^2 \Theta^{ik} + U^{ik} \tag{33.22}$$

есть тензор энергии рассматриваемой системы, состоящей из вещества и поля. В последней формуле первое слагаемое есть тензор энергии вещества, а второе — тензор энергии поля.

Тензор T^{ik} содержит инвариантную плотность μ^*, составляющие скорости u^i и составляющие поля F_{ik}. Так как эти величины характеризуют состояние системы, то очевидно, что рассмотренный тензор массы есть функция состояния.

Рассмотрим тензор энергии поля несколько подробнее.

В трехмерных обозначениях составляющие тензора энергии электромагнитного поля имеют вид:

$$U^{00}=U_{00}=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2), \tag{33.23}$$

$$U^{0i}=-U_{0i}=\frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]_i, \tag{33.24}$$

$$U^{ik}=U_{ik}=-\frac{1}{4\pi}(E_iE_k+H_iH_k)+\frac{1}{8\pi}\delta_{ik}(E^2+H^2). \tag{33.25}$$

Заметим, что инвариант тензора энергии поля равен нулю

$$\sum_{i=0}^{3} e_iU_{ii}=0. \tag{33.26}$$

Составляющая U^{00} представляет, как всегда, плотность энергии, а умноженные на c составляющие U^{0i} — плотность потока энергии, т. е. вектор Умова. Этот вектор

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] \tag{33.27}$$

принято называть вектором Умова—Пойнтинга, или просто вектором Пойнтинга, так как Пойнтинг впервые написал соответствующие уравнениям Максвелла явные выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля.

Деленный на c^2 поток энергии данного вида равен потоку массы, соответствующей этому виду энергии, а поток массы в свою очередь равен количеству движения. Поэтому деленный на c^2 вектор Умова—Пойнтинга равен плотности электромагнитного количества движения. Тот факт, что электромагнитное поле несет с собой количество движения, проявляется в силах светового давления, которое было впервые экспериментально обнаружено в 1900 г. П. Н. Лебедевым [13]. Согласно формулам (33.25), если в электромагнитном поле находится тело, то на площадку $d\sigma$ его поверхности с нормалью по оси x_i действует сила, составляющие которой равны

$$F_k\,d\sigma=+U_{ik}\,d\sigma \qquad (k=1,\ 2,\ 3). \tag{33.28}$$

Рассмотрим абсолютно отражающее тело с плоским участком поверхности. Пусть уравнение этого участка поверхности есть $x_1=0$, а тело занимает область $x_1 > 0$. Предположим, что на тело падает плоская волна вида

$$\left.\begin{aligned} E_1^0 &= -\sin\vartheta f & H_1^0 &= \sin\vartheta g, \\ E_2^0 &= \cos\vartheta f & H_2^0 &= -\cos\vartheta g, \\ E_3^0 &= g & H_3^0 &= f, \end{aligned}\right\} \tag{33.29}$$

где

$$\left.\begin{aligned} f &= f\left(t - \frac{1}{c}(x_1\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta)\right), \\ g &= g\left(t - \frac{1}{c}(x_1\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta)\right). \end{aligned}\right\} \tag{33.30}$$

Добавляя к полю (33.29) отраженную волну, получаемую из предыдущих формул заменой ϑ на $\pi - \vartheta$ и g на $-g$, мы получим полное поле, удовлетворяющее предельным условиям. Значения составляющих полного поля на поверхности тела будут

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -2\sin\vartheta f & H_1 &= 0, \\ E_2 &= 0 & H_2 &= -2\cos\vartheta g, \\ E_3 &= 0 & H_3 &= 2f, \end{aligned}\right\} \tag{33.31}$$

где в функциях f и g нужно положить $x_1 = 0$. Подставляя эти значения в (33.25), получим для силы, действующей на единицу поверхности отражающего тела, выражения

$$F_1 = U_{11} = \frac{1}{2\pi}(f^2 + g^2)\cos^2\vartheta; \quad F_2 = U_{12} = 0; \quad F_3 = U_{13} = 0. \tag{33.32}$$

Таким образом, сила действует (независимо от направления падающей волны) по направлению внутренней нормали к телу и представляет, следовательно, нормальное давление (см. [12]).

Рассмотрим теперь другой случай. Пусть электромагнитное поле представляет наложение волн всевозможных направлений, распределенных равномерно. Тогда статистическое среднее значение произведений составляющих будет

$$\overline{E_i E_k} = \frac{1}{3}\overline{E^2}\delta_{ik}; \quad \overline{H_i H_k} = \frac{1}{3}\overline{H^2}\delta_{ik}. \tag{33.33}$$

Для пространственных составляющих тензора энергии мы будем тогда иметь

$$\overline{U}_{ik} = \frac{1}{24\pi}(\overline{E^2} + \overline{H^2})\delta_{ik} = \frac{1}{3}\overline{U}_{00}\delta_{ik}. \tag{33.34}$$

В этом случае электромагнитное поле производит изотропное давление, равное по величине одной трети плотности электромагнитной энергии. Это заключение имеет важное значение в теории черного излучения

§ 34. Масса и энергия

Согласно принятому в механике словоупотреблению, масса тела есть мера его инертности (инертная масса). С другой стороны, слово „масса" употребляется в смысле способности тела создавать поле тяготения и испытывать силу в этом поле (тяготеющая или весомая масса). Инертность и способность создавать поле тяготения представляют совершенно различные проявления свойств материи. То, что меры этих различных проявлений обозначаются одним словом, однако, не случайно, а обусловлено тем, что оба свойства всегда существуют совместно и всегда друг другу пропорциональны, так что, при надлежащем выборе единиц, меру того и другого свойства можно выражать одним и тем же числом. Равенство массы инертной и массы тяготеющей есть факт экспериментальный, подтвержденный с огромной степенью точности (опыты Этвеша). Самые же определения этих понятий (основанные на соответствующих проявлениях свойств материи) — различны. Существует физическая теория — а именно, теория тяготения Эйнштейна, в которой фундаментальный закон равенства массы инертной и массы тяготеющей учитывается автоматически, в том смысле, что одна и та же постоянная, входящая при решении уравнений, фигурирует и в качестве массы инертной и в качестве массы тяготеющей.

Как следует отвечать на вопрос: есть ли масса инертная и масса тяготеющая одно и то же или нет? По своим проявлениям они различны, но численные характеристики их друг другу пропорциональны. Такое положение вещей принято характеризовать словом „эквивалентность".

Аналогичный вопрос возникает в связи с понятиями массы и энергии (для определенности мы будем говорить об инертной массе). Определение массы мы только что напомнили. Энергия обычно определяется как мера способности производить работу. Для определения энергии существенным является, во-первых, закон сохранения энергии и, во-вторых, способность различных видов энергии к взаимному превращению. То и другое вместе называют законом сохранения и превращения энергии. Существование этого всеобщего закона позволяет сводить измерение энергии любого вида к измерению энергии частного вида, например, к механической, и выражать энергию любого вида в одних и тех же (например, механических) единицах.

Таким образом, проявления свойств материи, соответствующих массе и энергии, бесспорно различны. Однако теория относительности утверждает, что масса и энергия неразрывно друг с другом связаны и притом пропорциональны друг другу. Всякое изменение энергии системы сопровождается изменением ее инертной массы. Это относится не только к изменениям кинетической энергии тела, при которых масса покоя остается неизменной, но и к изменениям различных видов внутренней энергии, при которых масса покоя меняется.

В физике известны явления, когда вся энергия, соответствующая массе покоя тела, может превратиться в энергию излучения (которая, конечно, обладает той же массой). Обратно, энергия массы покоя может возникнуть за счет энергии излучения. Мы имеем в виду явления превращения пары электрон — позитрон в гамма-квант и обратное явление порождения гамма-квантом такой пары.

Соотношение между массой и энергией мы подробно изучили в предыдущих параграфах. Мы видели, что всякой энергии W следует приписать массу $M=\frac{W}{c^2}$ и всякой массе M следует сопоставить энергию $W=Mc^2$. Обе эти величины всегда друг другу пропорциональны и, выражая их в одних и тех же (скажем, энергетических) единицах, их можно измерять одним и тем же числом.

Далее, мы видели, что тензор энергии отличается лишь множителем c^2 от тензора массы и закон сохранения энергии есть в то же самое время закон сохранения массы.

Таким образом, на поставленный выше вопрос, представляют ли масса и энергия одно и то же или нет, мы можем дать тот же ответ, как в отношении массы инертной и массы тяготеющей. Проявления свойств материи, соответствующих массе и энергии, различны, но численные характеристики этих свойств пропорциональны друг другу. В этом случае также можно говорить об эквивалентности — об эквивалентности массы и энергии. Но лучше называть рассматриваемый фундаментальный закон просто законом пропорциональности массы и энергии.

Мы только что сказали, что закон сохранения энергии есть в то же самое время закон сохранения массы. Но здесь возникает такой вопрос. Ведь опыт показывает нам, что в громадном большинстве известных физических процессов в отдельности сохраняется масса тела (определяемая по взвешиванию) и в отдельности сохраняется его энергия (определяемая по производимой работе). Таким образом, наблюдаются *два* закона сохранения. Как это согласовать с тем, что в теории относительности формулируется только *один* закон?

На этот вопрос можно дать следующий ответ. Строгий закон сохранения — один: для полной массы тела M и для соответствующей ей полной энергии $W=Mc^2$. Но подавляющая часть энергии (и соответствующей ей массы покоя) в превращениях обычно не участвует и сохраняется в отдельности. Тем самым сохраняется и остальная, активная, часть энергии, участвующая в превращениях.

Разделение энергии на „пассивную" часть, в превращениях (в данном процессе) не участвующую, и на активную часть, способную переходить в другие виды, можно проследить на примере уравнений гидродинамики, разобранных нами в § 32. Выделив (путем перехода к сопутствующей системе отсчета) кинетическую энергию, мы рассматривали там две плотности массы покоя: полную плотность μ^* и плотность пассивной части ρ^*. Эти две величины были связаны, согласно (32.25), соотношением

$$\mu^* = \rho^* + \frac{1}{c^2}\rho^*\Pi, \tag{34.01}$$

где второй член представляет деленную на c^2 плотность потенциальной энергии сжатия.

Еще более наглядно это разделение видно из приближенных формул (32.32) и (32.34) для полной плотности массы T^{00} и полного потока массы cT^{0i}. Согласно (32.33), эти формулы могут быть написаны в виде

$$T^{00} = \rho + \frac{1}{c^2}S; \quad cT^{0i} = \rho v_i + \frac{1}{c^2}S_i. \tag{34.02}$$

Здесь ρ и ρv_i — плотность и поток той части массы, которая в превращениях не участвует, а скаляр и вектор Умова S и S_i представляют плотность и поток активной части энергии (деленные на c^2, эти величины дают плотность и поток активной части массы).

Мы говорили выше о том, что определяемая из взвешивания полная масса тела (куда включена и переменная ее часть) практически сохраняется, несмотря на то, что тело выделяет или поглощает энергию. Это объясняется просто недостаточной точностью взвешивания, в соединении с тем, что подавляющую часть массы обычных тел составляет пассивная ее часть. С другой стороны, изменение активной части массы может быть прослежено с гораздо большей точностью, путем измерений соответствующей части энергии (т. е. при помощи калориметрических методов, а не путем взвешивания).

Естественно задать вопрос о более глубокой причине того, что при обычных условиях подавляющая часть энергии связана настолько прочно, что находится в совершенно пассивном состоянии. Почему даже ничтожная ее часть не выходит из этого состояния и не нарушает баланса активной части энергии? На этот вопрос теория относительности сама по себе не может дать ответа. Ответа следует искать в области квантовых закономерностей, одной из характерных особенностей которых является существование устойчивых состояний с дискретными уровнями энергии. Для элементарных частиц энергия, соответствующая массе покоя, может превращаться в активную форму энергии (в излучение) либо целиком, либо она вовсе не превращается. Малая утечка массы невозможна. Это проверено на опыте в случае электрона и позитрона, но этого следует ожидать и для других элементарных частиц. Поскольку подавляющая часть массы атомов находится в форме массы элементарных частиц, невозможность малой утечки массы должна иметь место и для атомов. Кроме того, нужно иметь в виду дискретность энергетических уровней.

Таким образом, причина особой прочности связи пассивной части энергии — квантового характера.

Следует подчеркнуть относительный характер разделения энергии (с соответствующей массой) на пассивную и активную части. В обычных химических реакциях не только внутриядерная энергия, но и энергия внутренних электронных оболочек атомов ведет себя пассивно. При весьма высоких температурах, когда становится возможной полная или почти полная ионизация атомов, энергия внутренних электронных оболочек приобретает активный характер. Наконец, в процессах, связанных с перестройкой атомных ядер, активной становится и внутриядерная энергия. Однако и тогда энергия, соответствующая массе покоя тяжелых элементарных частиц, входящих в состав ядер, продолжает оставаться в пассивном состоянии.

Особо прочная связанность подавляющей части энергии (и соответствующей ей массы) и позволяет говорить о законе сохранения массы и о законе сохранения энергии, как о двух отдельных законах, хотя в теории относительности эти два закона сливаются в один.

Закон сохранения массы при химических реакциях был открыт и экспериментально доказан Ломоносовым и затем подтвержден Лавуазье. Что же касается закона сохранения энергии, то точная формулировка его была дана лишь в XIX в. Р. Майером. Однако еще в XVII в. X. Гюйгенс, а затем в XVIII в. Бернулли применяли его в области механики, а всеобщий характер закона ясно сознавался Ломоносовым, как это видно из его знаменитого письма Эйлеру 1748 г.

ГЛАВА III

ОБЩИЙ ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 35. Допустимые преобразования координат и времени

В основу математической формулировки теории относительности мы положили уравнение фронта волны

$$(\nabla\omega)^2 \equiv \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \qquad (35.01)$$

и связанное с ним выражение для квадрата интервала

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (35.02)$$

(Здесь $(\nabla\omega)^2$ есть обозначение для стоящего в левой части уравнения фронта волны дифференциального оператора). Если мы введем наши обычные обозначения

$$x_0 = ct; \quad x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z, \qquad (35.03)$$

а также числа

$$e_0 = 1; \quad e_1 = e_2 = e_3 = -1, \qquad (35.04)$$

то выражения $(\nabla\omega)^2$ и ds^2 напишутся:

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2, \qquad (35.05)$$

$$ds^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k\,(dx_k)^2. \qquad (35.06)$$

Мы знаем, что оба эти выражения инвариантны по отношению к преобразованию Лоренца. Если ввести новые координаты

$$x'_0 = ct'; \quad x'_1 = x'; \quad x'_2 = y'; \quad x'_3 = z', \qquad (35.07)$$

связанные со старыми преобразованием Лоренца, то будет

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_k}\right)^2, \qquad (35.08)$$

$$ds^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k\,(dx'_k)^2. \qquad (35.09)$$

Те переменные (35.03) или (35.07), в которых выражения $(\nabla\omega)^2$ и ds^2 имеют вид (35.05) и (35.06) или (35.08) и (35.09), мы будем называть галилеевыми координатами (включая в это понятие также и время).

Предположим теперь, что x_0', x_1', x_2', x_3' попрежнему равны (35.07) (т. е. представляют галилеевы координаты), тогда как x_0, x_1, x_2, x_3 уже не равны (35.03), а являются некоторыми вспомогательными переменными, которые связаны с величинами (35.07) соотношениями

$$x_\alpha' = f_\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \qquad (35.10)$$

где f_α — произвольные функции, которые удовлетворяют лишь некоторым общим условиям. Мы предположим, что уравнения (35.10) разрешимы относительно x_0, x_1, x_2, x_3, так что их якобиан отличен от нуля

$$D = \frac{D(x_0', x_1', x_2', x_3')}{D(x_0, x_1, x_2, x_3)} \neq 0. \qquad (35.11)$$

Кроме того, мы будем считать, что функции f_α имеют непрерывные производные первых трех порядков. Дальнейшие условия для f_α, вытекающие уже из физических соображений, мы рассмотрим ниже.

Производя замену переменных, мы получим для $(\nabla\omega)^2$ однородную квадратичную функцию от первых производных ω по переменным x_0, x_1, x_2, x_3, которую мы запишем в виде

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}, \qquad (35.12)$$

причем

$$g^{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_k'} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_k'}. \qquad (35.13)$$

Аналогично, произведя замену переменных в выражении для ds^2, мы получим

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta, \qquad (35.14)$$

где

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial x_k'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_k'}{\partial x_\beta}. \qquad (35.15)$$

На основании (35.13) и (35.15) легко проверить, что

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = \mu \\ 0 & \text{при } \nu \neq \mu \end{cases} \qquad (35.16)$$

Отсюда следует, что если обозначить через g определитель

$$g = \operatorname{Det} g_{\alpha\beta}, \tag{35.17}$$

то величины $g^{\alpha\beta}$ будут равны деленным на g минорам (алгебраическим дополнениям) этого определителя.

Применяя правило умножения определителей, мы получим

$$\operatorname{Det}\left(e_k \frac{\partial x'_k}{\partial x_\alpha}\right) \cdot \operatorname{Det}\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_\beta}\right) = \operatorname{Det} g_{\alpha\beta}. \tag{35.18}$$

Второй множитель здесь равен якобиану D [формула (35.11)], а вследствие того, что

$$e_0 e_1 e_2 e_3 = -1, \tag{35.19}$$

первый множитель в (35.18) равен $-D$. Следовательно,

$$g = -D^2. \tag{35.20}$$

Выбор независимых переменных x_0, x_1, x_2, x_3 целесообразно ограничить такими условиями, чтобы переменная x_0 имела (как и x'_0) характер времени, а переменные x_1, x_2, x_3 (как и x'_1, x'_2, x'_3) имели характер пространственных координат. Формулируем эти условия более точно. Будем, как и раньше, понимать под „событием“ точку пространства, рассматриваемую в соответствующий момент времени (точку-мгновение). Потребуем, чтобы два события, которым соответствуют одинаковые значения пространственных координатных параметров x_1, x_2, x_3, но разные значения x_0^* и x_0^{**} временно́го параметра x_0, были *последовательными* во времени в смысле § 12. Мы знаем, что для последовательных событий квадрат интервала положителен. Если считать, что разность $x_0^{**} - x_0^*$ бесконечно мала и положить

$$x^* = x_0; \quad x^{**} = x_0 + dx_0 \tag{35.21}$$

то это должно быть справедливо и для бесконечно малого интервала ds^2. Поэтому мы должны иметь

$$ds^2 = g_{00}\, dx_0^2 > 0, \tag{35.22}$$

откуда

$$g_{00} > 0. \tag{35.23}$$

Пусть мы имеем, далее, два события, которым соответствует одно и то же значение временно́го параметра x_0, но разные значения x_1, x_2, x_3 и $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ координатных параметров. Мы потребуем, чтобы такие два события были квази-одновременными в смысле § 12. Для квази-одновременных событий величина ds^2 отрицательна, и, следовательно, должно быть

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k < 0 \tag{35.24}$$

каковы бы ни были величины dx_1, dx_2, dx_3 (не равные нулю все вместе). Отсюда следует, что квадратичная форма (35.24) должна быть определенной и отрицательной. Из алгебры известно, что необходимыми и достаточными условиями для этого являются неравенства

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0, \tag{35.25}$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \tag{35.26}$$

$$g_{11} < 0; \quad g_{22} < 0; \quad g_{33} < 0, \tag{35.27}$$

из которых, впрочем, не все независимы. Независимыми являются, например: неравенство (35.25), первое из неравенств (35.26) и первое из неравенств (35.27).

Нетрудно показать, что из наложенных на коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ условий следует [независимо от их представления в виде (35.15)], что в окрестностях каждой точки величина ds^2 может быть представлена в виде суммы одного положительного и трех отрицательных квадратов. Совокупность знаков при квадратах называют сигнатурой квадратичной формы. В нашем случае сигнатура может быть записана в виде (e_0, e_1, e_2, e_3) или $(+ - - -)$.

Из неравенств (35.25) — (35.27) следует также, в согласии (35.20), что определитель g будет всегда отрицательным. Кроме того, из них вытекают такие же неравенства для величин $g^{\alpha\beta}$ с верхними значками, в силу которых будет

$$g^{00} > 0, \tag{35.28}$$

$$\sum_{i,k=1}^{3} g^{ik}\omega_i\omega_k < 0 \tag{35.29}$$

для любых неравных одновременно нулю величин ω_1, ω_2, ω_3. На доказательстве этих чисто алгебраических утверждений мы останавливаться не будем.

Таким образом, для того, чтобы параметр x_0 имел характер времени, а параметры x_1, x_2, x_3 — характер пространственных координат, необходимо и достаточно, чтобы величина g_{00} была положительной, а квадратичная форма с коэффициентами g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ была определенной отрицательной. На величины же g_{10}, g_{20}, g_{30} не налагается при этом никаких ограничений.

Рассмотрим геометрический смысл уравнений $x_0 = \text{const}$ и $x_k = \text{const}$. Выведем условие, при котором уравнение

$$\omega(x, y, z, t) = 0 \tag{35.30}$$

может рассматриваться, как уравнение движущейся поверхности. Из (35.30) следует, что дифференциалы координат и времени связаны соотношением

$$\omega_x\,dx + \omega_y\,dy + \omega_z\,dz + \omega_t\,dt = 0, \tag{35.31}$$

где через ω_x, ω_y, ω_z, ω_t обозначены производные от ω по x, y, z, t. Возьмем смещение dx, dy, dz по направлению нормали к поверхности и положим

$$dx = \frac{\omega_x}{|\operatorname{grad}\omega|}\,dn; \quad dy = \frac{\omega_y}{|\operatorname{grad}\omega|}\,dn; \quad dz = \frac{\omega_z}{|\operatorname{grad}\omega|}\,dn, \tag{35.32}$$

причем $|dn|$ — абсолютная величина смещения. Подставляя (35.32) в (35.31), получим

$$|\operatorname{grad}\omega|\,dn + \omega_t\,dt = 0, \tag{35.33}$$

и, следовательно, квадрат скорости смещения

$$v^2 = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \tag{35.34}$$

будет равен

$$v^2 = \frac{\omega_t^2}{(\operatorname{grad}\omega)^2}. \tag{35.35}$$

Таким образом, уравнение (35.30) можно толковать, как уравнение поверхности, каждая точка которой движется в направлении нормали к поверхности со скоростью, определяемой из (35.35). Такое толкование, однако, возможно лишь до тех пор, пока эта скорость не превышает скорости света. Согласно (35.35) и (35.01), это будет при условии

$$(\nabla\omega)^2 \leqslant 0, \tag{35.36}$$

причем знак равенства соответствует скорости света.

Если же

$$(\nabla\omega)^2 > 0, \tag{35.37}$$

то уравнение (35.30) может быть решено относительно времени и записано в виде

$$t = \frac{1}{c} f(x, y, z), \tag{35.38}$$

причем

$$(\operatorname{grad} f)^2 < 1. \tag{35.39}$$

Уравнение (35.38) сопоставляет каждой точке пространства определенный момент времени, причем все эти „точки-мгновения“ будут квази-одновременными. Это уравнение можно назвать „уравнением времени“. Напомним, что уравнение времени уже рассматривалось нами в § 3 в связи с вопросом о характеристиках уравнений Максвелла.

Как мы уже отмечали в § 3, можно рассматривать уравнение $\omega = 0$, как уравнение гиперповерхности в четырехмерном многообразии пространства и времени. При таком рассмотрении можно подразделить гиперповерхности на два класса.

Если $(\nabla\omega)^2 < 0$, то можно сказать, что одно из измерений гиперповерхности имеет характер времени (часто пользуются неточным выражением: „поверхность имеет характер времени“). Согласно (35.35), это есть обыкновенная двухмерная поверхность *), движущаяся со скоростью, меньшей скорости света.

Если $(\nabla\omega)^2 > 0$, то говорят, что гиперповерхность имеет пространственный характер. Это есть все бесконечное пространство, разные точки которого рассматриваются в разные моменты времени, а именно, точка x, y, z рассматривается в момент t, определяемый из уравнения времени (т. е. из уравнения гиперповерхности). Сопоставляемые двум точкам пространства моменты времени должны быть при этом настолько близки, чтобы соответствующий интервал имел пространственный характер.

Пользуясь тем, что $(\nabla\omega)^2$ есть инвариант, мы получим, полагая последовательно $\omega = x_0$, $\omega = x_1$, $\omega = x_2$, $\omega = x_3$:

$$(\nabla x_0)^2 = g^{00} > 0, \tag{35.40}$$

$$(\nabla x_1)^2 = g^{11} < 0; \quad (\nabla x_2)^2 = g^{22} < 0; \quad (\nabla x_3)^2 = g^{33} < 0. \tag{35.41}$$

Отсюда следует, что уравнение $x_0 = \mathrm{const}$ представляет уравнение времени, а каждое из уравнений $x_k = \mathrm{const}$ ($k = 1, 2, 3$) представляет уравнение поверхности, движущейся в направлении своей нормали со скоростью, меньшей скорости света (уравнение движущейся координатной поверхности).

Из условий, наложенных нами на преобразования координат и времени, вытекает также, что постоянным значениям x_1, x_2, x_3 соответствует, в любой инерциальной системе отсчета, движение точки со скоростью, меньшей скорости света.

В классической механике Ньютона часто применяются преобразования координат, зависящие от времени, причем эти преобразования толкуются, как переход к движущейся системе отсчета. Сравнивая преобразования координат в механике Ньютона с преобразованиями координат и времени в теории относительности, необходимо отметить следующее. Во-первых, само понятие о системе отсчета в механике Ньютона не совпадает (в общем случае ускоренного движения) с понятием системы отсчета в теории относительности: в механике Ньютона понятие системы отсчета связывается с представлением об абсолютно твердом теле и о мгновенном распространении света. В теории же относительности понятие о твердом теле (притом не абсолютно

---

*) В четырехмерном многообразии гиперповерхность имеет три измерения, но в данном случае только два из них — пространственные.

твердом, а лишь сохраняющем свою форму при отсутствии ускорений и внешних сил) играет лишь вспомогательную роль, а понятие системы отсчета основано на законе распространения фронта волны. Прототипом ньютоновой системы отсчета является твердый каркас, тогда как прототипом системы отсчета теории относительности является радиолокационная установка. Во-вторых, класс преобразований, допустимых в ньютоновой механике, значительно шире, чем класс преобразований, допустимых в теории относительности: в ньютоновой механике не рассматриваются ограничения, вытекающие из существования предельной скорости и выражаемые рассмотренными выше неравенствами.

В качестве примера рассмотрим преобразование, которое в ньютоновой механике может быть истолковано, как переход к равноускоренной системе отсчета. Пусть x', y', z', t' — координаты и время в инерциальной системе отсчета (галилеевы координаты). Положим

$$x' = x - \frac{1}{2}at^2; \quad y' = y; \quad z' = z \tag{35.42}$$

и, кроме того,

$$t' = t - \frac{a}{c^2}tx. \tag{35.43}$$

Переменные x, y, z, t можно толковать, как координаты и время в некоторой ускоренной системе отсчета (в смысле ньютоновой механики и в соответствующем ей приближении). Подставляя (35.42) и (35.43) в выражение для ds^2, получим

$$ds^2 = (c^2 - 2ax - a^2t^2)\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \frac{a^2}{c^2}(x\,dt + t\,dx)^2. \tag{35.44}$$

Неравенства для коэффициентов будут выполнены при условиях

$$1 - \frac{a^2t^2}{c^2} > 0; \quad \left(1 - \frac{ax}{c^2}\right)^2 - \frac{a^2t^2}{c^2} > 0. \tag{35.45}$$

Кроме того, можно потребовать, чтобы было

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{ax}{c^2} > 0. \tag{35.46}$$

Эти неравенства показывают, что подстановка (35.42)—(35.43) допустима не во всем пространстве и лишь для ограниченного промежутка времени.

Другим примером может служить преобразование, аналогичное переходу к равномерно вращающейся системе отсчета. Положим

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\omega t + y\sin\omega t; & z' &= z,\\ y' &= -x\sin\omega t + y\cos\omega t; & t' &= t. \end{aligned}\right\} \tag{35.47}$$

Мы получим тогда

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2 (x^2 + y^2)]\, dt^2 - 2\omega (y\, dx - x\, dy)\, dt - \\ - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (35.48)$$

Условие для коэффициентов требует

$$c^2 - \omega^2 (x^2 + y^2) > 0. \qquad (35.49)$$

Оно выполняется на ограниченных расстояниях от оси вращения, где линейная скорость вращения не превышает скорости света.

Подчеркнем еще раз, что приведенные примеры имеют физический смысл лишь в той области, где применима ньютонова механика (см. также § 61).

Само собою разумеется, что к числу допустимых преобразований относится введение обычных криволинейных координат. Поскольку такие преобразования не содержат времени, они имеют тот же геометрический смысл, как в нерелятивистской теории, почему мы на них останавливаться не будем.

§ 36. Общий тензорный анализ и обобщенная геометрия

В предыдущем параграфе мы рассматривали выражения

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{\alpha,\ \beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}, \qquad (36.01)$$

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\ \beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta, \qquad (36.02)$$

полученные из обычных выражений теории относительности введением вместо координат и времени x, y, z, t новых переменных x_1, x_2, x_3, x_0. Мы установили условия, при выполнении которых переменная x_0 может характеризовать последовательность событий во времени, а переменные x_1, x_2, x_3 — положение их в пространстве.

Само по себе введение новых переменных, разумеется, никак не может повлиять на физические следствия из теории, а является лишь математическим приемом. Однако разработка аппарата, позволяющего составлять уравнения математической физики (например, уравнения движения и уравнения поля) сразу для произвольных независимых переменных, минуя декартовы координаты и время, не только весьма полезна в вычислительном отношении (как прием, сокращающий выкладки), но и важна в принципиальном отношении. Наличие такого аппарата может указать путь к обобщению физической теории.

Уравнения, справедливые при произвольном выборе независимых переменных, мы будем называть обще-ковариантными. Самый же аппарат, позволяющий составлять обще-ковариантные тензорные уравнения, мы будем называть общим тензорным анализом.

Обще-ковариантные уравнения применяются уже в ньютоновой механике. Мы имеем в виду уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение системы материальных точек в обобщенных координатах, а также их обобщения для сплошной среды. Не давая ничего физически нового по сравнению с уравнениями в декартовых координатах, уравнения Лагранжа играют, тем не менее, важную роль как в практических применениях, так и в теоретических исследованиях. В теории относительности общий тензорный анализ преследует аналогичную цель.

В общем тензорном анализе исходными являются выражения (36.01) и (36.02) для квадрата четырехмерного градиента и для квадрата интервала. Эти выражения характеризуют, как говорят, *мероопределение* или *метрику* пространства-времени. Коэффициенты $g^{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в них рассматриваются, как функции от переменных x_0, x_1, x_2, x_3.

Если, как мы это до сих пор предполагали, выражения (36.01) и (36.02) получены из (35.01) и (35.02) [или из (35.08) и (35.09)] введением новых переменных, то коэффициенты $g^{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в них представимы в виде (35.13) и (35.15). Другими словами, в этом случае десять коэффициентов $g_{\alpha\beta}$ выражаются через четыре функции f_0, f_1, f_2, f_3 по формуле

$$g_{\alpha\beta}=\sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f_k}{\partial x_\beta}. \tag{36.03}$$

Через те же четыре функции выражаются, вследствие соотношений (35.16), и коэффициенты $g^{\alpha\beta}$.

Существенно, однако, отметить, что формулы общего тензорного анализа почти не усложняются и в том случае, когда предположение о представимости $g_{\alpha\beta}$ в виде (36.03) не делается, а эти величины рассматриваются, как заданные функции от координат (т. е. от переменных x_0, x_1, x_2, x_3). Этой более общей точке зрения соответствует введение для пространства и времени неевклидовой геометрии и неевклидовой метрики. Такой шаг означает уже выход за пределы обычной (так называемой „частной") теории относительности и связан с построением новой физической теории — теории тяготения Эйнштейна. Этой теории будут посвящены следующие главы этой книги. В настоящей же главе мы встанем на чисто формальную точку зрения и будем развивать общий тензорный анализ в предположении, что метрика нам задана и что величины $g_{\alpha\beta}$ представляют известные функции от координат. Такое изложение представляет преимущество в двух отношениях. Во-первых, мы можем найти те условия, которым должны удовлетворять величины $g_{\alpha\beta}$ для того, чтобы они были представимы в виде (36.03); мы получим тогда обще-ковариантную формулировку обычной теории относительности. Во-вторых, общий тензорный анализ дает нам готовый математический аппарат для формулировки теории тяготения Эйнштейна.

Прежде чем переходить к систематическому изложению тензорного анализа, установим связь между выражениями $(\nabla\omega)^2$ и ds^2, существующую при условии

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\nu} \tag{36.04}$$

независимо от представимости $g_{\alpha\beta}$ в виде (36.03). Покажем, что если функция $\omega(x_0, x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет уравнению $(\nabla\omega)^2 = 0$, то дифференциалы координат, связанных соотношением $\omega = \mathrm{const}$, удовлетворяют уравнению $ds^2 = 0$.

Положив

$$\omega_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{36.05}$$

напишем уравнение $(\nabla\omega)^2 = 0$ в виде

$$G \equiv \sum_{\alpha,\ \beta=0}^{3} g^{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta = 0. \tag{36.06}$$

Это уравнение в частных производных для ω того же типа, как уравнение Гамильтона — Якоби классической механики, и может быть решено аналогичным способом. Если написать его в виде, решенном относительно ω_0:

$$\omega_0 = -H(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3), \tag{36.07}$$

то функция H будет соответствующей функцией Гамильтона, и уравнения Гамильтона напишутся

$$\frac{dx_k}{dx_0} = \frac{\partial H}{\partial\omega_k}; \quad \frac{d\omega_k}{dx_0} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{36.08}$$

Но

$$\frac{\partial H}{\partial\omega_k} = -\frac{\partial\omega_0}{\partial\omega_k} = \left(\frac{\partial G}{\partial\omega_k}\right) \Big/ \left(\frac{\partial G}{\partial\omega_0}\right), \tag{36.09}$$

и из первых трех уравнений (36.08) следует, что дифференциалы dx_α $(\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ будут пропорциональны частным производным от G по ω_α. Обозначая бесконечно малый коэффициент пропорциональности через $\frac{1}{2}\,dp$, будем иметь

$$dx_\alpha = \frac{dp}{2}\,\frac{\partial G}{\partial\omega_\alpha} = dp\sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta}\omega_\beta. \tag{36.10}$$

Решая при помощи (36.04) уравнения (36.10) относительно ω_α, получим

$$\omega_\alpha\,dp = \sum_{\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\,dx_\beta, \tag{36.11}$$

после чего очевидное равенство

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \omega_\alpha \, dx_\alpha = 0 \tag{36.12}$$

дает

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta = 0, \tag{36.13}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, если мы будем попрежнему рассматривать $(\nabla\omega)^2 = 0$, как уравнение фронта волны, то мы можем утверждать, что для точек, находящихся на фронте волны, дифференциалы координат и времени связаны соотношением $ds^2 = 0$.

В дальнейшем мы будем считать величины $g^{\alpha\beta}$ заданными функциями переменных x_0, x_1, x_2, x_3, и будем лишь предполагать, что они обладают непрерывными производными всех рассматриваемых порядков и удовлетворяют неравенствам, формулированным в § 35. Наряду с функциями $g_{\alpha\beta}$ мы будем рассматривать функции $g^{\alpha\beta}$, связанные с первыми соотношениями (36.04). Условия представимости $g_{\alpha\beta}$ в виде (36.03) будут установлены в дальнейшем (§ 42).

§ 37. Определение вектора и тензора. Тензорная алгебра

В тензорном анализе постоянно приходится иметь дело с суммами, подобными (36.01) и (36.02), в которых значок суммирования входит два раза. Следуя предложению Эйнштейна, мы введем для этих сумм сокращенное обозначение, которое заключается в том, что знак суммы опускается, а суммирование по дважды входящему значку подразумевается. При этом мы условимся суммировать по греческим значкам α, β, ... в пределах от 0 до 3, а по латинским значкам i, k, ... — от 1 до 3. Применяя эти обозначения, мы можем писать, например, вместо

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta \tag{37.01}$$

просто

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx_\alpha \, dx_\beta \tag{37.02}$$

или же, если мы хотим выделить координату *) x_0,

$$ds^2 = g_{00} \, dx_0^2 + 2g_{0i} \, dx_0 \, dx_i + g_{ik} \, dx_i \, dx_k. \tag{37.03}$$

Эти сокращенные обозначения оказываются очень удобными и не приводят к недоразумениям. В тех редких случаях, когда суммиро-

*) Для единообразия мы будем называть здесь координатами все четыре переменные x_0, x_1, x_2, x_3, несмотря на то, что x_0 имеет характер времени, а не пространственной координаты. В аналогичном смысле употребляется термин „галилеевы координаты“.

вание по дважды входящему значку не производится, мы будем это специально оговаривать. Например, в том частном случае, когда выражение (36.02) сводится к

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2, \tag{37.04}$$

мы будем писать

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} \qquad \text{(без суммирования)}. \tag{37.05}$$

Определение ковариантного и контравариантного векторов было дано нами для случая (37.05) в § 20. Формулы (20.12) и (20.13), которые мы теперь можем писать в виде

$$A'_\alpha = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} A_\beta, \tag{37.06}$$

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} A^\beta, \tag{37.07}$$

могут служить определением вектора и в общем случае. Как и раньше, ковариантные векторы будут обозначаться буквами с нижними значками, а контравариантные — буквами с верхними значками. При этом для дифференциалов координат мы будем делать исключение и писать их в виде dx_α, несмотря на то, что они представляют контравариантный вектор.

Таким образом, ковариантный вектор может быть определен, как совокупность четырех величин, преобразующихся, как частные производные от некоторой функции по координатам. Аналогично, контравариантный вектор представляет совокупность четырех величин, преобразующихся, как дифференциалы координат.

В том случае, когда ds^2 имеет вид (37.04) и когда мы имеем дело лишь с преобразованиями Лоренца, коэффициенты в формулах преобразования (37.06) и (37.07) постоянны. В общем же случае произвольных преобразований эти коэффициенты переменны. В случае преобразований Лоренца вектор не обязательно должен относиться к определенной точке пространства, а может быть „свободным". Примером свободного вектора является вектор энергии — количества движения материальной системы. (Аналогично, свободным тензором является тензор момента количества движения и центра инерции системы). Напротив того, в случае общих преобразований координат (и даже при простом переходе к криволинейным координатам) вектор непременно предполагается связанным с определенной точкой пространства. Такими связанными векторами являются векторы поля (например, поля скоростей сплошной среды), составляющие которых являются функциями точки, т. е. функциями от координат x_0, x_1, x_2, x_3. Но связанный вектор не обязательно должен быть определен в некоторой конечной области пространства-времени; область его определения может сводиться и к некоторой кривой (например, вектор касательной) или к некоторой поверхности (например, вектор нормали). Те же замечания относятся и к тензорам. Таким образом, в общем тензорном анализе мы будем иметь дело со связанными векторами и тензорами. Для них значения переменных коэффициентов преобразования $\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}$ и т. д. должны быть взяты в той точке, к которой отнесены и самые вектор или тензор.

Определение тензора аналогично тому, какое было дано в § 21 для случая преобразований Лоренца. Формулы (21.01), (21.03) и (21.05), дающие правила преобразования ковариантного, контравариантного и смешанного тензоров второго ранга, остаются в силе и в общем тензорном анализе. В принятых нами обозначениях эти формулы напишутся

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} T_{\alpha\beta}, \tag{37.08}$$

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} T^{\alpha\beta}, \tag{37.09}$$

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} T^{\alpha}_{\beta}. \tag{37.10}$$

Таким образом, тензором второго ранга (ковариантным, контравариантным и смешанным) называется совокупность величин, преобразующихся, соответственно, по закону (37.08), (37.09) и (37.10).

Свойства симметрии или антисимметрии тензора второго ранга (ковариантного или контравариантного, но не смешанного) при преобразовании сохраняются. В самом деле, изменив в (37.08) обозначения значков, мы можем написать

$$T'_{\nu\mu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} T_{\beta\alpha}. \tag{37.11}$$

Поэтому, если мы положим

$$2S_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}, \tag{37.12}$$

$$2A_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}, \tag{37.13}$$

и аналогичным образом определим $S'_{\mu\nu}$ и $A'_{\mu\nu}$, то мы будем иметь

$$S'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} S_{\alpha\beta}, \tag{37.14}$$

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta}. \tag{37.15}$$

Величины $S_{\alpha\beta}$ можно назвать симметричной, а величины $A_{\alpha\beta}$ — антисимметричной частью тензора $T_{\alpha\beta}$. Из формул (37.14) и (37.15) следует, что как симметричная, так и антисимметричная часть тензора $T_{\alpha\beta}$ представляет собою тензор. Поэтому, если тензор $T_{\alpha\beta}$ сам симметричен, так что $A_{\alpha\beta}=0$, то будет и $A'_{\mu\nu}=0$, т. е. преобразованный тензор $T'_{\mu\nu}$ также будет симметричен. Аналогично, если тензор $T_{\alpha\beta}$ антисимметричен и $S_{\alpha\beta}=0$, то будет и $S'_{\mu\nu}=0$, так что преобразованный тензор $T'_{\mu\nu}$ останется антисимметричным. Те же рассуждения могут быть применены к контравариантному тензору $T^{\alpha\beta}$. Что касается смешанного тензора T^{α}_{β}, то его верхний и нижний значки входят в формулу преобразования (37.10) неодинаковым образом, вследствие чего разделение его на симметричную и антисимметричную часть не имеет инвариантного смысла.

Весьма важным примером симметричного тензора второго ранга является совокупность коэффициентов $g_{\alpha\beta}$ в выражении для ds^2. То, что коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ симметричны относительно своих значков, вытекает непосредственно из их определения. То, что они образуют тензор, вытекает из инвариантности выражения для ds^2. В самом деле, мы имеем при переходе к новым переменным x'_0, x'_1, x'_2, x'_3

$$g'_{\mu\nu}\,dx'_{\mu}\,dx'_{\nu}=g_{\alpha\beta}\,dx_{\alpha}\,dx_{\beta}, \tag{37.16}$$

откуда

$$g'_{\mu\nu}=g_{\alpha\beta}\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}}\cdot\frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}}, \tag{37.17}$$

а это есть закон преобразования ковариантного тензора. Тензор $g_{\alpha\beta}$ называется фундаментальным или метрическим тензором.

Совокупность величин $g^{\alpha\beta}$, определяемых из уравнений

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma}, \tag{37.18}$$

также представляет собою тензор, причем этот тензор будет контравариантным. Докажем это. В штрихованной системе отсчета мы имеем для $g'_{\mu\nu}$ выражение (37.17), а $g'^{\mu\nu}$ получается из уравнений

$$g'^{\mu\lambda}g'_{\lambda\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}. \tag{37.19}$$

С другой стороны, если $g^{\alpha\beta}$ есть контравариантный тензор, то мы должны иметь

$$g'^{\mu\lambda}=g^{\alpha\beta}\frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial x'_{\lambda}}{\partial x_{\beta}}. \tag{37.20}$$

Нам нужно показать, что оба определения $g'^{\mu\lambda}$ совпадают. Так как решение уравнений (37.19) относительно $g'^{\mu\lambda}$ единственно, то для этого достаточно проверить, что выражения (37.20) удовлетворяют уравнениям (37.19). Это легко сделать, исходя из равенств:

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\rho}=\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\rho}=\delta^\alpha_\rho, \tag{37.21}$$

$$g'_{\lambda\nu}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\rho}=g_{\rho\sigma}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu}. \tag{37.22}$$

Подставляя (37.20) в (37.19) и пользуясь сперва (37.22) и затем (37.18), мы получим цепь равенств

$$g'^{\mu\lambda}g'_{\lambda\nu}=g^{\alpha\beta}g'_{\lambda\nu}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\beta}=g^{\alpha\beta}g_{\beta\sigma}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu}=$$

$$=\delta^\alpha_\sigma\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu}=\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}=\delta^\mu_\nu, \tag{37.23}$$

которая и приводит к равенству (37.19).

Величины $g^{\sigma\beta}$ называются контравариантными компонентами фундаментального тензора, тогда как $g_{\alpha\beta}$ являются его ковариантными компонентами.

Использованное в (37.23) равенство

$$\delta^\alpha_\sigma\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu}=\delta^\mu_\nu \tag{37.24}$$

показывает, что совокупность величин

$$\delta^\mu_\nu=\begin{cases}1 & \text{при} \quad \mu=\nu,\\ 0 & \text{при} \quad \mu\neq\nu,\end{cases} \tag{37.25}$$

одинаковая во всех координатных системах, подходит под определение смешанного тензора второго ранга.

Если дан ковариантный вектор A_ν, то совокупность величин

$$A^\mu=g^{\mu\nu}A_\nu \tag{37.26}$$

будет, как легко проверить, преобразовываться, как контравариантный вектор. Эти два вектора мы не будем считать существенно различными, а будем говорить о величинах A_ν и A^μ, как о ковариантных и контравариантных компонентах одного и того же вектора. Операцию, выражаемую равенством (37.26), называют для краткости поднятием значка у вектора A_ν, а обратная операция

$$A_\nu=g_{\nu\mu}A^\mu \tag{37.27}$$

называется опусканием значка. Поднятие и опускание значков можно производить также у тензоров. Например, из ковариантного тензора $T_{\mu\nu}$

можно путем поднятия значков составить контравариантный тензор

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}, \tag{37.28}$$

из которого, обратно, исходный тензор получается по формуле

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}. \tag{37.29}$$

При этом, очевидно, свойство симметрии или антисимметрии тензора сохраняется. При составлении смешанного тензора нужно обращать внимание на то, какой именно значок поднимается (или опускается). Для ясности можно место поднятого или опущенного значка обозначать точкой. Например тензоры

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot\nu} = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} \tag{37.30}$$

и

$$T^{\cdot\mu}_{\nu\cdot} = g^{\mu\alpha} T_{\nu\alpha} \tag{37.31}$$

будут совпадать только если тензор $T_{\alpha\beta}$ симметричен. В этом случае можно точек и не ставить, а писать просто

$$T^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = g^{\mu\alpha} T_{\nu\alpha}. \tag{37.32}$$

Для простоты письма мы рассматривали до сих пор только векторы и тензоры второго ранга. Аналогичное определение можно дать и тензорам более высокого ранга.

Ковариантным тензором ранга n называется совокупность величин, преобразующихся по закону

$$A'_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial x'_{\beta_1}} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial x'_{\beta_2}} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial x'_{\beta_n}}. \tag{37.33}$$

Аналогично, контравариантным тензором ранга n называется совокупность величин, преобразующихся по закону:

$$B'^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = B^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \frac{\partial x'_{\beta_1}}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial x_{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial x'_{\beta_n}}{\partial x_{\alpha_n}}. \tag{37.34}$$

Наконец, смешанный тензор ранга n, имеющий k ковариантных и m контравариантных значков (причем $k+m=n$), есть совокупность величин, преобразующихся по закону

$$C'^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_k} = C^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_k} \frac{\partial x'_{\mu_1}}{\partial x_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\mu_m}}{\partial x_{\alpha_m}} \frac{\partial x_{\beta_1}}{\partial x'_{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x_{\beta_k}}{\partial x'_{\nu_k}}. \tag{37.35}$$

Из ковариантного тензора ранга n можно получить контравариантный тензор того же ранга по формуле

$$A^{\mu_1\ldots\mu_n} = A_{\alpha_1\ldots\alpha_n} g^{\alpha_1\mu_1} \cdots g^{\alpha_n\mu_n}, \tag{37.36}$$

причем в этом случае можно говорить о ковариантных и контравариантных составляющих одного и того же тензора. Путем поднятия не всех, а некоторых значков можно из ковариантного тензора получить также смешанный тензор того же ранга (места поднятых значков для ясности обозначаются точками). Из двух тензоров рангов k и m можно, путем перемножения их составляющих, построить тензор более высокого ранга $n = k + m$. Мы имеем, для ковариантных тензоров,

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} B_{\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n} = C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \tag{37.37}$$

и аналогичные формулы для контравариантных и смешанных тензоров.

Из данного тензора $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ ранга n можно по формуле

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2}\beta\gamma} g^{\beta\gamma} = B_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2}} \tag{37.38}$$

построить новый тензор $B_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2}}$, ранг которого на две единицы меньше ранга данного тензора. Такая операция называется свертыванием по соответствующим двум значкам. В формуле (37.38) свертывание произведено по последним двум значкам; очевидно, что результат будет зависеть от выбора той пары значков, по которой производится свертывание. Свертывание можно произвести в два приема: сперва поднять один из значков по формуле

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\gamma} g^{\beta\gamma} = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}}^{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta} \tag{37.39}$$

и затем, приравняв другой значок α_{n-1} поднятому значку β, по нему просуммировать

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2}\beta}^{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta} = B_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2}}. \tag{37.40}$$

Свертывание тензора второго ранга дает скаляр

$$T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = T, \tag{37.41}$$

который будет также равен

$$T^{\nu \cdot}_{\cdot \nu} = T^{\cdot \nu}_{\nu \cdot} = T. \tag{37.42}$$

То, что свертывание двух тензоров (37.30) и (37.31) дает один и тот же результат, вполне понятно, поскольку скаляр T зависит только от симметричной части тензора $T_{\mu\nu}$, а для симметричного ковариантного тензора обе формы смешанного тензора совпадают.

Свертывание вектора невозможно, поскольку он содержит только один значок. Но из двух векторов A_μ и B_ν можно построить тензор второго ранга, который затем и подвергнуть свертыванию. В результате получается скаляр

$$g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = A_\mu B^\mu = A^\nu B_\nu, \tag{37.43}$$

который можно назвать скалярным произведением двух векторов A_μ и B_ν. Если оба вектора совпадают, то соответствующий скаляр равен

$$g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu = A_\mu A^\mu. \tag{37.44}$$

Знак этого скалярного произведения вектора на самого себя позволяет подразделить векторы на временно-подобные (для которых $A_\mu A^\mu > 0$), на пространственно-подобные (для которых $A_\mu A^\mu < 0$) и на нулевые (для которых $A_\mu A^\mu = 0$). Это подразделение совпадает с тем, которое мы рассматривали в § 20.

Если даны два временно-подобных вектора A^μ и B^μ, инварианты которых равны единице, то их скалярное произведение будет по абсолютной величине больше единицы. Другими словами, из условий

$$g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = 1; \quad g_{\mu\nu}B^\mu B^\nu = 1 \tag{37.45}$$

вытекает

$$|g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu| \geqslant 1. \tag{37.46}$$

Докажем это. Условие (37.45) для вектора A^μ может быть написано в виде

$$\left(\sqrt{g_{00}}A^0 + \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}g_{0i}A^i\right)^2 - \left(\frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik}\right)A^iA^k = 1, \tag{37.47}$$

или короче

$$\frac{1}{g_{00}}(A_0)^2 - a_{ik}A^iA^k = 1, \tag{37.48}$$

где мы положили

$$a_{ik} = \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik}. \tag{37.49}$$

Аналогично

$$B_\mu B^\mu \equiv \frac{1}{g_{00}}(B_0)^2 - a_{ik}B^iB^k = 1\,. \tag{37.50}$$

С другой стороны, скалярное произведение $A_\mu B^\mu$ равно

$$A_\mu B^\mu \equiv \frac{1}{g_{00}}A_0B_0 - a_{ik}A^iB^k. \tag{37.51}$$

В силу установленных в § 35 неравенств для $g_{\mu\nu}$ величины a_{ik} будут коэффициентами определенной положительной квадратичной формы. Поэтому будет

$$|a_{ik}A^iB^k| \leqslant \sqrt{a_{ik}A^iA^k}\cdot\sqrt{a_{ik}B^iB^k} \tag{37.52}$$

и если мы положим

$$A = \sqrt{a_{ik}A^iA^k}; \quad B = \sqrt{a_{ik}B^iB^k}, \tag{37.53}$$

мы будем иметь

$$|A_0| = \sqrt{g_{00}}\sqrt{1+A^2}; \quad |B_0| = \sqrt{g_{00}}\sqrt{1+B^2},$$
$$|a_{ik}A^iB^k| \leqslant AB, \tag{37.54}$$

и, следовательно,

$$|A_\mu B^\mu| \geqslant \sqrt{1+A^2}\sqrt{1+B^2} - AB \geqslant 1, \tag{37.55}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что справедливое для временно-подобных векторов неравенство (37.46), написанное в виде

$$|g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu| \geqslant \sqrt{g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu} \cdot \sqrt{g_{\mu\nu}B^\mu B^\nu}, \tag{37.56}$$

аналогично (37.52), но имеет обратный знак, что происходит из-за индефинитности метрики.

Для временно-подобного вектора обе нулевые составляющие (ковариантная и контравариантная) всегда имеют один и тот же знак. Предполагая, что $A_0 > 0$ и $B_0 > 0$ (и, следовательно, $A^0 > 0$ и $B^0 > 0$), мы можем формулу (37.56) написать в виде

$$A_\nu B^\nu \geqslant \sqrt{A_\nu A^\nu} \cdot \sqrt{B_\mu B^\mu}. \tag{37.57}$$

В заключение этого параграфа рассмотрим понятие псевдо-тензора в общем тензорном анализе. В § 22 мы ввели совокупность величин $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, антисимметричных относительно всех своих значков, причем $\varepsilon_{0123} = 1$. Эти величины удовлетворяют соотношению (22.02), которое мы, в несколько измененных обозначениях, напишем в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\rho}\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\sigma} = D\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{37.58}$$

где D есть якобиан*) (35.11). С другой стороны, пользуясь правилом умножения определителей, нетрудно доказать формулу

$$\operatorname{Det} g_{\alpha\beta} = D^2 \operatorname{Det} g'_{\lambda\mu}, \tag{37.59}$$

представляющую обобщение формулы (35.18).

Переписав эту формулу в виде

$$g = D^2 g' \tag{37.60}$$

и извлекая после изменения знака положительный квадратный корень, получим

$$\sqrt{-g} = |D|\sqrt{-g'}. \tag{37.61}$$

Это дает нам закон преобразования определителя g. Умножим теперь обе части (37.58) на $\sqrt{-g'}$ и положим

$$E_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{37.62}$$

$$E'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g'}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{37.63}$$

---

*) В формуле (22.02) через D был обозначен якобиан обратной подстановки.

Мы можем тогда написать формулу (37.58) в виде

$$E'_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\rho}\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\sigma}=\operatorname{sgn} D\cdot E_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{37.64}$$

где $\operatorname{sgn} D=\pm 1$ есть знак якобиана D. Эта формула показывает, что для преобразований с положительным якобианом величины $E_{\mu\nu\rho\sigma}$ преобразуются, как ковариантный тензор четвертого ранга, а для преобразований с отрицательным якобианом закон их преобразования отличается лишь знаком от закона преобразования такого тензора. Такую совокупность величин мы будем называть антисимметричным *псевдо-тензором*. Соответствующий контравариантный псевдо-тензор получится по общей формуле

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}=\sqrt{-g}\,g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{37.65}$$

и будет равен

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{37.66}$$

Антисимметричный псевдо-тензор четвертого ранга позволяет сопоставлять всякому антисимметричному тензору второго ранга $A_{\gamma\delta}$ дуальный псевдо-тензор

$$\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}E^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\gamma\delta} \tag{37.67}$$

и всякому антисимметричному тензору третьего ранга $A_{\beta\gamma\delta}$ — дуальный псевдо-вектор

$$\overset{*}{A}{}^{\alpha}=\frac{1}{6}E^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\beta\gamma\delta}. \tag{37.68}$$

Если антисимметричный тензор $A_{\beta\gamma\delta}$ составлен из трех векторов a_μ, b_μ, c_μ по формуле

$$A_{\beta\gamma\delta}=a_\beta b_\gamma c_\delta+a_\gamma b_\delta c_\beta+a_\delta b_\beta c_\gamma-a_\gamma b_\beta c_\delta-a_\beta b_\delta c_\gamma-a_\delta b_\gamma c_\beta, \tag{37.69}$$

то дуальный псевдо-вектор будет иметь составляющие

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{A}{}^{0}&=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}; &\quad \overset{*}{A}{}^{1}&=+\frac{1}{\sqrt{-g}}\begin{vmatrix}a_0&a_2&a_3\\ b_0&b_2&b_3\\ c_0&c_2&c_3\end{vmatrix}\\
\overset{*}{A}{}^{2}&=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\begin{vmatrix}a_0&a_1&a_3\\ b_0&b_1&b_3\\ c_0&c_1&c_3\end{vmatrix}; &\quad \overset{*}{A}{}^{3}&=+\frac{1}{\sqrt{-g}}\begin{vmatrix}a_0&a_1&a_2\\ b_0&b_1&b_2\\ c_0&c_1&c_2\end{vmatrix}
\end{aligned}\right\}, \tag{37.70}$$

пропорциональные минорам (алгебраическим дополнениям) элементов ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{37.71}$$

Очевидно, будет

$$\overset{*}{A}{}^\alpha a_\alpha = 0; \quad \overset{*}{A}{}^\alpha b_\alpha = 0; \quad \overset{*}{A}{}^\alpha c_\alpha = 0, \tag{37.72}$$

так что псевдо-вектор $\overset{*}{A}{}^\alpha$ будет перпендикулярен каждому из векторов a_α, b_α, c_α. Такой псевдо-вектор $\overset{*}{A}{}^\alpha$ можно назвать векторным произведением трех векторов a_α, b_α, c_α.

§ 38. Уравнения геодезической линии

Рассмотрим две точки-мгновения, соответствующие последовательным событиям. Координаты их обозначим через $\overset{(1)}{x}_\alpha$ и $\overset{(2)}{x}_\alpha$. Пусть материальная точка движется по некоторой кривой так, что при $x_0 = \overset{(1)}{x}_0$ ее пространственные координаты равны $x_k = \overset{(1)}{x}_k$, а при $x_0 = \overset{(2)}{x}_0$ ее пространственные координаты равны $x_k = \overset{(2)}{x}_k$.

Так как события $\overset{(1)}{x}_\alpha$ и $\overset{(2)}{x}_\alpha$ предполагаются последовательными, то такое движение возможно со скоростью, меньшей скорости света. Время x_0 и соответствующие ему пространственные координаты x_k материальной точки можно выразить параметрически через некоторый вспомогательный параметр p, положив

$$x_\alpha = \varphi^\alpha(p), \tag{38.01}$$

причем должно быть

$$\overset{(1)}{x}_\alpha = \varphi^{(\alpha)}(p_1); \quad \overset{(2)}{x}_\alpha = \varphi^{(\alpha)}(p_2). \tag{38.02}$$

Так как движение происходит со скоростью, меньшей скорости света, то для всякого бесконечно малого интервала мы должны иметь

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\alpha\dot{\varphi}^\beta\,dp^2 > 0, \tag{38.03}$$

где точками обозначены производные по параметру p. Обозначив через $s = c\tau$ конечный интервал между последовательными событиями, пропорциональный промежутку собственного времени τ, мы будем иметь:

$$s = c\tau = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\alpha\dot{\varphi}^\beta}\,dp. \tag{38.04}$$

Рассмотрим теперь два квази-одновременных события. Точки пространства, где эти события произошли, мы можем соединить некоторой кривой, и каждой точке на этой кривой мы можем сопоставить определенный момент времени (т. е. написать для каждой точки свое „уравнение времени"), причем каждая пара этих промежуточных точек-мгновений должна быть квази-одновременной. Аналитически вид кривой и уравнение времени могут быть попрежнему представлены при помощи уравнений (38.01) и (38.02), но мы уже не можем толковать эти уравнения, как описывающие *движение* точки по кривой; они будут соответствовать *статическому* рассмотрению всей кривой в целом. Для каждой пары промежуточных бесконечно близких точек-мгновений мы будем иметь

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\alpha\dot{\varphi}^\beta\, dp^2 < 0, \tag{38.05}$$

и пространственный интервал

$$l = \int\limits_{p_1}^{p_2} \sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\alpha\dot{\varphi}^\beta}\, dp \tag{38.06}$$

будет характеризовать длину кривой.

Можно поставить вопрос об экстремальных значениях временно́го интервала (38.04) между двумя последовательными событиями и пространственного интервала (38.06) между двумя квази-одновременными событиями. Эта вариационная задача приводит к уравнениям, форма которых одинакова в обоих случаях (для временно́го и для пространственного интервала). Получаемые вариационные уравнения называются, по аналогии с теорией поверхностей, уравнениями геодезической линии. Необходимо, однако, отметить, что в теории поверхностей (где квадрат бесконечно малого расстояния есть определенная положительная форма от дифференциалов координат) геодезическая линия является, вообще говоря*), *кратчайшей*, тогда как экстремум временно́го интервала соответствует его *максимуму*, а экстремум пространственного интервала не представляет ни максимума, ни минимума. Последнее утверждение легко проверить в том частном случае, когда ds^2 имеет вид (37.04) (галилеева метрика). Для последовательных событий можно выбрать систему отсчета так, чтобы пространственные координаты начальной и конечной точек совпадали, и взять в качестве параметра время t. Мы будем тогда иметь

$$s = \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \sqrt{c^2 - v^2}\, dt, \tag{38.07}$$

где

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{38.08}$$

*) Т. е. при достаточно близких начальной и конечной точках.

Решением вариационной задачи будут постоянные значения x, y, z, для которых $v^2=0$. Для всякой другой траектории будет $v^2>0$, откуда $\sqrt{c^2-v^2}<c$ и, следовательно,

$$s<s_{\max}=c(t^{(2)}-t^{(1)}). \tag{38.09}$$

Для пространственного интервала можно выбрать систему отсчета так, чтобы было

$$t^{(2)}=t^{(1)}; \quad y^{(2)}=y^{(1)}; \quad z^{(2)}=z^{(1)}, \tag{38.10}$$

тогда как $x^{(2)}>x^{(1)}$. Взяв в качестве параметра координату x, получим

$$l=\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-c^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{38.11}$$

Решением вариационной задачи будут постоянные значения y, z, t, для которых

$$l_{\text{extr}}=x^{(2)}-x^{(1)}. \tag{38.12}$$

Но для других кривых $y(x)$, $z(x)$ и для других уравнений времени $t(x)$ может оказаться как $l>l_{\text{extr}}$, так и $l<l_{\text{extr}}$, смотря по тому, будет ли корень квадратный в (38.11) в среднем больше или меньше единицы.

Составим дифференциальные уравнения геодезической линии. Лагранжева функция нашей вариационной задачи будет равна

$$L=\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^{\alpha}\dot{\varphi}^{\beta}} \tag{38.13}$$

или, если мы будем писать x_α вместо φ^α,

$$L=\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta}. \tag{38.14}$$

Условие экстремума интеграла

$$s=\int_{p_1}^{p_2}L\,dp \tag{38.15}$$

приводит к уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}=0. \tag{38.16}$$

Положим

$$F=\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta, \tag{38.17}$$

откуда

$$L=\sqrt{2F}. \tag{38.18}$$

Рассуждая, как в § 17, мы можем выбрать параметр p так, чтобы было

$$\frac{dF}{dp}=0; \quad F=\text{const}. \tag{38.19}$$

При таком выборе параметра уравнения (38.16) будут равносильны следующим:

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha}-\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}=0. \tag{38.20}$$

Последние уравнения имеют интеграл

$$\dot{x}_\alpha \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha}-F=F=\text{const}, \tag{38.21}$$

так что условие (38.19) будет следствием (38.21). Раскрывая левую часть (38.20), получим

$$\frac{d}{dp}(g_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\dot{x}_\beta\dot{x}_\gamma=0 \tag{38.22}$$

и, выполняя дифференцирование,

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}_\beta+\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\dot{x}_\beta\dot{x}_\gamma-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\dot{x}_\beta\dot{x}_\gamma=0. \tag{38.23}$$

Коэффициент при $\dot{x}_\beta\dot{x}_\gamma$ мы можем симметризовать относительно значков β и γ и положить

$$[\beta\gamma,\alpha]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\right), \tag{38.24}$$

после чего уравнения геодезической линии напишутся

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}_\beta+[\beta\gamma,\alpha]\dot{x}_\beta\dot{x}_\gamma=0. \tag{38.25}$$

Выражение (38.24) носит название скобки Кристоффеля первого рода. Чтобы решить уравнения (38.25) относительно вторых производных, умножим их на $g^{\alpha\nu}$, просуммируем по α и введем обозначения

$$\{\beta\gamma,\nu\}=g^{\alpha\nu}[\beta\gamma,\alpha]. \tag{38.26}$$

Мы получим тогда

$$\ddot{x}_\nu+\{\beta\gamma,\nu\}\dot{x}_\beta\dot{x}_\gamma=0. \tag{38.27}$$

Выражение (38.26) принято называть скобкой Кристоффеля второго рода. Для него часто употребляют обозначение

$$\{\beta\gamma,\nu\}=\Gamma^\nu_{\beta\gamma}. \tag{38.28}$$

Для единообразия можно и для скобок Кристоффеля первого рода применять обозначение

$$[\alpha\beta,\gamma]=\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}, \tag{38.29}$$

хотя оно и менее употребительно.

Таким образом,

$$\Gamma_{\nu,\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\right), \tag{38.30}$$

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right). \tag{38.31}$$

С этими обозначениями уравнения геодезической линии напишутся:

$$\frac{d^2x_\nu}{dp^2}+\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dp}\frac{dx_\beta}{dp}=0. \tag{38.32}$$

Если скобки Кристоффеля вычислены при помощи фундаментального тензора $g_{\alpha\beta}$, представимого в форме (35.17), то уравнения (38.32) эквивалентны уравнениям

$$\frac{d^2x'_k}{dp^2}=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{38.33}$$

для галилеевых координат x'_k. Это вытекает из ковариантности уравнений и из того факта, что в галилеевых координатах скобки Кристоффеля равны нулю. Таким образом, в этом случае уравнения геодезической линии (38.32) соответствуют линейной зависимости галилеевых координат от параметра p.

Нетрудно видеть, что выкладки, которые привели нас к уравнениям (38.32), остаются в силе независимо от знака величины F. Если $F>0$, то „геодезическая линия“ соединяет два последовательных события, и уравнения (38.32) можно толковать, как уравнения движения свободной материальной точки, движущейся со скоростью, меньшей скорости света. Приращение dp параметра p будет пропорционально приращению $d\tau$ собственного времени τ, и вместо (38.32) мы можем написать

$$\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}+\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{d\tau}\frac{dx_\beta}{d\tau}=0. \tag{38.34}$$

Длина геодезической линии дает интервал собственного времени между „отправлением“ и „прибытием“ материальной точки. Если же $F<0$, то „геодезическая линия“ соединяет два квази-одновременных события, и мы можем положить dp пропорциональным приращению dl пространственного интервала. Уравнения (38.32) напишутся тогда

$$\frac{d^2x_\nu}{dl^2}+\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dl}\frac{dx_\beta}{dl}=0. \tag{38.35}$$

Случаю $F=0$ соответствует движение точки по лучу со скоростью света. В этом случае лагранжева функция (38.18) равна нулю и приведенный выше вывод уравнений геодезической линии теряет силу. Однако самые уравнения (38.32) сохраняют смысл и в этом случае, причем, так как они имеют интеграл (38.21), то они совместны с условием $F=0$. Чтобы обосновать их, можно исходить из уравнений Гамильтона, рассмотренных в § 36. Согласно (36.10) мы имеем

$$\frac{dx_k}{dx_0}=\frac{\partial H}{\partial \omega_k};\quad \frac{d\omega_k}{dx_0}=-\frac{\partial H}{\partial x_k}\quad (k=1,\ 2,\ 3), \tag{38.36}$$

где функция Гамильтона $H=-\omega_0$ получается решением относительно ω_0 уравнения

$$G\equiv g^{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta=0. \tag{38.37}$$

Поэтому мы имеем

$$dH=-d\omega_0=\frac{1}{\left(\frac{\partial G}{\partial \omega_0}\right)}\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}dx_\alpha+\frac{\partial G}{\partial \omega_k}d\omega_k\right). \tag{38.38}$$

Пользуясь тем, что

$$\frac{d\omega_0}{dx_0}=-\frac{dH}{dx_0}=-\frac{\partial H}{\partial x_0}, \tag{38.39}$$

и выражая производные от H через производные от G, мы можем написать уравнения (38.36) в симметричном виде:

$$\frac{dx_\alpha}{dp}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \omega_\alpha};\quad \frac{d\omega_\alpha}{dp}=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}\quad (\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{38.40}$$

где dp рассматривается, как дифференциал независимой переменной p. Первые четыре уравнения (38.40) уже были выписаны нами в § 36. Раскрывая правые части (38.40), будем иметь

$$\frac{dx_\alpha}{dp}=g^{\alpha\beta}\omega_\beta;\quad \frac{d\omega_\alpha}{dp}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\omega_\mu\omega_\nu. \tag{38.41}$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения равносильны уравнениям (38.32). В самом деле, мы имеем

$$\omega_\mu=g_{\mu\lambda}\frac{dx_\lambda}{dp} \tag{38.42}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\omega_\mu=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}g_{\mu\lambda}\frac{dx_\lambda}{dp}=-g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\lambda}{dp}, \tag{38.43}$$

так как

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}g_{\mu\lambda}+g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\mu\nu}g_{\mu\lambda})=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\delta^\nu_\lambda)=0. \tag{38.44}$$

Подставляя (38.43) в (38.41), получим

$$\frac{d\omega_\alpha}{dp}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\omega_\nu\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\lambda}{dp} \tag{38.45}$$

или, вследствие первых уравнений (38.41),

$$\frac{d\omega_\alpha}{dp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\lambda}{dp}. \tag{38.46}$$

Исключая отсюда и из (38.42) величины ω_α, получаем окончательно

$$\frac{d}{dp}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx_\beta}{dp}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\lambda}{dp}. \tag{38.47}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (38.22), из которых были получены уравнения геодезической линии в форме (38.32). Переход от (38.41) к (38.47) есть обычный переход от уравнений Гамильтона к уравнениям Лагранжа.

Таким образом, мы доказали, что и „геодезическая линия" нулевой длины определяется уравнениями (38.32), если к ним присоединить условие $F = 0$.

Заметим, что в силу постоянства величины F геодезическая линия сохраняет свой характер на всем своем протяжении: либо она все время соответствует движению точки со скоростью, меньшей скорости света, либо она все время есть нулевая линия, либо она сохраняет пространственный характер.

Для нулевой геодезической линии соотношение (38.37), в котором $\omega_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha}$, может рассматриваться, как уравнение Гамильтона — Якоби для функции действия ω (см. § 36). Нетрудно получить уравнение Гамильтона — Якоби и для общего случая. Для определенности мы рассмотрим движение точки со скоростью, меньшей скорости света.

Выбирая в качестве параметра время $t = x_0$ и обозначая точкой дифференцирование по t, мы можем написать функцию Лагранжа нашей задачи*) в виде

$$L = +\sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}. \tag{38.48}$$

Обобщенные импульсы будут равны

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = p_i = +\frac{1}{L}(g_{0i} + g_{ik}\dot{x}_k), \tag{38.49}$$

а функция Гамильтона получится по обычному правилу

$$H = \dot{x}_i p_i - L = -\frac{1}{L}(g_{00} + g_{0k}\dot{x}_k), \tag{38.50}$$

причем скорости $\dot{x}_k$ должны быть здесь выражены при помощи (38.49) через p_i.

---

*) Для удобства мы берем здесь функцию Лагранжа со знаком, обратным тому, какой принят в механике, вследствие чего знак энергии будет обратен знаку функции Гамильтона H.

Если мы положим

$$p_0 = \frac{1}{L}(g_{00} + g_{0k}\dot{x}_k) \tag{38.51}$$

и примем во внимание, что

$$L\,dt = ds, \tag{38.52}$$

где s — длина дуги, то четыре величины p_i, p_0 могут быть записаны единообразно в виде

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}\frac{dx_\beta}{ds}. \tag{38.53}$$

Из тождества

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 1 \tag{38.54}$$

вытекает соотношение

$$g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = 1, \tag{38.55}$$

которое можно рассматривать, как результат исключения трех скоростей $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ из четырех уравнений (38.49) и (38.51). Гамильтонова функция $H = -p_0$ получается решением уравнения (38.55) относительно p_0. По общему правилу, уравнение Гамильтона—Якоби получится, если выразить H, p_1, p_2, p_3 через частные производные функции действия S по времени и по координатам согласно формулам

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}; \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial x_k}, \tag{38.56}$$

которые могут быть записаны в виде

$$p_\nu = \frac{\partial S}{\partial x_\nu}. \tag{38.57}$$

Таким образом, уравнение геодезической линии в форме Гамильтона—Якоби имеет вид

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x_\mu}\frac{\partial S}{\partial x_\nu} = 1. \tag{38.58}$$

Если известен полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби

$$S = S(x_0, x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) + c_0, \tag{38.59}$$

содержащий три произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 (не считая аддитивной постоянной c_0), то, как доказывается в механике, производные от S по постоянным будут также постоянными

$$\frac{\partial S}{\partial c_k} = b_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{38.60}$$

Постоянные эти определяются затем из условий задачи.

Как видно из сравнения (38.58) с (38.37), уравнение нулевой геодезической линии получается из (38.58) заменой правой части нулем. Для пространственной геодезической линии правая часть уравнения Гамильтона — Якоби есть отрицательная постоянная, которую можно положить равной -1.

§ 39. Параллельный перенос вектора

В евклидовом пространстве равенство и параллельность двух векторов, отнесенных к разным точкам, формулируется весьма просто. Два вектора равны и параллельны, если их декартовы составляющие равны. То же определение, очевидно, годится и для векторов в плоскости. Оно непосредственно обобщается и на случай изогнутой поверхности, развертывающейся на плоскость. Если же мы имеем произвольную (не развертывающуюся) поверхность, то параллельность двух лежащих в ней векторов может быть определена только если точки приложения этих векторов бесконечно близки. Вектор на поверхности мы можем рассматривать, как вектор в пространстве, касательный к поверхности в точке его приложения. Если дан вектор на поверхности в точке P, то параллельный ему (в смысле геометрии на поверхности) вектор в бесконечно близкой точке Q может быть построен следующим образом. Данный вектор в точке P мы рассматриваем, как пространственный вектор, и строим в точке Q параллельный ему в обычном смысле пространственный вектор, а затем проектируем его на плоскость, касательную к поверхности в точке Q. Этот касательный вектор в Q мы и считаем параллельным данному вектору в P.

Аналитически это построение может быть выполнено следующим образом. Пусть y_1, y_2, y_3 — декартовы координаты в евклидовом пространстве, а x_1, x_2 — координатные параметры поверхности. Параметрические уравнения поверхности имеют вид:

$$y_1 = y_1(x_1, x_2); \quad y_2 = y_2(x_1, x_2); \quad y_3 = y_3(x_1, x_2), \tag{39.01}$$

и квадрат элемента дуги на поверхности будет равен

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2, \tag{39.02}$$

где

$$g_{ik} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}. \tag{39.03}$$

Пусть A_1, A_2 — ковариантные и A^1, A^2 — контравариантные составляющие некоторого вектора на поверхности в точке $P(x_1, x_2)$. Мы можем рассматривать его, как пространственный вектор с прямоугольными составляющими

$$Y_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} A^1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} A^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3), \tag{39.04}$$

причем будет

$$A_l = \sum_{n=1}^{3} Y_n \frac{\partial y_n}{\partial x_l} \quad (l = 1,\ 2). \tag{39.05}$$

Если мы, перейдя к точке $Q(x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2)$, не изменим прямоугольных составляющих Y_n, мы получим пространственный вектор, который уже не будет касательным к поверхности. Но его касательные составляющие определят на поверхности вектор

$$A_l + \delta A_l = \sum_{n=1}^{3} Y_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} \delta x_k \right), \tag{39.06}$$

который мы и считаем, по определению, результатом параллельного (в смысле геометрии на поверхности) переноса вектора A_l в точку Q. Нормальная же составляющая Y_n, очевидно, из формулы (39.06) выпадает.

В формуле (39.06) добавка к $\frac{\partial y_n}{\partial x_l}$ учитывает изменение этой величины при переходе от P к Q. Из-за этой добавки составляющая A_l получает приращение

$$\delta A_l = \sum_{n=1}^{3} Y_n \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} \delta x_k. \tag{39.07}$$

Подставляя сюда выражение (39.04) для Y_n, получаем

$$\delta A_l = \sum_{i,\,k=1}^{2} A^i \delta x_k \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l}. \tag{39.08}$$

На основании выражения (39.03) для g_{ik} нетрудно проверить, что в формуле (39.08) сумма по n равна

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} \right), \tag{39.09}$$

или, если воспользоваться обозначением (38.30) для скобок Кристоффеля,

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} = \Gamma_{i,\,kl} \tag{39.10}$$

Таким образом, приращение составляющих вектора при параллельном переносе будет равно

$$\delta A_l = \sum_{i,\,k=1}^{2} \Gamma_{i,\,kl} A^i \,\delta x_k. \tag{39.11}$$

Существенно отметить, что это приращение зависит только от внутренних свойств поверхности, определяемых выражением (39.02) для ds^2.

Теория параллельного переноса векторов, развитая в работах Леви-Чивита [14] и его учеников, может быть формулирована почти без изменений для случая четырехмерного многообразия пространства-времени.

Пусть коэффициенты квадратичной формы

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{39.12}$$

представлены в виде

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{N} e_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} \frac{\partial y_n}{\partial x_\beta}, \tag{39.13}$$

где числа e_n равны ± 1, а

$$y_n = y_n(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) \tag{39.14}$$

суть некоторые функции. В обычной теории относительности величины $g_{\alpha\beta}$ получаются из квадратичной формы (39.09) и представимы в виде (35.15), что соответствует случаю $N = 4$. В самом общем случае мы имеем 10 величин $g_{\alpha\beta}$, и для их представления в виде (39.13) нужно не больше 10 функций y_n (последнее может быть доказано и строго). Заметим, что так как сигнатура квадратичной формы (39.12) равна $(+\,-\,-\,-)$, то среди чисел e_n должно быть не меньше одного положительного и не меньше трех отрицательных.

Величины y_n мы можем формально толковать, как декартовы координаты в некотором многомерном псевдо-евклидовом пространстве с метрикой, определяемой выражением

$$d\eta^2 = \sum_{n=1}^{N} e_n\, dy_n^2, \tag{39.15}$$

а наше пространство-время — как некоторую гиперповерхность в этом многомерном пространстве.

Обычному контравариантному вектору A^α в пространстве-времени будет соответствовать в многомерном пространстве касательный к гиперповерхности вектор с декартовыми составляющими

$$Y_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} A^\alpha \tag{39.16}$$

(здесь и в дальнейшем снова подразумевается суммирование по греческим значкам от 0 до 3). Отсюда получаем на основании (39.13) следующие выражения для ковариантных составляющих вектора A_α:

$$A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n Y_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha}. \tag{39.17}$$

Значения составляющих вектора A_α после его параллельного переноса в бесконечно близкую точку мы можем, аналогично (39.06), определить по формуле

$$A_\alpha + \delta A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n Y_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\delta x_\beta\right), \tag{39.18}$$

откуда

$$\delta A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n Y_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\delta x_\beta, \tag{39.19}$$

и после подстановки вместо Y_n его выражения из (39.16)

$$\delta A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} A^\gamma \delta x_\beta. \tag{39.20}$$

Но из (39.13) следует, аналогично (39.10):

$$\sum_{n=1}^{N} e_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta}, \tag{39.21}$$

где $\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}$ — обычные скобки Кристоффеля

$$\Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right). \tag{39.22}$$

Поэтому формула для приращения составляющих вектора при параллельном переносе напишется

$$\delta A_\alpha = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} A^\gamma \delta x_\beta, \tag{39.23}$$

так же как и в случае обыкновенной поверхности в обычном евклидовом пространстве.

В формулу (39.23) входят как ковариантные, так и контравариантные составляющие вектора, но нетрудно выразить в ней обе части через одни и те же составляющие. Мы имеем

$$A^\gamma = g^{\nu\gamma} A_\nu, \tag{39.24}$$

$$g^{\nu\gamma}\Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\alpha\beta}. \tag{39.25}$$

Поэтому

$$\delta A_\alpha = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A_\nu \delta x_\beta. \tag{39.26}$$

Сюда входят только ковариантные составляющие. С другой стороны,

$$\delta A_\alpha = g_{\alpha\gamma}\delta A^\gamma + A^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta}\delta x_\beta = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} A^\gamma \delta x_\beta \tag{39.27}$$

и, как легко проверить,

$$\Gamma_{\gamma,\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta}. \tag{39.28}$$

Отсюда

$$g_{\alpha\gamma}\delta A^\gamma = -\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} A^\gamma \delta x_\beta \tag{39.29}$$

и, следовательно, формула для контравариантных составляющих имеет вид

$$\delta A^\nu = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x_\beta. \tag{39.30}$$

Рассмотрим изменение скалярного произведения двух векторов при параллельном переносе. Мы имеем

$$\delta(A^\nu B_\nu) = B_\nu \delta A^\nu + A^\alpha \delta B_\alpha. \tag{39.31}$$

Подставляя сюда выражение для δA^ν из (39.30) и написав, согласно (39.26), δB_α в виде

$$\delta B_\alpha = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} B_\nu \delta x_\beta, \tag{39.32}$$

мы убедимся, что оба члена в (39.31) сокращаются, и мы получаем

$$\delta(A^\nu B_\nu) = 0. \tag{39.33}$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов при параллельном переносе не меняется. В частности, не меняется и абсолютная величина вектора.

Мы рассматривали до сих пор бесконечно малые смещения. Но, суммируя их, мы можем определить параллельный перенос и вдоль любой заданной кривой. Пусть координаты точки на кривой заданы как функции некоторого параметра p:

$$x_\beta = x_\beta(p). \tag{39.34}$$

Величины $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ (которые являются функциями координат) также будут известными функциями от p. Для определения вектора A^ν в функции от p мы будем иметь дифференциальные уравнения

$$\frac{dA^\nu}{dp} = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{dx_\beta}{dp}. \tag{39.35}$$

Если заданы значения A^ν для начальной точки кривой, то, интегрируя уравнения (39.35), мы получим значения A^ν и для конечной точки кривой. Тем самым мы произведем параллельный перенос вектора из начальной точки в конечную. Результат будет, очевидно, зависеть от вида кривой, вдоль которой производится перенос.

Сравним уравнения (39.35) параллельного переноса с уравнениями геодезической линии

$$\frac{d^2x_\nu}{dp^2}+\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dp}\frac{dx_\beta}{dp}=0. \tag{38.27}$$

Те и другие уравнения совпадут, если мы положим

$$A^\nu=\frac{dx_\nu}{dp}. \tag{39.36}$$

Если геодезическая линия временно-подобна (т. е. соответствует движению точки со скоростью, меньшей скорости света), то в качестве параметра p можно взять собственное время τ, и вектор A^ν будет совпадать с четырехмерной скоростью. Таким образом, в этом случае уравнения геодезической линии можно толковать, как уравнения параллельного переноса вектора скорости вдоль направления, даваемого этим же самым вектором (в четырехмерном смысле).

Из уравнений параллельного переноса для вектора нетрудно получить соответствующие уравнения для тензора любого ранга. В качестве примера рассмотрим случай ковариантного тензора второго ранга $T_{\mu\nu}$. Мы будем исходить из требования, чтобы инвариант

$$I=T_{\mu\nu}A^\mu B^\nu \tag{39.37}$$

не менялся при параллельном переносе, каковы бы ни были векторы A^μ и B^ν. Меняя обозначения значков, мы можем написать величину δI в виде

$$\delta I=A^\mu B^\nu(\delta T_{\mu\nu}-T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\,\delta x_\beta-T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\,\delta x_\beta). \tag{39.38}$$

Так как это выражение должно обращаться в нуль при любых A^μ и B^ν, мы должны иметь

$$\delta T_{\mu\nu}=T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\,\delta x_\beta+T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\,\delta x_\beta, \tag{39.39}$$

что и является искомым обобщением уравнений параллельного переноса.

§ 40. Ковариантное дифференцирование

В случае постоянных $g_{\mu\nu}$ операцию дифференцирования по координате можно было, в известном смысле, рассматривать, как умножение на некоторый вектор. Так, если A_ν есть вектор, заданный в некоторой области как функция точки, то выражение $\nabla_\mu A_\nu=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$ будет, при постоянных $g_{\mu\nu}$, тензором с теми же свойствами преобразования, как произведение векторов ∇_μ и A_ν. Поэтому в указанном случае тензорный анализ не отличается, в формальном отношении, от тензорной алгебры.

В случае переменных $g_{\mu\nu}$ это уже будет не так: производная от вектора по координате не будет тензором. Однако и здесь можно построить такую линейную комбинацию из производной от вектора и составляющих самого вектора, чтобы она преобразовывалась как тензор.

Рассмотрим вектор A_ν, заданный как функция точки в некоторой области. Составляющие его будут функциями от координат. Изменение этого вектора при переходе от точки $P(x_\beta)$ к бесконечно близкой точке $Q(x_\beta + \delta x_\beta)$ будет

$$(A_\nu)_Q - (A_\nu)_P = \delta_1 A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta}\delta x_\beta. \tag{40.01}$$

Мы можем, однако, сравнивать значение $(A_\nu)_Q$ вектора A_ν в точке Q не с его значением в точке P, а с результатом $(A_\nu)''_Q$ его параллельного переноса из P в Q. Согласно (39.26), при параллельном переносе вектора его изменение равно

$$(A_\nu)''_Q - (A_\nu)_P = \delta_2 A_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\beta} A_\mu \delta x_\beta. \tag{40.02}$$

Вычитая это выражение из предыдущего, т. е. составляя разность

$$(A_\nu)_Q - (A_\nu)''_Q = \delta A_\nu = \delta_1 A_\nu - \delta_2 A_\nu, \tag{40.03}$$

мы получим

$$\delta A_\nu = \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\mu_{\nu\beta} A_\mu\right)\delta x_\beta. \tag{40.04}$$

Величина δA_ν есть разность между фактическим изменением вектора A_ν и тем, какое он претерпел бы при параллельном переносе. В то же время это есть разность двух векторов $(A_\nu)_Q$ и $(A_\nu)''_Q$, которые оба относятся к одной и той же точке Q. Поэтому δA_ν есть вектор. Но при произвольных δx_β это может быть только в том случае, если величина

$$\nabla_\beta A_\alpha \equiv \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A_\nu \tag{40.05}$$

есть ковариантный тензор второго ранга *). Эта величина называется тензориальной или ковариантной производной. Она и является искомым обобщением обыкновенной производной от вектора на случай переменных $g_{\mu\nu}$.

Путем аналогичных рассуждений можно составить выражение для ковариантной производной от контравариантного вектора. Оно имеет

---

*) Тензорный характер (40.05) может быть доказан и без привлечения понятия параллельного переноса. Для этого достаточно проверить прямым вычислением, исходя из (37.06), закон преобразования скобок Кристоффеля (42.04) и затем преобразовать выражение (40.05) к новым переменным, используя этот закон, а также закон преобразования (37.06) составляющих вектора.

вид

$$\nabla_\beta A^\nu \equiv \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\beta} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha. \tag{40.06}$$

Формулы для ковариантных производных легко обобщаются на случай произвольного тензора. Рассмотрим сперва тензор второго ранга $T_{\mu\nu}$. Согласно (39.39), изменение его составляющих при параллельном переносе из P в Q равно

$$\delta_2 T_{\mu\nu} = (\Gamma^\alpha_{\mu\beta} T_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} T_{\mu\alpha})\,\delta x_\beta. \tag{40.07}$$

Если же составляющие $T_{\mu\nu}$ являются функциями от координат, то изменение их при переходе из P в Q равно

$$\delta_1 T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\,\delta x_\beta. \tag{40.08}$$

Разность

$$\delta T_{\mu\nu} = \delta_1 T_{\mu\nu} - \delta_2 T_{\mu\nu}, \tag{40.09}$$

равная

$$\delta T_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \Gamma^\rho_{\mu\beta}\, T_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\beta} T_{\mu\rho}\right)\delta x_\beta, \tag{40.10}$$

есть тензор при любых значениях смещений δx_β. Поэтому и величина

$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \Gamma^\rho_{\mu\beta} T_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\beta} T_{\mu\rho} \tag{40.11}$$

должна быть тензором.

Аналогично доказывается тензорный характер величин

$$\nabla_\beta T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + \Gamma^\mu_{\rho\beta} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\beta} T^{\mu\rho}, \tag{40.12}$$

где $T^{\mu\nu}$ есть контравариантный тензор, а также

$$\nabla_\beta T^\mu_\nu = \frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\nu} T^\mu_\rho + \Gamma^\mu_{\rho\beta} T^\rho_\nu, \tag{40.13}$$

где T^μ_ν есть смешанный тензор.

Применяя правило составления ковариантной производной к ковариантным или контравариантным составляющим фундаментального тензора, мы убедимся, что выражения (40.11) и (40.12) для него равны нулю. Равенство нулю ковариантных производных от фундаментального тензора носит название леммы Риччи. Ввиду важности этой леммы рассмотрим соответствующие формулы подробнее.

При $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ величина (40.11) равна

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\beta} - g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\beta} = 0. \tag{40.14}$$

В самом деле, эта формула, написанная в виде

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} = \Gamma_{\nu,\,\mu\beta} + \Gamma_{\mu,\,\nu\beta}, \tag{40.15}$$

приводится к тождеству в силу определения (39.22) величин $\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta}$. [Формула эта совпадает с (39.28)].

Полагая в (40.12) $T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, получаем

$$\nabla_\beta g^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\beta} + g^{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\rho\beta} = 0. \tag{40.16}$$

Для проверки этого соотношения достаточно воспользоваться явным выражением (38.29) для $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$. Соотношение (40.16) приведется к виду

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\beta} = 0 \tag{40.17}$$

и будет эквивалентно следующему:

$$g_{\nu\alpha}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}(g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}) = 0. \tag{40.18}$$

Наконец, при $T^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ выражение (40.13) обращается в нуль в силу симметрии величин $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ относительно нижних значков.

Ковариантное дифференцирование произведения двух тензоров подчиняется тем же правилам, как обычное дифференцирование. Это непосредственно вытекает из нашего способа вывода выражения для ковариантной производной; выражение это получается из выражения для бесконечно малого приращения, для которого имеет место правило составления дифференциала от произведения.

Проверим правило дифференцирования произведения на примере произведения двух векторов. Положив в формуле (40.11)

$$T_{\mu\nu} = U_\mu V_\nu, \tag{40.19}$$

мы получим

$$\nabla_\beta(U_\mu V_\nu) = \left(\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\rho_{\mu\beta}U_\rho\right)V_\nu + U_\mu\left(\frac{\partial V_\nu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\rho_{\nu\beta}V_\rho\right) \tag{40.20}$$

и вследствие (40.05)

$$\nabla_\beta(U_\mu V_\nu) = (\nabla_\beta U_\mu)\cdot V_\nu + U_\mu(\nabla_\beta V_\nu). \tag{40.21}$$

Применяя правило дифференцирования произведения к выражению

$$U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu \tag{40.22}$$

и пользуясь тем, что ковариантная производная от фундаментального тензора равна нулю, мы получим

$$\nabla_\beta U_\mu = g_{\mu\nu}\nabla_\beta U^\nu. \tag{40.23}$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании величины $g_{\mu\nu}$ ведут себя, как постоянные, и их можно выносить из-под знака ковариантной производной. Другими словами, при ковариантном дифференцировании безразлично, будут ли значки опущены (или подняты) до или после составления производной.

Мы выписали выше в явной форме выражения для ковариантной производной от вектора и от тензора второго ранга. Ковариантная производная от скаляра Φ совпадает с обыкновенной производной

$$\nabla_\beta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\beta}. \tag{40.24}$$

Она является, как мы знаем, ковариантным вектором.

Для полноты мы выпишем также общее выражение для ковариантной производной от тензора произвольного ранга

$$U^{(\mu)}_{(\nu)} = U^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_k}, \tag{40.25}$$

содержащего m контравариантных и k ковариантных значков. Мы имеем

$$\nabla_\beta U^{(\mu)}_{(\nu)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}(U^{(\mu)}_{(\nu)}) + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\beta} U^{\rho\mu_2 \ldots \mu_m}_{(\nu)} + \ldots + \Gamma^{\mu_m}_{\rho\beta} U^{\mu_1 \ldots \mu_{m-1}\rho}_{(\nu)} - \\ - \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_1} U^{(\mu)}_{\rho\nu_2 \ldots \nu_k} - \ldots - \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_k} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{k-1}\rho}. \tag{40.26}$$

Здесь в каждом члене суммы один из значков дифференцируемого тензора переходит в значок коэффициента Γ той же вариантности, а в самом тензоре заменяется значком суммирования, который входит также в качестве значка Γ противоположной вариантности. Один из нижних значков Γ есть всегда номер координаты, по которой производится дифференцирование. При этом те члены, в которых меняется верхний значок тензора, входят со знаком плюс, а те члены, в которых меняется нижний значок тензора, входят со знаком минус.

Иногда удобно употреблять особое обозначение для операции ковариантного дифференцирования, сопровождаемой поднятием соответствующего значка. Операцию

$$\nabla^\alpha = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \tag{40.27}$$

называют контравариантным дифференцированием.

§ 41. Примеры составления ковариантных производных

Применим полученные правила ковариантного дифференцирования к некоторым частным случаям.

Составим прежде всего расходимость данного вектора. Согласно (40.06), выражение

$$\nabla_\mu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} A^\alpha \tag{41.01}$$

представляет смешанный тензор второго ранга. Свертывая его по значкам μ и ν, мы получим скаляр

$$\operatorname{Div} A \equiv \nabla_\nu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\nu} A^\alpha, \tag{41.02}$$

который и является обобщением выражения (21.24) для четырехмерной расходимости. Это выражение может быть упрощено. Мы имеем

$$\Gamma^\nu_{\alpha\nu} = g^{\mu\nu} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}\right) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{41.03}$$

Но если g есть определитель, составленный из $g_{\mu\nu}$, и $gg^{\mu\nu}$ есть минор элемента $g_{\mu\nu}$ в этом определителе, то по правилу дифференцирования определителей мы имеем

$$dg = gg^{\mu\nu}\, dg_{\mu\nu}, \tag{41.04}$$

откуда

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{41.05}$$

Заметим, что вследствие (40.18) это выражение равно

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{41.06}$$

Таким образом,

$$\Gamma^\nu_{\alpha\nu} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \lg \sqrt{-g}. \tag{41.07}$$

Подставляя это в (41.02), получим:

$$\nabla_\nu A^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g}\, A^\nu). \tag{41.08}$$

Таким образом, умноженная на $\sqrt{-g}$ расходимость вектора A равна сумме частных производных по координатам от его контравариантных составляющих, умноженных на $\sqrt{-g}$.

Если мы возьмем в качестве вектора A градиент некоторого скаляра φ и положим

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \tag{41.09}$$

и, следовательно,

$$A^\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}, \tag{41.10}$$

то расходимость этого вектора даст инвариантное выражение

$$\Box \varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right), \tag{41.11}$$

которое является обобщением оператора Даламбера (21.27).

С другой стороны, ту же расходимость мы можем вычислить следующим образом. Составим сперва ковариантную производную от градиента φ. По общему правилу (40.05) мы получим выражение

$$\varphi_{\mu\nu}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}, \tag{41.12}$$

которое будет симметричным относительно значков μ и ν. Его можно назвать второй ковариантной производной от скаляра φ. Составляя затем инвариант

$$\Box\varphi=g^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}, \tag{41.13}$$

мы будем иметь

$$\Box\varphi=g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\Gamma^\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}, \tag{41.14}$$

где мы положили для краткости

$$\Gamma^\alpha=g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \tag{41.15}$$

Так как оба выражения (41.11) и (41.14) представляют расходимость одного и того же вектора, то они должны совпадать. Равенство коэффициентов при вторых производных от φ непосредственно очевидно. Приравнивая коэффициенты при первых производных, мы получим тождество

$$\Gamma^\alpha=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\right), \tag{41.16}$$

которое может быть проверено и непосредственно.

Заметим, что если мы введем в качестве координат x_0, x_1, x_2, x_3 четыре решения уравнения $\Box\varphi=0$, то для них будет $\Gamma^\alpha=0$. Такие координаты, удовлетворяющие, кроме того, условиям на бесконечности, о которых мы будем говорить в следующей главе, называются гармоническими. В обычной теории относительности гармоническими являются декартовы координаты и время.

Если вектор A_μ есть градиент некоторого скаляра, то для него разность ковариантных производных $\nabla_\mu A_\nu-\nabla_\nu A_\mu$ равна нулю. В общем же случае эта разность не равна нулю, и ее можно рассматривать, как четырехмерное обобщение вихря данного вектора. Положим *)

$$(\operatorname{Rot}A)_{\mu\nu}=\nabla_\mu A_\nu-\nabla_\nu A_\mu. \tag{41.17}$$

Это выражение представляет, по определению, антисимметричный ковариантный тензор второго ранга. Пользуясь формулой (40.05), легко убедиться, что при составлении разности (41.17) члены, отличающие ковариантные производные от обыкновенных, сократятся, и

*) Символ Rot мы будем употреблять в смысле четырехмерного обобщения вихря, сохраняя для трехмерного вихря символ curl.

мы получим

$$(\mathrm{Rot}\, A)_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{41.18}$$

т. е. выражение, совпадающее с обычным выражением для вихря, которое, таким образом, применимо и в произвольных координатах.

Обозначим через $A_{\mu\nu}$ симметричную часть ковариантной производной от вектора A_μ. Мы имеем

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla_\nu A_\mu + \nabla_\mu A_\nu) \tag{41.19}$$

или, после применения (40.05),

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha. \tag{41.20}$$

При помощи симметричного тензора $A_{\mu\nu}$ мы можем определить вторую ковариантную производную от вектора A_μ, положив

$$\nabla_{\mu\nu} A_\sigma = \nabla_\nu A_{\mu\sigma} + \nabla_\mu A_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma A_{\mu\nu}. \tag{41.21}$$

Раскрывая здесь при помощи (40.09) выражения для тензориальных производных, мы будем иметь

$$\nabla_{\mu\nu} A_\sigma = \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - 2\Gamma^\rho_{\mu\nu} A_{\rho\sigma} + {} \\ + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\sigma} A_\rho) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\Gamma^\rho_{\nu\sigma} A_\rho). \tag{41.22}$$

Аналогично, вторая тензориальная производная от контравариантного вектора напишется:

$$\nabla_{\mu\nu} A^\rho = \frac{\partial^2 A^\rho}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial A^\rho}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} A^\alpha. \tag{41.23}$$

Рассмотрим теперь расходимость тензора второго ранга, который будем писать в контравариантной форме. Согласно (40.10), мы имеем

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\nu} T^{\mu\rho}. \tag{41.24}$$

Преобразуя при помощи (41.07) второй член, мы можем написать:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}. \tag{41.25}$$

Положив здесь $T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ и зная, что тензориальная производная от фундаментального тензора равна нулю, мы вновь получаем тождество (41.16). Если тензор $T^{\mu\nu}$ антисимметричен, то последний член в формуле (41.25) обращается в нуль. Таким образом, расходимость антисимметричного тензора сводится, так же как и расходимость вектора, к сумме производных по координатам. В случае же произвольного тензора подобное представление невозможно.

Напишем выражение для тензориальной производной от ковариантного тензора и два других выражения, получаемых из первого круговой перестановкой значков:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\sigma F_{\mu\nu} &= \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} F_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma} F_{\mu\rho} \\ \nabla_\mu F_{\nu\sigma} &= \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} F_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\sigma\mu} F_{\nu\rho} \\ \nabla_\nu F_{\sigma\mu} &= \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu} F_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} \end{aligned}\right\} \tag{41.26}$$

Предположим теперь, что тензор $F_{\mu\nu}$ антисимметричен:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \tag{41.27}$$

Тогда

$$\nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{41.28}$$

тогда как члены вне знаков производных попарно сокращаются. Антисимметричное относительно всех трех значков выражение

$$F_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} \tag{41.29}$$

будет, следовательно, тензором. Этот антисимметричный тензор третьего ранга $F_{\mu\nu\sigma}$ называется *циклом* данного антисимметричного тензора $F_{\mu\nu}$. С подобным выражением мы уже встречались в § 24.

Цикл данного антисимметричного тензора второго ранга связан с расходимостью дуального антисимметричного псевдо-тензора. Введем, согласно (37.67), дуальный псевдо-тензор $\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$ по формуле

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}, \tag{41.30}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{10} &= F_{23}; & \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{20} &= F_{31}; & \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{30} &= F_{12}, \\ \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{23} &= F_{10}; & \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{31} &= F_{20}; & \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{12} &= F_{30}. \end{aligned}\right\} \tag{41.31}$$

Введем также, согласно (37.68), дуальный к $F_{\mu\nu\sigma}$ псевдо-вектор.

$$\overset{*}{F}{}^{\rho} = \frac{1}{6} E^{\rho\mu\nu\sigma} F_{\mu\nu\sigma}, \tag{41.32}$$

откуда

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{0}=-F_{123},\\ \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{1}=F_{230};\quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{2}=F_{310};\quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{3}=F_{120}.\end{array}\right\}\tag{41.33}$$

Если тензор $F_{\mu\nu\sigma}$ есть цикл $F_{\mu\nu}$, то мы будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta})}{\partial x_\beta}=\overset{*}{F}{}^{\alpha},\tag{41.34}$$

так что псевдо-вектор $\overset{*}{F}{}^{\alpha}$ есть расходимость псевдо-тензора $\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$.

Тот же результат легко получить и без перехода к численным значениям значков, если воспользоваться тем, что вычисленная по общему правилу тензориальная производная от $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (а также от $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$) тождественно равна нулю.

§ 42. Закон преобразования скобок Кристоффеля и локально геодезическая система координат. Условия приводимости основной квадратичной формы к постоянным коэффициентам

Тензориальные производные отличаются от обыкновенных производных членами, содержащими скобки Кристоффеля

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right).\tag{42.01}$$

Если в некоторой точке $x_\rho=\overset{0}{x}_\rho$ все скобки Кристоффеля равны нулю, то выражения для тензориальных и для обыкновенных производных совпадают. Покажем, что в окрестности каждой точки можно ввести такую систему координат, чтобы в этой точке все величины $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ обратились в нуль. Тогда, в силу уравнений (40.14) и (40.16) в этой точке обратятся в нуль и все производные от фундаментального тензора по координатам.

Установим, прежде всего, закон преобразования скобок Кристоффеля при переходе от данной системы координат (x_0, x_1, x_2, x_3) к некоторой новой системе координат (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3). Этот закон можно было бы вывести непосредственно из определения (42.01) величин $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$, пользуясь законом преобразования для фундаментального тензора. Однако проще рассуждать следующим образом. Мы знаем, что величины

$$\varphi_{\mu\nu}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\tag{42.02}$$

представляют тензор. Это значит, что для всякой функции φ и для любого преобразования координат имеют место равенства

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho} = \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} - (\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})'\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\sigma}\right\}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}, \qquad (42.03)$$

где $(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})'$ суть скобки Кристоффеля, вычисленные для штрихованной системы координат. Полагая здесь $\varphi = x'_\sigma$, получим

$$\frac{\partial^2 x'_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} = -(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})'\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}. \qquad (42.04)$$

Эта формула и дает искомый закон преобразования. Наличие члена с второй производной показывает, что $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ не есть тензор. Если же рассматриваемое преобразование — линейное, то указанный член отсутствует, и, следовательно, по отношению к линейным преобразованиям величины $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ ведут себя, как тензор.

Пусть в данной точке величины $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ имеют значения $(\Gamma^\rho_{\mu\nu})_0$. В этой точке величины $(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})'$ штрихованной системы обратятся в нуль, если формулы преобразования координат удовлетворяют равенствам

$$\left(\frac{\partial^2 x'_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right)_0 - (\Gamma^\rho_{\mu\nu})_0\left(\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho}\right)_0 = 0. \qquad (42.05)$$

Эти равенства будут выполняться, если мы положим

$$x'_\sigma = x_\sigma - x^0_\sigma + \frac{1}{2}(\Gamma^\sigma_{\mu\nu})_0(x_\mu - x^0_\mu)(x_\nu - x^0_\nu). \qquad (42.06)$$

Для преобразования (42.06) будет

$$\left(\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho}\right)_0 = \delta^\sigma_\rho. \qquad (42.07)$$

Поэтому значения в данной точке составляющих любого тензора будут одинаковы в штрихованной и в нештрихованной координатной системе. В частности, не изменятся значения фундаментального тензора, тогда как все первые производные от него обратятся в данной точке в нуль. Этим можно пользоваться для упрощения вычислений с тензорами. В самом деле, если относительно некоторого выражения известно, что оно есть тензор и что оно обращается в нуль при условии $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = 0$, то оно будет равно нулю и без этого условия.

Можно доказать, что надлежащим выбором координатной системы можно обратить в нуль производные от g_μ не только в данной точке, но и вдоль заданной линии [14].

Координатная система, в которой, для данной точки, производные от $g_{\mu\nu}$ обращаются в нуль, называется локально геодезической. Это название оправдывается тем, что в указанной системе отсчета уравнения геодезической линии сводятся в данной точке к равенству нулю вторых производных от координат по параметру p (вблизи этой точки вторые производные будут величинами первого порядка малости). Поэтому координаты будут там, с точностью до членов третьего порядка, линейными функциями от параметра.

Поставим вопрос: при каких условиях существует координатная система (x_0', x_1', x_2', x_3'), в которой скобки Кристоффеля равны нулю не только в данной точке или вдоль некоторой линии, но и в некоторой конечной области?

Если такая координатная система существует, то должно существовать решение уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho} = 0, \tag{42.08}$$

так как им удовлетворяют функции

$$\varphi = x_0'; \quad \varphi = x_1'; \quad \varphi = x_2'; \quad \varphi = x_3'. \tag{42.09}$$

Для совместности уравнений (42.08) очевидно необходимо, чтобы вычисляемые из различных уравнений этой системы выражения для третьих производных между собой совпадали. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}\right),\\ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\Gamma^\rho_{\mu\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}\right). \end{aligned}\right\} \tag{42.10}$$

Ввиду равенства левых частей правые части должны быть равны. Приравнивая их, производя дифференцирование и выражая вторые производные через первые, получаем

$$\left(\frac{\partial\Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho} = 0. \tag{42.11}$$

Эти равенства должны иметь место при $\varphi = x_0'$; $\varphi = x_1'$; $\varphi = x_2'$; $\varphi = x_3'$. Так как определитель

$$D = \frac{D(x_0', x_1', x_2', x_3')}{D(x_0, x_1, x_2, x_3)} \tag{42.12}$$

не равен нулю, то должны равняться нулю все коэффициенты при $\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}$ в (42.11), т. е. все выражения

$$R^\rho_{\mu,\nu\alpha} = \frac{\partial\Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}. \tag{42.13}$$

Докажем, что условия

$$R^{\rho}_{\mu,\nu\alpha}=0 \tag{42.14}$$

являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы система уравнений (42.08) имела решение. Для этого положим

$$\varphi_{\nu}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\nu}} \tag{42.15}$$

и напишем систему уравнений (42.08) в виде

$$\frac{\partial\varphi_{\nu}}{\partial x_{\mu}}=\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\varphi_{\rho}. \tag{42.16}$$

Пусть значения φ_{ν} заданы в некоторой точке с координатами x^0_{α}. Чтобы получить их для произвольной точки x_{α}, соединим обе точки какой-нибудь кривой

$$x_{\alpha}=\xi^{\alpha}(p), \tag{42.17}$$

где p — параметр, и будем рассматривать φ_{ν} (а также $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$) как функции от p. Для определения φ_{ν} мы получим систему обыкновенных уравнений

$$\frac{d\varphi_{\nu}}{dp}=\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\mu}\varphi_{\rho}, \tag{42.18}$$

где точка означает производную по параметру p.

Эта система однозначно определяет значения φ_{ν} в конечной точке кривой. Остается показать, что получаемые таким путем значения φ_{ν} не зависят от вида кривой, соединяющей начальную и конечную точки. Для этого рассмотрим между теми же двумя точками бесконечно близкую кривую

$$x_{\alpha}=\xi^{\alpha}(p)+\delta\xi^{\alpha}(p), \tag{42.19}$$

где $\delta\xi^{\alpha}$ — бесконечно малый вектор, который обращается в нуль в начальной и в конечной точке. Значения φ_{ν} на измененной кривой обозначим через $\varphi_{\nu}+\delta\varphi_{\nu}$.

Уравнения, определяющие $\varphi_{\nu}+\delta\varphi_{\nu}$ будут, очевидно, иметь вид

$$\frac{d}{dp}(\varphi_{\nu}+\delta\varphi_{\nu})=\left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}+\frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}\delta\xi^{\alpha}\right)(\dot{\xi}^{\mu}+\delta\dot{\xi}^{\mu})(\varphi_{\rho}+\delta\varphi_{\rho}). \tag{42.20}$$

Вычитая из них (42.18) и отбрасывая бесконечно малые высших порядков, получим

$$\frac{d}{dp}(\delta\varphi_{\nu})=\frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}\dot{\xi}^{\mu}\varphi_{\rho}\delta\xi^{\alpha}+\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\mu}\delta\varphi_{\rho}+\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\varphi_{\rho}\delta\dot{\xi}^{\mu}. \tag{42.21}$$

Используя еще раз (42.18) и вводя обозначение (42.13), мы можем эти уравнения привести к виду

$$\frac{d}{dp}(\delta\varphi_{\nu}-\Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}\varphi_{\rho}\delta\xi^{\alpha})=R^{\rho}_{\nu,\mu\alpha}\varphi_{\rho}\dot{\xi}^{\mu}\delta\xi^{\alpha}+\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\mu}(\delta\varphi_{\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\alpha\rho}\varphi_{\alpha}\delta\xi^{\alpha}). \tag{42.22}$$

Положим для краткости

$$\eta_\nu = \delta\varphi_\nu - \Gamma^\rho_{\alpha\nu}\varphi_\rho\delta\xi^\alpha. \tag{42.23}$$

При условии (42.14) уравнения (42.22) напишутся:

$$\frac{d\eta_\nu}{dp} = \Gamma^\rho_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu\eta_\rho. \tag{42.24}$$

Таким образом, уравнения для η_ν имеют тот же вид, как уравнения (42.18) для φ_ν. (Те и другие представляют уравнения параллельного переноса вектора вдоль рассматриваемой кривой.) Так же как и φ_ν, величины η_ν однозначно определяются из начальных условий. Но начальные условия для величин η_ν — нулевые. В самом деле, координаты начальной точки фиксированы; следовательно, в ней $\delta\xi^\alpha = 0$. Кроме того, в начальной точке фиксированы значения φ_ν, следовательно, в ней также и $\delta\varphi_\nu = 0$. Тем самым в начальной точке $\eta_\nu = 0$. Но при таких начальных условиях будет вдоль всей кривой

$$\eta_\nu = 0 \tag{42.25}$$

и, следовательно,

$$\delta\varphi_\nu = \Gamma^\rho_{\alpha\nu}\varphi_\rho\delta\xi^\alpha. \tag{42.26}$$

Рассматривая теперь конечную точку кривой, координаты которой также фиксированы, мы будем иметь для нее $\delta\xi^\alpha = 0$ и, вследствие (42.26), $\delta\varphi_\nu = 0$. Но это значит, что функция φ_ν приходит в конечную точку с одним и тем же значением, как по первоначальной, так и по измененной бесконечно близкой кривой. Деформируя кривую непрерывным образом, мы получим тот же результат для любых двух кривых, соединяющих заданные начальную и конечную точки (необязательно бесконечно близких). Отсюда следует, что в любой односвязной области величины φ_ν представляют однозначные функции точки, которые определяются их значениями в одной какой-нибудь (начальной) точке.

В силу дифференциальных уравнений (42.16) мы имеем

$$\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{42.27}$$

так как величины $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ симметричны относительно своих нижних значков. Отсюда следует, что выражение

$$d\varphi = \varphi_\nu dx_\nu \tag{42.28}$$

представляет полный дифференциал. Интегрируя его и определяя постоянную из заданного значения φ в начальной точке, мы закончим определение функции φ.

Мы доказали, что необходимым и достаточным условием существования решения уравнений (42.08) является равенство нулю выражения (42.13). При этом функция φ определяется, с точностью до аддитивной постоянной, значениями ее частных производных по координатам в одной точке.

Если даны два решения, φ и ψ, уравнений (42.08) (которые могут и совпадать), то выражение

$$\varphi_\nu \psi^\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \tag{42.29}$$

остается, в силу этих уравнений, постоянным. Для доказательства достаточно составить ковариантную производную от скаляра (42.29) и убедиться, что она равна нулю. [Напомним, что уравнение (42.16) как раз и выражает равенство нулю ковариантной производной от φ_ν].

Обозначим через x_0', x_1', x_2', x_3' четыре решения уравнений (42.08), выбранные так, чтобы в начальной точке было

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} \tag{42.30}$$

(по α не суммируется!). Тогда равенство (42.30) будет иметь место и при всех значениях координат. Отсюда чисто алгебраическим путем получаем

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial x_k'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_k'}{\partial x_\beta}, \tag{42.31}$$

т. е. представление $g_{\alpha\beta}$ в виде (35.15), а следовательно, и приведение ds^2 к виду (35.09).

Таким образом, необходимым и достаточным условием приводимости квадратичной формы

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{42.32}$$

к виду

$$ds^2 = (dx_0')^2 - (dx_1')^2 - (dx_2')^2 - (dx_3')^2 \tag{42.33}$$

является равенство нулю выражения

$$R^\rho_{\mu,\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}, \tag{42.13}$$

составленного из скобок Кристоффеля, вычисленных для квадратичной формы (42.32).

§ 43. Тензор кривизны

Введенное в предыдущем параграфе выражение

$$R^\rho_{\mu,\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} \tag{43.01}$$

играет большую роль в общем тензорном анализе и в теории тяготения. Поэтому мы должны подробно исследовать его свойства.

Докажем прежде всего, что это выражение есть тензор. Доказательство можно провести различными способами. Наиболее непосредственно этот результат может быть получен путем дифференцирования уравнения

$$\frac{\partial^2 x'_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} = -(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})' \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}, \tag{43.02}$$

выражающего, согласно (42.04), закон преобразования скобок Кристоффеля. Результат дифференцирования (43.02) по x_λ может быть записан в виде

$$\frac{\partial^3 x'_\sigma}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\nu} + (\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})' \left(\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\lambda} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} + \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \right) =$$
$$= \left(\frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\tau\lambda} \right) \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} -$$
$$- \left(\frac{\partial (\Gamma^\sigma_{\beta\gamma})'}{\partial x'_\alpha} + (\Gamma^\tau_{\beta\gamma})' (\Gamma^\sigma_{\tau\alpha})' \right) \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\nu}. \tag{43.03}$$

Здесь левая часть симметрична относительно значков λ, μ, ν; следовательно, должна быть симметрична и правая часть. Переставляя в правой части значки λ и ν и приравнивая результат перестановки значению правой части в первоначальном виде, мы получим формулу, которую, при использовании обозначения (43.01), можно написать в виде

$$R^\rho_{\mu,\nu\lambda} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} = (R^\sigma_{\beta,\gamma\alpha})' \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\nu}. \tag{43.04}$$

Эта формула и выражает тот факт, что $R^\rho_{\mu,\nu\lambda}$ представляет тензор четвертого ранга, ковариантный относительно значков μ, ν, λ и контравариантный относительно значка ρ. Тензор этот называется тензором кривизны.

При помощи тензора кривизны можно выразить изменение вектора при параллельном переносе вдоль бесконечно малого замкнутого контура. Пусть значение вектора A_ρ в начальной точке x^0_α есть $(A_\rho)_0$. При переносе его в бесконечно близкую точку значения его составляющих будут равны

$$A_\rho = (A_\rho)_0 + (\Gamma^\sigma_{\alpha\rho})_0 (A_\sigma)_0 (x_\alpha - x^0_\alpha) \tag{43.05}$$

с точностью до величин второго порядка малости *) относительно смещений $x_\alpha - x^0_\alpha$. Очевидно, что изменения ΔA_μ вектора A_μ после обхода по бесконечно малому контуру будут по крайней мере вто-

*) Эти величины второго порядка уже будут зависеть от вида кривой, по которой производится смещение (вектор A_ρ не есть функция точки).

рого порядка малости относительно наибольших смещений. Эти изменения выражаются криволинейным интегралом

$$\Delta A_\mu = \int \Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho \, dx_\nu, \tag{43.06}$$

взятым по рассматриваемому контуру. В случае бесконечно малого контура можно заменить под интегралом величину A_ρ выражением (43.05), а величину $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ — выражением

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = (\Gamma^\rho_{\mu\nu})_0 + \left(\frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)_0 (x_\alpha - x^0_\alpha). \tag{43.07}$$

Подставляя (43.05) и (43.07) в (43.06) и учитывая, что интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю, мы получим

$$\Delta A_\mu = \left[\frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\sigma\alpha}\right]_0 (A_\rho)_0 \int (x_\alpha - x^0_\alpha) \, dx_\nu. \tag{43.08}$$

Величины

$$Q^{\nu\alpha} = \int (x_\alpha - x^0_\alpha) \, dx_\nu = \frac{1}{2} \int [(x_\alpha - x^0_\alpha) \, dx_\nu - (x_\nu - x^0_\nu) \, dx_\alpha] \tag{43.09}$$

можно толковать как проекции охватываемой контуром площадки на координатные „плоскости“. Они представляют, как легко видеть, контравариантный антисимметричный тензор. Пользуясь антисимметрией тензора $Q^{\nu\alpha}$, можно написать формулу (43.08) в виде

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} R^\rho_{\mu,\nu\alpha} A_\rho Q^{\nu\alpha} \tag{43.10}$$

(относящийся к начальной точке значок 0 нами опущен).

Путем аналогичных рассуждений для изменения контравариантных составляющих вектора получается формула

$$\Delta A^\sigma = -\frac{1}{2} R^\sigma_{\rho,\nu\alpha} A^\rho Q^{\nu\alpha}. \tag{43.11}$$

Мы уже знаем, что $R^\rho_{\mu,\nu\alpha}$ есть тензор; это заключение можно было бы вывести и на основании формулы (43.10) или (43.11). В самом деле, ΔA_μ есть разность двух векторов, относящихся к одной точке и, следовательно, представляет собою вектор. С другой стороны, если добавить к антисимметричному тензору $Q^{\nu\alpha}$ произвольную симметричную часть, то уравнение (43.10) не изменится. Таким образом, правая часть (43.10) будет вектором, каков бы ни был тензор $Q^{\nu\alpha}$ и вектор A_ρ, что возможно только в том случае, когда $R^\rho_{\mu,\nu\alpha}$ есть тензор.

В § 40 мы ввели операцию ковариантного дифференцирования. В общем случае операции эти не коммутативны: вторая ковариантная производная от вектора или тензора, взятая сперва по x_β, а затем по x_α, не будет равна такой же производной, взятой сперва по x_α, а затем по x_β. Рассмотрим разность вторых производных от вектора. Мы имеем, согласно (40.05):

$$\nabla_\beta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\nu_{\mu\beta} A_\nu. \tag{43.12}$$

Вычислим $\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu$ в локально-геодезической системе координат (в которой первые производные от $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ обращаются в нуль для данной точки). Мы имеем

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} A_\nu, \tag{43.13}$$

откуда

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha A_\mu = \left(\frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} \right) A_\nu. \tag{43.14}$$

В локально-геодезической системе множитель при A_ν в правой части не отличается от выражения для тензора кривизны, которое равно

$$R^\nu_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\sigma\beta} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\sigma\alpha}. \tag{43.15}$$

Поэтому в локально-геодезической системе имеет место равенство

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A_\mu = R^\nu_{\mu,\alpha\beta} A_\nu. \tag{43.16}$$

Но обе части этого равенства представляют собою тензор. Поэтому, если равенство (43.16) справедливо в какой-нибудь одной системе координат, то оно справедливо и в произвольной системе координат. Таким образом, выражение (43.16) для разности вторых ковариантных производных от вектора является общим.

Аналогично выводится формула

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A^\nu = - R^\nu_{\mu,\alpha\beta} A^\mu \tag{43.17}$$

для контравариантного вектора.

Использованный здесь прием составления тензорного уравнения в локально-геодезической координатной системе, с последующим заключением о том, что оно справедливо и в общем случае, может значительно облегчить выкладки. Уравнения (43.16) и (43.17) настолько просты, что легко могут быть получены и без применения этого приема, но в других случаях вносимое им упрощение существенно.

Рассмотрим, например, выражение для разности вторых ковариантных производных от тензора произвольного ранга

$$U^{(\mu)}_{(\nu)} = U^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_k}. \tag{43.18}$$

Формулу (40.26) для первой производной можно написать в виде

$$\nabla_\beta U^{(\mu)}_{(\nu)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}(U^{(\mu)}_{(\nu)}) + \sum_{i=1}^{m} \Gamma^{\mu_i}_{\rho\beta} U^{\mu_1 \ldots \mu_{i-1}\rho\mu_{i+1} \ldots \mu_m}_{(\nu)} - \\ - \sum_{j=1}^{k} \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_j} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{j-1}\rho\nu_{j+1} \ldots \nu_k}. \qquad (43.19)$$

Составляя, в геодезической системе координат, вторую производную, получим

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta U^{(\mu)}_{(\nu)} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(U^{(\mu)}_{(\nu)}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Gamma^{\mu_i}_{\rho\beta}}{\partial x_\alpha} U^{\mu_1 \ldots \mu_{i-1}\rho\mu_{i+1} \ldots \mu_m}_{(\nu)} - \\ - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\beta\nu_j}}{\partial x_\alpha} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{j-1}\rho\nu_{j+1} \ldots \nu_k}. \qquad (43.20)$$

Следовательно, разность вторых производных будет, в геодезической системе, совпадать с выражением

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) U^{(\mu)}_{(\nu)} = -\sum_{i=1}^{m} R^{\mu_i}_{\rho,\alpha\beta} U^{\mu_1 \ldots \mu_{i-1}\rho\mu_{i+1} \ldots \mu_m}_{(\nu)} + \\ + \sum_{j=1}^{k} R^{\rho}_{\nu_j,\alpha\beta} U^{(\mu)}_{\nu_1 \ldots \nu_{j-1}\rho\nu_{j+1} \ldots \nu_k}. \qquad (43.21)$$

А так как обе части этого выражения представляют собою тензоры, то равенство (43.21) будет справедливо и в произвольной координатной системе.

§ 44. Основные свойства тензора кривизны

Рассмотрим наряду со смешанным тензором кривизны

$$R^{\sigma}_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\rho\beta} - \Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\rho\alpha} \qquad (44.01)$$

ковариантный тензор

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = g_{\nu\sigma} R^{\sigma}_{\mu,\alpha\beta}. \qquad (44.02)$$

Согласно этому определению, смешанный тензор $R^{\sigma}_{\mu,\alpha\beta}$ получается из $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$, поднятием *второго* ковариантного значка. Поэтому более подробным обозначением для него было бы

$$R^{\sigma}_{\mu,\alpha\beta} = R^{\cdot\sigma\cdot\cdot}_{\mu,\alpha\beta} = g^{\sigma\nu} R_{\mu\nu,\alpha\beta}. \qquad (44.03)$$

Заметим, что в старой литературе для ковариантного и для смешанного тензора приняты обозначения

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = (\mu\nu,\ \alpha\beta), \tag{44.04}$$

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} = \{\mu\sigma,\ \alpha\beta\}, \tag{44.05}$$

называемые четырехзначковыми символами Римана первого и второго рода.

Вычисляя по формуле (44.02) ковариантный тензор кривизны, будем иметь

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}[\mu\alpha,\ \nu] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\mu\beta,\ \nu] + \\ + \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\left([\rho\beta,\ \nu] - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\beta}\right) - \Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\left([\rho\alpha,\ \nu] - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\alpha}\right), \tag{44.06}$$

и окончательно:

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\,\partial x_\beta}\right) - \\ - \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}[\nu\beta,\ \rho] + \Gamma^{\rho}_{\mu\beta}[\nu\alpha,\ \rho]. \tag{44.07}$$

Выражая последние два члена через величины $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, можно также написать

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\,\partial x_\beta}\right) - \\ - g_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} + g_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}. \tag{44.08}$$

Из этого выражения легко вывести следующие свойства симметрии данного тензора:

1) Антисимметрия в первых двух значках

$$R_{\nu\mu,\,\alpha\beta} = -R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}. \tag{44.09}$$

2) Антисимметрия в последних двух значках

$$R_{\mu\nu,\,\beta\alpha} = -R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}. \tag{44.10}$$

3) Циклическая симметрия

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} + R_{\mu\alpha,\,\beta\nu} + R_{\mu\beta,\,\nu\alpha} = 0. \tag{44.11}$$

Первые два свойства очевидны. Чтобы проверить последнее, достаточно составить левую часть (44.11) в локально-геодезической координатной системе и убедиться, что 12 вторых производных попарно сокращаются.

Из перечисленных трех свойств вытекает, далее, что первая пара значков может быть переставлена с последней парой значков (с сохранением их порядка внутри каждой пары):

$$R_{\alpha\beta,\,\mu\nu} = R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}. \tag{44.12}$$

Свойство (44.12) непосредственно вытекает из определения (44.08). Чтобы показать, что оно не является независимым, а представляет следствие первых трех свойств, достаточно составить сумму уравнения (44.11) и трех других уравнений, получаемых из (44.11) круговой перестановкой значков (μ, ν, α, β). Если учесть свойства антисимметрии 1) и 2), то из 12 членов этой суммы 8 попарно сократятся, а остальные 4 дадут

$$-2R_{\mu\alpha,\,\nu\beta} + 2R_{\nu\beta,\,\mu\alpha} = 0, \tag{44.13}$$

что отличается от (44.12) лишь обозначением значков.

Подсчитаем число независимых компонент тензора кривизны, причем сделаем это в предположении, что каждый значок принимает n значений (фактически $n = 4$). Очевидно, что все четыре значка не могут быть одинаковыми. Отличные от нуля компоненты с двумя разными значками приводятся к типу $R_{\alpha\beta,\,\alpha\beta}$. Их столько, сколько пар неодинаковых значков, т. е. $\frac{1}{2}n(n-1)$. Далее, если дана тройка разных чисел α, β, γ [а таких троек $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$], то из нее можно составить отличные от нуля компоненты $R_{\alpha\beta,\,\alpha\gamma}$; $R_{\beta\alpha,\,\beta\gamma}$; $R_{\gamma\alpha,\,\gamma\beta}$, в которых повторяется либо первое, либо второе, либо третье из чисел α, β, γ. Число таких компонент будет равно числу троек, умноженному на 3, т. е. равно $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$. Наконец, существует $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ комбинаций *четырех* различных чисел α, β, γ, δ. Для каждой такой комбинации можно составить компоненты $R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$; $R_{\alpha\delta,\,\beta\gamma}$; $R_{\alpha\gamma,\,\delta\beta}$, тогда как все остальные сочетания значков приводятся к этим. Но эти три компоненты не являются независимыми, так как они связаны условием циклической симметрии; независимыми будут только две из них. Следовательно, число независимых компонент с четырьмя различными значками равно удвоенному числу четверок разных чисел, т. е. равно $\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$. Полное количество независимых компонент будет, таким образом, равно

$$\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3) = \\ = \frac{1}{12}n^2(n^2-1). \tag{44.14}$$

В интересующем нас случае $n = 4$ это число равно

$$6 + 12 + 2 = 20. \tag{44.15}$$

Заметим, что в трехмерном пространстве ($n = 3$) число независимых компонент тензора кривизны равно 6, т. е. числу компонент симметричного тензора второго ранга. Действительно, для $n = 3$ тензор кривизны может быть выражен через симметричный тензор второго ранга. (См. Добавление Д). Наконец, тензор кривизны двухмерной поверхности ($n = 2$) имеет только одну компоненту — гауссову кривизну.

Напомним, что в § 31 мы уже встречались с величинами, обладающими теми же свойствами симметрии, как ковариантный тензор кривизны, причем мы отметили там связь этих величин с симметричным тензором Круткова.

Мы изучили свойства ковариантного тензора кривизны. Смешанный тензор кривизны обладает аналогичными свойствами

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\beta\alpha} = -R^{\sigma}_{\beta,\,\mu\alpha}, \tag{44.16}$$

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} + R^{\sigma}_{\alpha,\,\beta\mu} + R^{\sigma}_{\beta,\,\mu\alpha} = 0, \tag{44.17}$$

которые соответствуют (44.10) и (44.11). Что касается свойства, соответствующего (44.09), то оно записывается более сложным образом, а именно:

$$g_{\sigma\nu} g^{\rho\mu} R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} = -R^{\rho}_{\nu,\,\alpha\beta} \tag{44.18}$$

(поднятие первого нижнего и опускание верхнего значка меняют знак компоненты). Это свойство легко вывести независимо от (44.09) из сопоставления (43.10) с (43.11) или (43.16) с (43.17), или же, наконец, из равенства

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)\, g_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu,\,\alpha\beta}\, g_{\rho\nu} + R^{\rho}_{\nu,\,\alpha\beta}\, g_{\rho\mu} = 0, \tag{44.19}$$

вытекающего из общей формулы (43.21).

Наряду с рассмотренными выше алгебраическими соотношениями, тензор кривизны удовлетворяет дифференциальным соотношениям, которые могут быть написаны в виде

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda,\,\alpha\beta} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu,\,\alpha\beta} = 0 \tag{44.20}$$

и носят название тождеств Бианки. Чтобы проверить их, мы введем локально-геодезическую координатную систему, в которой тензориальные производные совпадают с обыкновенными. Вычисления облегчаются тем, что в выражении (44.08) для $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}$ члены, не содержащие вторых производных, квадратичны относительно $\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$, так что не только сами эти члены, но и их первые производные обращаются в локально геодезической системе в нуль. В этой системе левая часть (44.20) равна

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} R_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} R_{\nu\lambda,\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} R_{\lambda\mu,\alpha\beta} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\lambda\,\partial x_\mu\,\partial x_\beta} + \frac{\partial^3 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\,\partial x_\lambda\,\partial x_\alpha} + \frac{\partial^3 g_{\lambda\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu\,\partial x_\beta} + \frac{\partial^3 g_{\nu\beta}}{\partial x_\lambda\,\partial x_\mu\,\partial x_\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\,\partial x_\lambda\,\partial x_\beta} + \frac{\partial^3 g_{\lambda\beta}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu\,\partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{2}(\ldots), \qquad (44.21)$$

где многоточием обозначены такие же члены, но с переставленными значками α и β. Но выражение в скобках само симметрично относительно α и β, так что вторая скобка равна первой и их разность обращается в нуль. Тем самым доказано, что равенство (44.20) выполняется в локально-геодезической координатной системе, а ввиду тензорного характера этого равенства оно справедливо и вообще.

Из тензора кривизны четвертого ранга можно составить, путем свертывания по двум значкам, тензор второго ранга. Свертывание по двум первым или по двум последним значкам дает, очевидно, нуль, свертывание же по остальным парам значков дает, с точностью до знака, один и тот же результат. Получаемый таким путем тензор

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\beta\nu} = R^{\beta}_{\mu,\beta\nu} \qquad (44.22)$$

носит название тензора кривизны второго ранга или тензора Римана. Легко видеть, что тензор Римана будет симметричным. В самом деле, используя (44.09), (44.10) и (44.12), будем иметь

$$g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu,\beta\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\nu,\mu\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\nu\beta,\alpha\mu} = g^{\alpha\beta} R_{\nu\alpha,\beta\mu} \qquad (44.23)$$

или

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \qquad (44.24)$$

Наряду с ковариантным тензором Римана рассматриваются также смешанный тензор

$$R^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\rho} R_{\rho\nu} \qquad (44.25)$$

и контравариантный тензор

$$R^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\rho\sigma}. \qquad (44.26)$$

Дальнейшее свертывание по значкам μ, ν приводит к скаляру

$$R = R^{\nu}_{\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\beta\nu}, \qquad (44.27)$$

который носит название скаляра кривизны.

Вычислим расходимость тензора Римана

$$Y_\nu = \nabla_\lambda R^{\lambda}_{\nu} = g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda R_{\mu\nu}. \qquad (44.28)$$

Вводя вместо $R_{\mu\nu}$ выражение (44.22), будем иметь

$$Y_\nu = g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} \nabla_\lambda R_{\mu\alpha,\,\beta\nu}. \tag{44.29}$$

Применим к входящей сюда тензориальной производной тождества Бианки, написанные в форме

$$\nabla_\lambda R_{\mu\alpha,\,\beta\nu} + \nabla_\beta R_{\mu\alpha,\,\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\mu\alpha,\,\lambda\beta} = 0, \tag{44.30}$$

получаемой из (44.20) на основании (44.12). Мы получим

$$Y_\nu = -g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta R_{\mu\alpha,\,\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} \nabla_\nu R_{\mu\alpha,\,\lambda\beta}. \tag{44.31}$$

Это соотношение может быть переписано в виде

$$Y_\nu = -Y_\nu + \nabla_\nu R. \tag{44.32}$$

В самом деле, если в первой сумме формулы (44.31) переставить (переименовать) значки суммирования λ с β и μ с α, то она приведется к выражению (44.29); в последнем же члене этой формулы можно произвести суммирование до ковариантного дифференцирования, и тогда этот член приводится к $\nabla_\nu R$. Таким образом,

$$Y_\nu = \frac{1}{2} \nabla_\nu R = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_\nu}, \tag{44.33}$$

так как тензориальная производная от скаляра сводится к обыкновенной производной. Из сопоставления (44.28) с (44.33) следует, что расходимость тензора

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{44.34}$$

тождественно равна нулю. Тензор $G_{\mu\nu}$ называется поэтому консервативным тензором. Так как он играет большую роль в теории тяготения Эйнштейна, то его называют также тензором Эйнштейна.

Дальнейшие преобразования тензора кривизны мы отложим до главы V, посвященной теории тяготения.

ГЛАВА IV

ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 45. Свойства пространства-времени и координаты

Форма уравнений, определяющих ход того или иного физического процесса в пространстве и времени, зависит, кроме специфических особенностей данного процесса, еще от двух обстоятельств: от свойств пространства-времени и от выбора координат, в которых описывается данный процесс. Свойства пространства-времени являются объективными, определяемыми самой природой и не зависящими от нашего произвола. Напротив того, выбор координат в самой высокой степени зависит от нашего произвола. Правда, и здесь произвол не является неограниченным, в том смысле, что существование некоторых, особо выделенных, координатных систем (галилеевых координат) возможно только в силу объективных свойств реального пространства-времени: такие координатные системы не существовали бы, если бы эти свойства были иными. Однако всегда возможно перейти, путем математического преобразования, от привилегированной координатной системы к любой другой; правила такого перехода мы изучали в предыдущей главе.

Чтобы отвлечься от специфических особенностей данного процесса необходимо рассмотреть такие уравнения, которые являются наиболее общими и наиболее непосредственно характеризуют свойства пространства-времени. Таким является уравнение, выражающее закон распространения фронта волны, идущей с предельной скоростью. Этому закону подчиняется, в первую очередь, распространение фронта световой (электромагнитной) волны в свободном пространстве. Однако, как мы уже указывали, закон этот должен рассматриваться не как специфический закон, относящийся только к свету, но как общий закон, которому подчиняется распространение всякого рода возмущений, идущих с предельной скоростью. Уравнение распространения фронта волны в свободном пространстве характеризует не только свойства распространяющегося в нем вида материи (например, электромагнитного поля), но и свойства самого пространства и времени. (Мы неоднократно указывали, что и практически измерение больших расстояний основано на триангуляции и на радиолокации, т. е. на использовании закона распространения электромагнитных волн.) Тем самым геометрические понятия, как и понятие времени, теснейшим образом связываются с законом распространения фронта волны в свободном пространстве.

В галилеевых координатах

$$x'_0 = ct; \quad x'_1 = x; \quad x'_2 = y; \quad x'_3 = z \tag{45.01}$$

закон этот выражается уравнением

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_3}\right)^2 = 0, \tag{45.02}$$

где $\omega = \text{const}$ есть уравнение движущейся поверхности фронта волны. Уравнение (45.02) представляет математическое выражение того факта, что волновая поверхность движется в направлении своей нормали со скоростью света. Отождествляя нормаль к волновой поверхности с лучом и рассматривая точку пересечения луча с фронтом волны, мы можем, на основании уравнения (45.02), утверждать, что эта точка движется по лучу прямолинейно и равномерно со скоростью света (в галилеевых координатах).

Наряду с распространением фронта волны, мы можем рассмотреть простейший процесс, в котором осуществляется движение со скоростью, меньшей скорости света. Это есть свободное движение материальной точки. В форме Гамильтона — Якоби уравнения движения принимают вид, аналогичный (45.02), а именно:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_3}\right)^2 = 1, \tag{45.03}$$

где ω пропорционально функции действия. Действительно, полный интеграл уравнения (45.03) имеет вид:

$$\omega = a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 - \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot x'_0. \tag{45.04}$$

Приравнивая постоянным производные от ω по a_1, a_2, a_3, получаем прямолинейное и равномерное движение со скоростью, меньшей скорости света.

Таким образом, за основные уравнения, наиболее непосредственно отражающие свойства пространства-времени, мы можем взять уравнения (45.02) и (45.03).

Форма входящего в эти уравнения оператора

$$(\nabla\omega)^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_3}\right)^2 \tag{45.05}$$

сама характеризует как свойства пространства-времени, так и физический смысл координат.

Если бы мы не знали, что такое независимые переменные (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3), а знали бы только, что они как-то связаны с пространством и временем (или, выражаясь математически, что они служат для арифметизации пространства и времени), мы получили бы их физическое толкование, рассматривая процессы, описываемые уравнениями (45.02) и (45.03). Фактически при построении теории относительности мы так и поступали. Физический смысл переменных (45.01) устанавливался нами как бы в два приема. Первоначально мы пользовались теми (не совсем точными) понятиями координат и времени, которые были приняты в классической дорелятивистской физике. Предварительное определение времени связывало переменную t с ходом часов (или какого-нибудь периодического процесса), а определение пространственных координат связывало переменные x, y, z с расстояниями, измеряемыми при помощи твердых тел на основе законов евклидовой геометрии (координатная сетка). Но мы сразу же обратили внимание на то, что эти определения нуждаются в уточнении.

В самом деле, пользование часами, находящимися в разных точках пространства, требует решения вопроса о их синхронизации, пользование же твердыми масштабами для измерения больших расстояний не только невозможно практически, но и вызывает принципиальные возражения.

Определения физических величин никогда не являются произвольными, а всегда с большей или меньшей точностью отражают природу. Поэтому уточнение определений возможно только на основе более глубокого познания природы. В интересующем нас случае (определение времени и координат) мы можем опираться, кроме использованного еще Ньютоном закона прямолинейности и равномерности движения свободного тела, на твердо установленный закон распространения фронта световой волны в свободном пространстве, т. е. на уравнения (45.02) и (45.03). Так мы и поступали при построении теории относительности, которая, по существу, является теорией пространства и времени. (Название „теория относительности“ обусловлено историческими причинами и лишь весьма односторонне отражает ее содержание.) Действительно, фундаментальное для теории относительности преобразование Лоренца, отражающее свойства пространства и времени и уточняющее смысл переменных x, y, z, t, выводится *из* закона распространения фронта волны (в соединении с требованием сохранения прямолинейности и равномерности движения), а не априори, не *до* установления этого закона.

Таким образом, как свойства пространства-времени, так и смысл галилеевых координат (45.01) устанавливаются на основе уравнений (45.02) и (45.03).

Но уравнение фронта волны и уравнение Гамильтона — Якоби для свободной материальной точки могут быть написаны и в более общей форме

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}=0, \tag{45.06}$$

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}=1 \tag{45.07}$$

и тогда только что высказанное утверждение относится и к ним: как свойства пространства-времени, так и смысл координат (x_0, x_1, x_2, x_3) устанавливаются на основе этих уравнений.

Предположим, что величины $g^{\mu\nu}$ представляют заданные функции своих переменных. Какие свойства этих функций отражают свойства самого пространства-времени и какие обусловлены лишь выбором координат?

Если принять, что объективные свойства пространства-времени правильно описываются обычной теорией относительности, то они могут быть сформулированы в виде утверждения, что существуют галилеевы координаты, в которых уравнения (45.06) и (45.07) принимают вид (45.02) и (45.03).

Это утверждение означает, что существует подстановка

$$x'_\alpha=f_\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) \qquad (\alpha=0, 1, 2, 3), \tag{45.08}$$

которая приводит выражение

$$(\nabla\omega)^2=g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} \tag{45.09}$$

к виду

$$(\nabla\omega)^2=\sum_{k=0}^{3}e_k\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'_k}\right)^2. \tag{45.10}$$

Из общего тензорного анализа мы знаем, что необходимым и достаточным условием приводимости квадратичной формы (45.09) к квадратичной форме с постоянными коэффициентами является равенство нулю тензора кривизны четвертого ранга, составленного из коэффициентов $g^{\mu\nu}$ (и соответствующих $g_{\mu\nu}$). Чтобы приведенная квадратичная форма имела (при квадратах производных) один знак плюс и три знака минус, необходимо еще выполнение величинами $g^{\mu\nu}$ тех неравенств, которые были установлены в § 35.

Таким образом, уравнения, которым должны удовлетворять величины $g^{\mu\nu}$, имеют вид

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta}=0, \tag{45.11}$$

$$g^{00}>0; \qquad \sum_{i,k=1}^{3}g^{ik}\xi_i\xi_k<0, \tag{45.12}$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — произвольные числа.

Эти уравнения и выражают (с той точностью, с которой справедлива обычная теория относительности) свойства пространства-времени, не зависящие от выбора координат.

Если эти уравнения выполнены, то вид искомого преобразования (45.08) определяется однозначно, с точностью до преобразования Лоренца. Величины $x'_\alpha = f_\alpha$ должны быть тогда истолкованы, как галилеевы координаты. Тем самым получается и толкование тех переменных (x_0, x_1, x_2, x_3), в которых первоначально были написаны уравнения.

В приведенном рассуждении мы предположили, что величины $g^{\mu\nu}$ являются заданными функциями от координат. Но мы можем встать на другую точку зрения и рассматривать величины $g^{\mu\nu}$, как неизвестные функции, подчиненные уравнениям (45.11) и (45.12), выражающим свойства пространства-времени.

Решение этих уравнений дает для ковариантных составляющих фундаментального тензора выражения

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_k}{\partial x_\beta}, \tag{45.13}$$

содержащие четыре произвольные функции f_k. (Наличие в решении произвольных функций связано с тем, что уравнения для $g_{\alpha\beta}$ ковариантны по отношению к произвольному преобразованию координат).

Тот или иной выбор произвольных функций f_k не влияет на физические следствия теории, так как сводится к чисто математическому преобразованию уравнений к новым независимым переменным. Целесообразно, однако, ограничить выбор произвольных функций так, чтобы допустимые преобразования составляли возможно более узкую группу и чтобы основные уравнения теории получили возможно более простой вид. Если такое ограничение возможно (а это зависит уже от объективных свойств пространства-времени), то получаемые таким путем привилегированные координатные системы будут более непосредственно связаны с этими свойствами и будут допускать более прямое физическое толкование. В рассматриваемом здесь случае такой привилегированной системой является галилеева система координат, которая получается, если в общем решении (45.13) положить $f_k = x_k$.

Но можно оставить функции f_k неопределенными и формулировать уравнения физических процессов, не предрешая выбора независимых переменных. Так, например, закон распространения фронта волны будет тогда выражаться системой уравнений (45.06), (45.11), (45.12) для неизвестных функций ω и $g^{\mu\nu}$. Аналогично будет выражаться закон движения свободной материальной точки. Другие примеры такой общековариантной формулировки мы дадим в следующем параграфе.

§ 46. Уравнения математической физики в произвольных координатах

Если известна тензорная форма тех или иных дифференциальных уравнений математической физики в галилеевых координатах, то в произвольных координатах соответствующие уравнения получатся путем простой замены обыкновенных производных ковариантными. Это правило применимо также и к уравнениям, содержащим вторые и высшие производные, так как, согласно общей формуле (43.21), при условии $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = 0$ ковариантное дифференцирование любого вектора или тензора коммутативно.

Рассмотрим сперва уравнения электродинамики.

Так как линейная дифференциальная форма (24.04)

$$\delta\varphi = A_\nu \, dx_\nu \tag{46.01}$$

есть инвариант, то входящие в нее составляющие потенциалов представляют ковариантный вектор также и по отношению к общим преобразованиям координат. Дифференциальное соотношение (24.05), налагаемое на составляющие потенциалов, может быть написано в виде

$$\nabla_\nu A^\nu = 0, \tag{46.02}$$

где A^ν — контравариантные составляющие

$$A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu. \tag{46.03}$$

Согласно (41.08), уравнение (46.02) в раскрытом виде напишется

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} \, A^\nu) = 0. \tag{46.04}$$

Связь между потенциалами и полем дается формулами

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \tag{46.05}$$

Но, как мы уже отмечали в § 41, при составлении разности (46.05) члены, отличающие ковариантные производные от обыкновенных, сокращаются, и мы будем иметь для антисимметричного тензора поля выражение

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{46.06}$$

совпадающее с (24.10). Первая группа уравнений Максвелла — Лоренца, которая в обычных обозначениях имеет вид

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{46.07}$$

напишется теперь, согласно (24.17):

$$F_{\mu\nu\sigma} = 0, \tag{46.08}$$

где $F_{\mu\nu\sigma}$ — вполне антисимметричный *) тензор третьего ранга, который выражается через $F_{\mu\nu}$ по формуле

$$F_{\mu\nu\sigma} = \nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu}, \tag{46.09}$$

представляющей обобщение (24.12). Но, согласно формуле (41.28), это выражение равно

$$F_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{46.10}$$

так как тензор $F_{\mu\nu}$ антисимметричен.

Таким образом, формула (24.12) остается без изменения. Напишем теперь в произвольных координатах вторую группу уравнений Максвелла — Лоренца, которая в обычных обозначениях имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho; \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{46.11}$$

Согласно (21.20), левые части (46.11) представляют контравариантную расходимость тензора поля, которая в общих координатах напишется, согласно (41.25):

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right), \tag{46.12}$$

так как тензор поля антисимметричен. В правых частях (46.11) стоит умноженный на 4π контравариантный вектор тока, т. е. вектор

$$s^\mu = 4\pi\rho^* u^\mu, \tag{46.13}$$

где ρ^* — инвариантная плотность, а u^μ — контравариантная скорость заряда. Таким образом, в общих координатах уравнения (46.11) примут вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\right) = s^\mu = 4\pi\rho^* u^\mu, \tag{46.14}$$

причем из них вытекает закон сохранения заряда в форме

$$\nabla_\mu s^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{-g}\,s^\mu\right) = 0. \tag{46.15}$$

Чтобы написать общековариантные уравнения движения заряженной материальной точки во внешнем поле, достаточно найти выражения для вектора ускорения. Если τ есть собственное время, то четырехмерная скорость равна

$$u^\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau}, \tag{46.16}$$

причем

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2. \tag{46.17}$$

---

*) Т. е. антисимметричный во всех своих значках.

14*

Вектор ускорения w^ν будет совпадать с левой частью выражения (38.34), т. е. он будет равен

$$w^\nu = \frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{d\tau}\frac{dx_\beta}{d\tau}. \tag{46.18}$$

В самом деле, это выражение представляет вектор и переходит в галилеевых координатах в обычную формулу. Что касается выражения для лоренцовой силы, то оно уже написано нами в § 25 в ковариантной форме. Таким образом, уравнения движения будут иметь вид

$$w_\mu = -\frac{e}{mc}u^\nu F_{\mu\nu}, \tag{46.19}$$

где

$$w_\mu = g_{\mu\nu}w^\nu \tag{46.20}$$

ковариантные составляющие ускорения.

В § 33 мы рассматривали тензор энергии электромагнитного поля и представили плотность лоренцовой силы в виде его расходимости (взятой с обратным знаком). Соответствующие формулы легко могут быть написаны в общековариантной форме.

Обобщением формулы (33.16) для тензора энергии электромагнитного поля являются выражения

$$U_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} + \frac{1}{16\pi}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \tag{46.21}$$

$$U^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}g_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta} + \frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{46.22}$$

Используя уравнения Максвелла — Лоренца (46.08) и (46.14), мы получим после некоторых вычислений

$$\nabla_\nu U^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}g^{\mu\nu}F_{\nu\alpha}s^\alpha. \tag{46.23}$$

Справа здесь стоит взятая с обратным знаком плотность лоренцовой силы. Общековариантные уравнения движения для сплошного распределения зарядов напишутся, аналогично (33.09), в виде

$$\mu^* w^\rho = -\frac{1}{4\pi}g^{\rho\sigma}F_{\sigma\alpha}s^\alpha, \tag{46.24}$$

где μ^* есть инвариантная плотность массы покоя, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla_\sigma(\mu^* u^\sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\sqrt{-g}\,\mu^* u^\sigma) = 0. \tag{46.25}$$

Что касается ускорения w^ρ, то оно, согласно (46.18), может быть написано в виде

$$w^\rho = \frac{du^\rho}{d\tau} + \Gamma^\rho_{\sigma\alpha}u^\sigma u^\alpha \tag{46.26}$$

или

$$w^{\rho} = u^{\sigma} \frac{\partial u^{\rho}}{\partial x_{\sigma}} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} u^{\sigma} u^{\alpha}. \tag{46.27}$$

Последнее выражение равно

$$w^{\rho} = u^{\sigma} \nabla_{\sigma} u^{\rho}, \tag{46.28}$$

где $\nabla_{\sigma} u^{\rho}$ — ковариантная производная.

Если мы, аналогично (32.01), введем тензор массы заряженных частиц

$$\Theta^{\rho\sigma} = \frac{1}{c^2} \mu^* u^{\rho} u^{\sigma} \tag{46.29}$$

и воспользуемся законом сохранения массы покоя (46.25), то мы можем написать

$$\mu^* w^{\rho} = c^2 \nabla_{\sigma} \Theta^{\rho\sigma}. \tag{46.30}$$

В уравнениях движения (46.24) мы можем левую часть выразить в виде (46.30), а для правой воспользоваться выражением (46.23). Мы получим тогда

$$\nabla_{\sigma} T^{\rho\sigma} = 0, \tag{46.31}$$

где

$$c^2 T^{\rho\sigma} = \mu^* u^{\rho} u^{\sigma} + U^{\rho\sigma} \tag{46.32}$$

есть умноженный на c^2 тензор массы системы, состоящей из частиц и поля.

Подобным же образом мы можем написать общековариантные уравнения движения сплошной среды типа идеальной жидкости. Обозначая через μ^* инвариантную плотность массы покоя (включая ту ее часть, которая меняется вследствие изменения энергии сжатия), мы получим, аналогично (32.17), для полного тензора энергии (т. е. для умноженного на c^2 тензора массы) выражение:

$$c^2 T^{\rho\sigma} = \left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) u^{\rho} u^{\sigma} - p g^{\rho\sigma}, \tag{46.33}$$

которое также удовлетворяет закону сохранения (46.31). Заметим, что равенство (46.25) теперь выполняться не будет, а будет выполняться лишь аналогичное равенство для величины ρ^*, связанной с μ^* соотношением (32.25) и представляющей инвариантную плотность сохраняющейся части массы покоя.

В § 31 мы установили общее правило, согласно которому тензор массы должен быть функцией состояния системы и не может зависеть явным образом от координат. Это правило относилось к галилеевым координатам, в которых величины $g^{\mu\nu}$ имеют заданные постоянные значения. Но мы можем сохранить это правило и для произвольных координат, если условимся включать в число функций состояния также и величины $g^{\mu\nu}$ (и, если понадобится, их первые производные). Во всех рассмотренных здесь примерах тензор массы подчиняется нашему обобщенному правилу. Так, в формуле (46.33) функциями состояния (которые, впрочем, не все независимы) являются: составляющие скорости u^ρ, давление p, инвариантная плотность μ^* и составляющие фундаментального тензора $g^{\rho\sigma}$. В тензоре энергии электромагнитного поля функциями состояния являются составляющие поля $F_{\alpha\beta}$ и величины $g^{\mu\nu}$.

§ 47. Вариационное начало для системы уравнений Максвелла — Лоренца

Многие уравнения математической физики могут быть формулированы как условия экстремума некоторого интеграла, который носит название интеграла действия. Один из простейших примеров такой формулировки представляют уравнения геодезической линии, рассмотренные в § 38. Мы разберем теперь более сложный пример системы уравнений Максвелла — Лоренца, описывающей движение сплошной заряженной среды, элементы которой взаимодействуют через посредство электромагнитного поля.

Система уравнений Максвелла — Лоренца для компонент поля $F_{\mu\nu}$, компонент четырехмерной скорости среды u^ν, инвариантной плотности массы покоя μ^* и инвариантной плотности заряда ρ^* имеет вид:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=0, \tag{47.01}$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu}=\frac{4\pi}{c}\rho^* u^\mu, \tag{47.02}$$

$$\mu^* w_\alpha+\frac{\rho^*}{c}F_{\alpha\beta}u^\beta=0. \tag{47.03}$$

Здесь w_α есть ковариантная компонента вектора ускорения, контравариантные компоненты которого равны

$$w^\alpha=u^\nu\nabla_\nu u^\alpha. \tag{47.04}$$

Инвариантные плотности μ^* и ρ^* удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_\alpha(\mu^* u^\alpha)=0, \tag{47.05}$$

$$\nabla_\alpha(\rho^* u^\alpha)=0, \tag{47.06}$$

из которых второе есть следствие (47.02).

Нам надлежит составить такой интеграл действия, чтобы его вариация по входящим в него функциям давала написанные выше уравнения.

Мы можем облегчить себе задачу введением вспомогательных функций, выбранных так, чтобы некоторые из уравнений выполнялись тождественно; тогда вариация должна дать остальные уравнения.

С этой целью мы введем потенциалы и перемещения частиц среды и через эти функции выразим остальные.

Полагая

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{47.07}$$

мы тождественно удовлетворим уравнениям (47.01). Потенциалы A_ν мы и будем рассматривать как функции, подлежащие вариации.

Для описания движения среды мы введем переменные Лагранжа a_1, a_2, a_3 и $a_0 = p$, где a_1, a_2, a_3 представляют, например, начальные координаты частицы среды, а p — параметр, имеющий характер времени. Вариации будут подлежать функции

$$x_\alpha = f_\alpha(p, a_1, a_2, a_3), \tag{47.08}$$

которые дают, при постоянных a_1, a_2, a_3 и переменном p, движение данной частицы жидкости. Вариации этих функций (т. е. вариации перемещений) мы будем называть смещениями и обозначать через ξ^α:

$$\xi^\alpha = \delta x_\alpha = \delta f_\alpha(p, a_1, a_2, a_3). \tag{47.09}$$

Такое обозначение оправдывается тем, что эти вариации представляют бесконечно малый контравариантный вектор. Величины ξ^α мы будем, вообще говоря, рассматривать, как функции не от лагранжевых переменных (p, a_1, a_2, a_3), а от координат (x_0, x_1, x_2, x_3), связанных с лагранжевыми переменными соотношениями (47.08).

Составляющие четырехмерной скорости выразятся через лагранжевы переменные по формуле

$$u^\alpha = c\frac{\partial f_\alpha}{\partial p} \Big/ \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}, \tag{47.10}$$

причем соотношение

$$u_\alpha u^\alpha = c^2 \tag{47.11}$$

будет удовлетворено тождественно. В формуле (47.10) величины $g_{\mu\nu}$ имеют аргументами $x_\alpha = f_\alpha$, так что при варьировании f_α нужно учитывать также и изменение $g_{\mu\nu}$.

Введение лагранжевых переменных позволяет тождественно удовлетворить уравнению неразрывности (47.05) выражениями (47.10) для скорости и выражением для инвариантной плотности, определяемым из равенства

$$\mu^* \sqrt{-g} \cdot I = F(a_1, a_2, a_3) \cdot \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}, \tag{47.12}$$

где I есть абсолютное значение якобиана

$$I = \frac{D(x_0, x_1, x_2, x_3)}{D(p, a_1, a_2, a_3)}. \tag{47.13}$$

Обозначим через $\delta_1 u^\alpha$ и $\delta_1\mu^*$ вариации, соответствующие изменению вида функций f_α. Величина $u^\alpha + \delta_1 u^\alpha$ есть скорость измененного движения, взятая в точке $x_\alpha + \xi^\alpha$. Скорость же измененного движения, взятая в точке x_α, будет

$$u^\alpha + \delta u^\alpha = u^\alpha - \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\sigma}\xi^\sigma + \delta_1 u^\alpha. \tag{47.14}$$

Таким образом, та вариация δu^α, которая соответствует изменению вида поля скоростей, будет равна

$$\delta u^\alpha = \delta_1 u^\alpha - \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\sigma}\xi^\sigma. \tag{47.15}$$

Заметим, что вариация $\delta_1 u^\alpha$ есть разность значений двух векторов, взятых в разных точках; поэтому она не будет вектором. Напротив того, вариация δu^α есть разность значений двух векторов для одной и той же точки. Поэтому δu^α есть вектор. Аналогично можно ввести вариации $\delta_1\mu^*$ и $\delta\mu^*$ для инвариантной плотности. Они будут связаны соотношением

$$\delta\mu^* = \delta_1\mu^* - \frac{\partial\mu^*}{\partial x^\sigma}\xi^\sigma. \tag{47.16}$$

Для вычисления вариации $\delta_1\mu^*$ нам нужно найти вариацию δ_1 от обеих частей равенства (47.12). Мы имеем

$$\delta_1\left(\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\frac{\partial f_\beta}{\partial p}}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\xi^\sigma\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p} + g_{\mu\sigma}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial p}\right). \tag{47.17}$$

Подставляя сюда

$$\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial p} = \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial p} \tag{47.18}$$

и пользуясь выражением (47.10) для скоростей, будем иметь

$$\delta_1\left(\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}\right) = \\ = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\frac{\partial f_\beta}{\partial p}}\cdot\frac{1}{c^2}u^\mu u^\nu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\xi^\sigma + g_{\mu\sigma}\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x_\nu}\right). \tag{47.19}$$

Применяя формулу

$$\nabla_\nu\xi^\sigma = \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\xi^\rho \tag{47.20}$$

для ковариантной производной, мы можем предыдущее выражение написать в виде

$$\delta_1\left(\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}\right) = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\frac{\partial f_\beta}{\partial p}}\cdot\frac{1}{c^2}u_\sigma u^\nu\nabla_\nu\xi^\sigma. \tag{47.21}$$

Вариация правой части (47.12) будет пропорциональна этому выражению. Далее, варьированное значение якобиана I будет равно

$$I + \delta_1 I = \frac{D(x_0 + \xi^0,\ x_1 + \xi^1,\ x_2 + \xi^2,\ x_3 + \xi^3)}{D(p,\ a_1,\ a_2,\ a_3)} =$$

$$= \frac{D(x_0 + \xi^0, \ldots)}{D(x_0, \ldots)} \cdot I = \left(1 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\alpha}\right) I, \tag{47.22}$$

откуда

$$\delta_1 I = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\alpha} \cdot I. \tag{47.23}$$

Затем мы имеем

$$\delta_1(\sqrt{-g}) = \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \xi^\alpha \tag{47.24}$$

и, следовательно,

$$\delta_1(\sqrt{-g} I) = \frac{\partial(\sqrt{-g}\xi^\alpha)}{\partial x_\alpha} I \tag{47.25}$$

или

$$\delta_1(\sqrt{-g} I) = \nabla_\alpha \xi^\alpha \cdot \sqrt{-g} I. \tag{47.26}$$

Используя формулы (47.21) и (47.26), мы можем написать вариацию δ_1 от логарифма обеих частей (47.12) в виде

$$\frac{\delta_1 \mu^*}{\mu^*} + \nabla_\sigma \xi^\sigma = \frac{1}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma, \tag{47.27}$$

откуда

$$\delta_1 \mu^* = -\mu^* \nabla_\sigma \xi^\sigma + \frac{\mu^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma, \tag{47.28}$$

и по формуле (47.16)

$$\delta \mu^* = -\nabla_\sigma (\mu^* \xi^\sigma) + \frac{\mu^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47.29}$$

При вычислении вариации δ_1 от выражения (47.10) для u^α мы можем воспользоваться результатом (47.21). Вычисление дает

$$\delta_1 u^\alpha = u^\nu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\nu} - u^\alpha \cdot \frac{1}{c^2} \cdot u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma \tag{47.30}$$

и по формуле (47.15)

$$\delta u^\alpha = u^\sigma \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\sigma} \xi^\sigma - \frac{1}{c^2} u^\alpha u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47.31}$$

Последнее выражение можно написать в виде

$$\delta u^\alpha = u^\sigma \nabla_\sigma \xi^\alpha - \xi^\sigma \nabla_\sigma u^\alpha - \frac{1}{c^2} u^\alpha u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma, \tag{47.32}$$

откуда ясно, что δu^α есть вектор. При этом будет

$$u_\alpha \delta u^\alpha = 0 \tag{47.33}$$

в согласии с (47.11).

Так как плотность заряда ρ^* удовлетворяет такому же уравнению неразрывности (47.06), как плотность массы μ^*, то ее вариация будет иметь вид, аналогичный (47.29), а именно:

$$\delta\rho^* = -\nabla_\sigma(\rho^*\xi^\sigma) + \frac{\rho^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47.34}$$

Комбинируя формулы (47.32) и (47.34) и пользуясь (47.06), получаем

$$\delta(\rho^* u^\alpha) = \nabla_\sigma(\rho^* u^\sigma \xi^\alpha - \rho^* u^\alpha \xi^\sigma) \tag{47.35}$$

или

$$\delta(\rho^* u^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left[\sqrt{-g}\,\rho^* (u^\sigma \xi^\alpha - u^\alpha \xi^\sigma)\right], \tag{47.36}$$

откуда следует, что варьированный вектор тока также удовлетворяет уравнению неразрывности, что и следовало ожидать.

Заметим, что если смещения ξ^σ пропорциональны скорости, так что $\xi^\sigma = \tau u^\sigma$, где τ есть произвольная функция от координат, то варьированное поле скоростей, а также варьированная плотность, не отличаются от неварьированной. Это можно проверить непосредственным вычислением; подстановка $\xi^\sigma = \tau u^\sigma$ в наши формулы дает $\delta u^\alpha = 0$, $\delta\mu^* = 0$ и $\delta\rho^* = 0$.

После того, как вычислены вариации различных величин, соответствующие смещениям ξ^σ, легко проверить, что уравнения поля (47.02) и уравнения движения (47.03) являются условиями экстремума интеграла

$$S = \int \left(c^2\mu^* - \frac{\rho^*}{c} u^\alpha A_\alpha + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right) \sqrt{-g}\,(dx), \tag{47.37}$$

где для краткости положено

$$(dx) = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{47.38}$$

Интеграл (47.37) взят по некоторой четырехмерной области, на границе которой вариации ξ^α и δA_α исчезают.

Вычислим сперва вариацию последнего члена в (47.37). Как легко проверить, мы имеем

$$\delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = 2F^{\alpha\beta}\delta F_{\alpha\beta}. \tag{47.39}$$

Поэтому

$$\frac{1}{16\pi}\delta \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) = \frac{1}{8\pi} \int F^{\alpha\beta}\delta F_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) =$$
$$= \frac{1}{8\pi} \int F^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \delta A_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \sqrt{-g}\,(dx). \tag{47.40}$$

Так как тензор $F^{\alpha\beta}$ антисимметричен, то оба члена в скобках дают одно и то же. Поэтому мы имеем

$$\frac{1}{16\pi}\delta \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) = -\frac{1}{4\pi} \int F^{\alpha\beta} \frac{\partial \delta A_\alpha}{\partial x_\beta} \sqrt{-g}\,(dx) =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{-g}\,F^{\alpha\beta}\right) \cdot \delta A_\alpha\,(dx) \tag{47.41}$$

после интегрирования по частям.

Вариация второго члена в (47.37) равна, вследствие (47.36),

$$-\frac{1}{c}\delta\int\rho^* u^\alpha A_\alpha\sqrt{-g}\,(dx)=-\frac{1}{c}\int\rho^* u^\alpha \delta A_\alpha\sqrt{-g}\,(dx)-$$
$$-\frac{1}{c}\int A_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\sqrt{-g}\rho^*(u^\sigma\xi^\alpha-u^\alpha\xi^\sigma)\right](dx). \qquad (47.42)$$

Производя интегрирование по частям, получим для последнего интеграла в (47.42) выражение

$$\frac{1}{c}\int\rho^*(u^\sigma\xi^\alpha-u^\alpha\xi^\sigma)\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma}\sqrt{-g}\,(dx)=$$
$$=-\frac{1}{c}\int\rho^* u^\alpha\xi^\sigma\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma}-\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\alpha}\right)\sqrt{-g}\,(dx)=$$
$$=-\frac{1}{c}\int\rho^* u^\alpha F_{\sigma\alpha}\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx). \qquad (47.43)$$

Таким образом, второй член дает

$$-\frac{1}{c}\delta\int\rho^* u^\alpha A_\alpha\sqrt{-g}\,(dx)=$$
$$=-\frac{1}{c}\int\rho^* u^\alpha(\delta A_\alpha+F_{\sigma\alpha}\xi^\sigma)\sqrt{-g}\,(dx). \qquad (47.44)$$

Наконец, вариация первого члена в (47.37) на основании формулы (47.29) равна

$$\delta\int c^2\mu^*\sqrt{-g}\,(dx)=\int\left[-c^2\nabla_\sigma(\mu^*\xi^\sigma)+\mu^* u_\sigma u^\nu\nabla_\nu\xi^\sigma\right]\sqrt{-g}\,(dx). \qquad (47.45)$$

После интегрирования по частям член, пропорциональный c^2 (в правой части), дает нуль, а остающийся член дает

$$\delta\int c^2\mu^*\sqrt{-g}\,(dx)=-\int\mu^*(u^\nu\nabla_\nu u_\sigma)\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx). \qquad (47.46)$$

В самом деле, вследствие уравнения неразрывности (47.05) мы имеем

$$\mu^* u_\sigma u^\nu\nabla_\nu\xi^\sigma=\nabla_\nu(\mu^* u_\sigma u^\nu\xi^\sigma)-\mu^*(u^\nu\nabla_\nu u_\sigma)\xi^\sigma, \qquad (47.47)$$

а интеграл от первого члена здесь дает нуль.

Вводя, согласно (47.04), обозначение

$$w_\sigma=u^\nu\nabla_\nu u_\sigma \qquad (47.48)$$

для ускорения, мы будем иметь

$$\delta\int c^2\mu^*\sqrt{-g}\,(dx)=-\int\mu^* w_\sigma\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx). \qquad (47.49)$$

Соединяя вместе формулы (47.41), (47.44) и (47.49), получаем следующее окончательное выражение для вариации интеграла действия (47.37):

$$\delta S = -\int\left(\mu^* w_\sigma + \frac{\rho^*}{c} F_{\sigma\alpha} u^\alpha\right)\xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx) + \\ + \int\left(-\frac{\rho^*}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi}\nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right)\delta A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx). \tag{47.50}$$

Здесь коэффициенты при ξ^σ и δA_α равны нулю в силу уравнений движения (47.03) и уравнений поля (47.02). Тем самым доказано, что

$$\delta S = 0. \tag{47.51}$$

Обратно, из условия экстремума интеграла действия

$$S = \int\left(c^2\mu^* - \frac{\rho^*}{c} u^\alpha A_\alpha + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}\,(dx) \tag{47.37}$$

можно заключить, в силу произвольности вариаций ξ^σ и δA_α, о выполнении уравнений движения и уравнений поля.

То обстоятельство, что вариации вида $\xi^\sigma = \tau u^\sigma$ не меняют поля скоростей, сказывается в том, что имеет место соотношение

$$u^\sigma\left(\mu^* w_\sigma + \frac{\rho^*}{c} F_{\sigma\alpha} u^\alpha\right) = 0, \tag{47.52}$$

причем оно выполняется тождественно, т. е. независимо от выполнения уравнений движения. Это соотношение показывает, что из четырех уравнений движения — только три независимых. То обстоятельство, что вариации вида $\delta A_\alpha = \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$ не меняют электромагнитного поля, сказывается в том, что имеет место соотношение

$$\nabla_\alpha\left(-\frac{\rho^*}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi}\nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right) = 0, \tag{47.53}$$

причем оно также выполняется тождественно, т. е. независимо от выполнения уравнений поля. Это соотношение показывает, что четыре уравнения поля не независимы, а связаны дифференциальным соотношением (47.53).

§ 48. Вариационный принцип и тензор энергии

В § 45 мы указывали, что при формулировке теории относительности в произвольных координатах возможны две точки зрения. Согласно первой точке зрения, величины $g_{\mu\nu}$ рассматриваются как заданные функции от координат (получаемые путем замены переменных из галилеевых значений). Согласно второй точке зрения, величины $g_{\mu\nu}$ рассматриваются как неизвестные функции, подчиненные уравнениям

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0, \tag{48.01}$$

а также неравенствам, неоднократно нами формулированным.

При вычислении вариации интеграла действия мы стояли на первой точке зрения, сообразно чему вид функций $g_{\mu\nu}$ не варьировался. Но мы можем встать и на вторую точку зрения и варьировать также $g_{\mu\nu}$. От этого в выражении (47.50) для δS к вычисленным двум членам, соответствующим вариациям ξ^σ и δA_α, прибавится третий член, который будет соответствовать вариации $g_{\mu\nu}$. Вычислим этот член.

Обозначим вариации разных величин, происходящие от вариации $g_{\mu\nu}$, символом δ_g. В выражении (47.12) ни якобиан I, ни функция F величин $g_{\mu\nu}$ не содержат; поэтому будет

$$\frac{\delta_g(\mu^*\sqrt{-g})}{\mu^*\sqrt{-g}} = \frac{\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial p}\,\delta g_{\mu\nu}}{2g_{\sigma\beta}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\frac{\partial f_\beta}{\partial p}} = \frac{1}{2c^2}u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} \tag{48.02}$$

и, следовательно,

$$\delta_g\left(\mu^*\sqrt{-g}\right) = \frac{\mu^*\sqrt{-g}}{2c^2}u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu}. \tag{48.03}$$

Далее, легко видеть, что

$$\delta_g\left(\rho^* u^\alpha \sqrt{-g}\right) = 0, \tag{48.04}$$

а также

$$\delta_g\left(\rho^* u^\alpha A_\alpha \sqrt{-g}\right) = 0, \tag{48.05}$$

поскольку A_α теперь не варьируются.

Далее

$$\delta_g(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) = F_{\alpha\beta}\,\delta_g F^{\alpha\beta}, \tag{48.06}$$

так как $F_{\alpha\beta}$ не варьируются, а варьируются только $F^{\alpha\beta}$, поскольку они связаны с $F_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$F^{\alpha\beta} = g^{\sigma\mu}g^{\beta\nu}F_{\mu\nu}, \tag{48.07}$$

содержащими $g_{\mu\nu}$. Вычисление дает

$$F_{\alpha\beta}\,\delta_g F^{\sigma\beta} = 2F_{\alpha\beta}F^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}\,\delta g^{\beta\nu} = -2F_{\alpha\beta}F^{\sigma\mu}g^{\beta\nu}\,\delta g_{\mu\nu}. \tag{48.08}$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta_g\sqrt{-g} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \tag{48.09}$$

то мы получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta(F_{\alpha\beta}F^{\sigma\beta}\sqrt{-g}) =$$
$$= \left(-2F_{\alpha\beta}F^{\sigma\mu}g^{\beta\nu} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\sigma\beta}g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} = 8\pi U^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} \tag{48.10}$$

где $U^{\mu\nu}$ есть выражение (46.22) для тензора энергии электромагнитного поля.

Формулы (48.03), (48.05) и (48.10) дают для добавочного члена в вариации интеграла действия выражение

$$\delta_g S = \frac{1}{2} \int (\mu^* u^\mu u^\nu + U^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}(dx). \tag{48.11}$$

Но, согласно (46.32), выражение в скобках под интегралом есть умноженный на c^2 тензор массы системы, состоящей из частиц и поля

$$c^2 T^{\mu\nu} = \mu^* u^\mu u^\nu + U^{\mu\nu}. \tag{48.12}$$

Таким образом, выражение для тензора массы получается само собою, путем варьирования интеграла действия по составляющим фундаментального тензора.

Полная вариация интеграла действия по всем входящим в него функциям равна

$$\begin{aligned}\delta S = \frac{1}{2} \int (\mu^* u^\mu u^\nu + U^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}(dx) - \\ - \int \left(\mu^* w_\sigma + \frac{\rho^*}{c} F_{\sigma\alpha} u^\alpha\right) \xi^\sigma \sqrt{-g}(dx) + \\ + \int \left(-\frac{\rho^*}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi} \nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right) \delta A_\alpha \sqrt{-g}(dx).\end{aligned} \tag{48.13}$$

Вариации ξ^σ и δA_α были вполне произвольными; приравнивая нулю коэффициенты при них, мы получили уравнения движения и уравнения поля. Вариации же $\delta g_{\mu\nu}$ не являются произвольными, так как функции $g_{\mu\nu}$ подчинены уравнениям

$$R_{\mu\nu, \alpha\beta} = 0. \tag{48.01}$$

Выразим вариации $\delta g_{\mu\nu}$ через независимые произвольные величины.

Самый общий вид функций $g_{\mu\nu}$, удовлетворяющих уравнениям (48.01), получается из галилеевых значений этих функций путем преобразования координат. Следовательно, все возможные виды функций $g_{\mu\nu}$, совместные с уравнениями (48.01), получаются друг из друга также преобразованием координат. Таким образом, допустимые бесконечно малые вариации этих функций должны соответствовать бесконечно малому преобразованию координат.

Пусть бесконечно малое преобразование координат имеет вид

$$x'_\alpha = x_\alpha + \eta^\alpha, \tag{48.14}$$

где η^α есть произвольный бесконечно малый вектор, составляющие которого суть функции от координат x_0, x_1, x_2, x_3. По общей формуле преобразования тензора мы имеем

$$g'^{\mu\nu}(x') = g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} \tag{48.15}$$

и с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$g'^{\mu\nu}(x') = g^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\alpha}\frac{\partial \eta^\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial \eta^\mu}{\partial x_\alpha}. \tag{48.16}$$

Чтобы получить вариацию, т. е. изменение вида функции $g^{\mu\nu}$, нужно сравнивать $g'^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ для одних и тех же значений аргументов.

Так как мы имеем

$$g'^{\mu\nu}(x') = g'^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\eta^\sigma \tag{48.17}$$

(в поправочном члене можно написать $g^{\mu\nu}$ вместо $g'^{\mu\nu}$), то будет

$$g'^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) = \delta g^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\alpha}\frac{\partial \eta^\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial \eta^\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\eta^\sigma. \tag{48.18}$$

Эта формула может быть написана в виде

$$\delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\eta^\nu + g^{\nu\alpha}\nabla_\alpha\eta^\mu, \tag{48.19}$$

или короче:

$$\delta g^{\mu\nu} = \nabla^\mu\eta^\nu + \nabla^\nu\eta^\mu. \tag{48.20}$$

Аналогичная формула

$$\delta g_{\mu\nu} = -\nabla_\mu\eta_\nu - \nabla_\nu\eta_\mu \tag{48.21}$$

может быть получена или независимо (тем же путем) или из соотношения $g_{\mu\alpha}g^{\mu\nu} = \delta_\alpha^\nu$.

Переписывая формулу (48.11) в виде

$$\delta_g S = \frac{c^2}{2}\int T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx) \tag{48.22}$$

и подставляя сюда (48.21), получим

$$\delta_g S = -\frac{c^2}{2}\int T^{\mu\nu}(\nabla_\mu\eta_\nu + \nabla_\nu\eta_\mu)\sqrt{-g}\,(dx) = \\ = -c^2\int T^{\mu\nu}\nabla_\nu\eta_\mu\sqrt{-g}\,(dx), \tag{48.23}$$

так как тензор $T_{\mu\nu}$ симметричен. После интегрирования по частям получаем

$$\delta_g S = c^2\int(\nabla_\nu T^{\mu\nu})\eta_\mu\sqrt{-g}\,(dx). \tag{48.24}$$

Если считать известным, что расходимость тензора массы равняется нулю, то из формулы (48.24) можно заключить, что интеграл действия является экстремумом также и по отношению к допустимым вариациям величин $g_{\mu\nu}$. Но можно сделать и обратное заключение и вывести из свойств интеграла действия равенство

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{48.25}$$

где $T^{\mu\nu}$ есть тензор, входящий в качестве коэффициента при $\delta g_{\mu\nu}$ в выражение для его полной вариации. В самом деле, интеграл действия есть инвариант (скаляр) и потому не меняется при любых, в том числе бесконечно малых, преобразованиях координат. Выражение для его полной вариации

$$\begin{aligned}\delta S = c^2 \int (\nabla_\nu T^{\mu\nu}) \eta_\mu \sqrt{-g}\,(dx) - \\ - \int \left(\mu^* w_\sigma + \frac{\rho^*}{c} F_{\sigma\alpha}\right) \xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx) + \\ + \int \left(-\frac{\rho}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi} \nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right) \delta A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx)\end{aligned} \tag{48.26}$$

заведомо равно нулю, если вариации ξ^σ и δA_α происходят вследствие бесконечно малого преобразования η_μ. (Это заключение вытекает из одного лишь свойства инвариантности и не зависит от того, будет ли S интегралом действия или каким-нибудь другим инвариантным интегралом.) Но если S есть интеграл действия, то коэффициенты при ξ^σ и δA_α в выражении для δS в отдельности равны нулю. Поэтому равны нулю и остальные члены в выражении для δS и мы имеем

$$\delta_g S = c^2 \int (\nabla_\nu T^{\mu\nu}) \eta_\mu \sqrt{-g}\,(dx) = 0, \tag{48.27}$$

каковы бы ни были величины η_μ. Отсюда уже следует равенство (48.25).

То, что тензор $T^{\mu\nu}$, определяемый как коэффициент при $\delta g_{\mu\nu}$, есть тензор массы (или ему пропорционален), вытекает из установленной в § 31 единственности тензора массы, имеющей место при условии, что его составляющие суть функции состояния системы (в число функций состояния включаются здесь и $g_{\mu\nu}$). В рассматриваемом случае уравнений Максвелла — Лоренца мы это проверили непосредственным вычислением [формула (48.12)].

Проиллюстрируем приведенные рассуждения еще на одном примере, а именно на уравнениях гидродинамики. В этом случае интеграл действия будет иметь вид

$$S = \int (\rho^* c^2 + \rho^* \Pi) \sqrt{-g}\,(dx). \tag{48.28}$$

Здесь ρ^* есть инвариантная плотность той части массы покоя, которая при движении не меняется и удовлетворяет закону сохранения

$$\nabla_\nu(\rho^* u^\nu) = 0 \tag{48.29}$$

(см. § 32). П есть отнесенная к единице массы потенциальная энергия упругого сжатия жидкости

$$\Pi = \int\limits_0^p \frac{dp}{\rho^*} - \frac{p}{\rho^*}; \qquad d\Pi = \frac{p\,d\rho^*}{\rho^{*2}}, \tag{48.30}$$

где p — давление.

Вариацию интеграла S легко вычислить, пользуясь найденными выше выражениями для вариации плотности. На основании формул (47.29), (48.03) и (48.09), в которых мы пишем теперь ρ^* вместо μ^*, мы имеем для полной вариации

$$\delta\rho^* = -\nabla_\sigma(\rho^*\xi^\sigma) + \frac{\rho^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma + \frac{\rho^*}{2}\left(\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} - g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} \tag{48.31}$$

и попрежнему

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{48.32}$$

Полагая

$$F(\rho^*) = \rho^* c^2 + \rho^*\Pi, \tag{48.33}$$

мы будем иметь

$$\delta S = \delta\int F(\rho^*)\sqrt{-g}\,(dx) = \int\left[F'(\rho^*)\,\delta\rho^* + F(\rho^*)\frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\right]\sqrt{-g}\,(dx). \tag{48.34}$$

Подставляя сюда (48.31) и (48.32), мы получим, после интегрирования по частям:

$$\delta S = \frac{1}{2}\int\left[(F - \rho^* F')g^{\mu\nu} + \rho^* F'\cdot\frac{u^\mu u^\nu}{c^2}\right]\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx) + \int\left[\rho^* F''\left(\frac{\partial\rho^*}{\partial x_\sigma} - \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2}\frac{\partial\rho^*}{\partial x_\nu}\right) - \frac{1}{c^2}\rho^* F' w_\sigma\right]\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx), \tag{48.35}$$

где w_σ есть ускорение (47.48). Пользуясь вытекающими из (48.30) и (48.33) формулами

$$\rho^* F' - F = p; \quad \rho^* F''\,d\rho^* = dp, \tag{48.36}$$

мы можем вместо (48.35) написать

$$\delta S = \frac{1}{2}\int\left\{-pg^{\mu\nu} + \left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right]u^\mu u^\nu\right\}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx) + \int\left\{\frac{\partial p}{\partial x_\sigma} - \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x_\nu} - \left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right]w_\sigma\right\}\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx). \tag{48.37}$$

Отсюда заключаем, что уравнения движения имеют вид

$$\left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right] w_\sigma = \frac{\partial p}{\partial x_\sigma} - \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x_\nu} \tag{48.38}$$

и что тензор энергии равен

$$c^2 T^{\mu\nu} = \left[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^*\Pi + p)\right] u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \tag{48.39}$$

причем расходимость этого тензора равна нулю.

Эти выражения представляют обобщения выражений (32.29) и (32.28) и приводятся к ним в галилеевых координатах.

В заключение заметим, что математически далеко не всякая система уравнений выводима из вариационного начала. То обстоятельство, что основные уравнения математической физики, описывающие поведение консервативных систем, могут быть получены из вариационного начала, представляет замечательное их свойство.

§ 49. Интегральная форма законов сохранения в произвольных координатах

Тензор массы $T^{\mu\nu}$ удовлетворяет, как мы знаем, уравнениям

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{49.01}$$

которые должны выражать законы сохранения энергии и количества движения, а также закон сохранения момента количества движения и закон движения центра инерции замкнутой консервативной системы.

В развернутом виде уравнения (49.01) напишутся [см. (41.24)]:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\nu} T^{\mu\rho} = 0 \tag{49.02}$$

или, если объединить третий член с первым,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu})}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\rho\nu} = 0. \tag{49.03}$$

Вследствие того, что в уравнении (49.03) остается член, стоящий вне знака производных, переход от дифференциальной формы законов сохранения к интегральной форме не является в произвольных координатах столь очевидным, каким он был в галилеевых координатах (см. § 31). Поэтому мы рассмотрим вопрос о существовании интегральной формы законов сохранения несколько подробнее.

Введем некоторый вектор φ_μ и проинтегрируем равенство

$$\nabla_\nu (T^{\mu\nu}\varphi_\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\varphi_\mu) \tag{49.04}$$

по трехмерному объему, на границах которого величины $T^{\mu\nu}$ исчезают. Мы получим

$$\int \nabla_\nu (T^{\mu\nu}\varphi_\mu)\sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \frac{d}{dx_0}\int T^{\mu 0}\varphi_\mu \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \quad (49.05)$$

Если $T^{\mu\nu}$ есть тензор массы, то он симметричен и расходимость его равна нулю. Для такого тензора предыдущее равенство напишется:

$$\frac{d}{dx_0}\int T^{\mu 0}\varphi_\mu \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 =$$
$$= \frac{1}{2}\int T^{\mu\nu}(\nabla_\nu\varphi_\mu + \nabla_\mu\varphi_\nu)\sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \quad (49.06)$$

Величина

$$I = \int T^{\mu 0}\varphi_\mu \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \quad (49.07)$$

будет постоянной (т. е. не будет зависеть от координаты x_0, имеющей характер времени), если вектор φ_μ удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_\nu\varphi_\mu + \nabla_\mu\varphi_\nu = 0. \quad (49.08)$$

Исследуем эти уравнения в общем случае (не предполагая сперва, что тензор кривизны четвертого ранга равен нулю).

Положим

$$\nabla_\nu\varphi_\mu = \varphi_{\mu\nu}. \quad (49.09)$$

В силу (49.08) величины $\varphi_{\mu\nu}$ будут антисимметричным тензором. Составим от него ковариантную производную. Используя (49.08), мы можем написать

$$\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)\varphi_\sigma + \frac{1}{2}(\nabla_\sigma\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\sigma)\varphi_\mu - \frac{1}{2}(\nabla_\sigma\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\sigma)\varphi_\nu. \quad (49.10)$$

Применяя формулу (43.16) для разности ковариантных производных и используя свойства симметрии тензора $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$, мы получим

$$\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\sigma,\mu\nu}\varphi_\rho. \quad (49.11)$$

Таким образом, уравнения (49.08) могут быть заменены системой (49.09) и (49.11), которая равносильна системе уравнений в полных дифференциалах. Можно показать, что эта система будет вполне интегрируема в том случае, когда

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = K\cdot(g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}), \quad (49.12)$$

где K — постоянная. Пространство, для которого тензор кривизны имеет выражение (49.12), называется пространством постоянной кривизны (оно представляет четырехмерное обобщение пространства Лобачевского). Постоянная K носит название постоянной кривизны.

Если условия полной интегрируемости выполнены, то значения 10 функций φ_μ, $\varphi_{\mu\nu}$ во всем пространстве определяются их значениями в одной точке, так что общее решение системы (49.09), (49.11) содержит 10 произвольных постоянных.

Нас интересует случай

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = 0, \tag{49.13}$$

который получается из (49.12) при $K = 0$. (Пространство, для которого $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = 0$, называется поэтому пространством нулевой кривизны или плоским пространством.)

В случае плоского пространства-времени (с которым и имеет дело теория относительности) мы можем сразу указать 10 интегралов системы (49.03). Пусть x_0', x_1', x_2', x_3' — галилеевы координаты. Мы можем ввести четыре вектора:

$$\varphi_\mu^{(0)} = \frac{\partial x_0'}{\partial x_\mu}; \quad \varphi_\mu^{(1)} = \frac{\partial x_1'}{\partial x_\mu}; \quad \varphi_\mu^{(2)} = \frac{\partial x_2'}{\partial x_\mu}; \quad \varphi_\mu^{(3)} = \frac{\partial x_3'}{\partial x_\mu}. \tag{49.14}$$

(Эти величины будут векторами по отношению к нештрихованным координатам x_0, x_1, x_2, x_3; галилеевы же координаты здесь рассматриваются как скаляры). Каждый из четырех векторов (49.14) удовлетворяет, в силу (42.16), уравнениям

$$\nabla_\nu \varphi_\mu^{(\alpha)} = 0 \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{49.15}$$

а следовательно, и уравнениям (49.08).

Далее, мы можем ввести шесть векторов

$$\varphi_\mu^{(\alpha\beta)} = x_\alpha' \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\mu} - x_\beta' \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu}, \tag{49.16}$$

из которых каждый удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_\nu \varphi_\mu^{(\alpha\beta)} + \nabla_\mu \varphi_\nu^{(\alpha\beta)} = 0, \tag{49.17}$$

т. е. уравнениям (49.08).

Подставляя в выражение (49.07) векторы (49.14), получим, после умножения на c, постоянные интегралы

$$P'^\alpha = c \int T^{\mu 0} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \tag{49.18}$$

а подставляя в то же выражение векторы (49.16), получим постоянные интегралы

$$M'^{\alpha\beta} = c \int T^{\mu 0} \left(x_\alpha' \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\mu} - x_\beta' \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \right) \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{49.19}$$

Из сравнения этих выражений с соответствующими выражениями в галилеевых координатах [формулы (31.02), (31.03), а также (31.08), (31.09)] нетрудно установить физический смысл этих интегралов. Величина P'^0 есть деленная на c энергия (или умноженная на c масса) системы, а величины P'^i ($i = 1, 2, 3$) представляют количество движения системы. Далее, величины M'^{i0} суть интегралы движения центра инерции, а величины M'^{ik} — интегралы момента количества движения системы.

Составляющие P'^α постоянного вектора и составляющие $M'^{\alpha\beta}$ постоянного антисимметричного тензора относятся к галилеевой координатной системе. Но постоянному вектору или тензору в галилеевой системе соответствует в произвольной координатной системе *свободный* вектор или тензор, т. е. такой, все ковариантные производные от которого равны нулю. Таким образом, интегралам движения мы можем сопоставить в произвольной координатной системе свободный вектор

$$P_\nu = \sum_{\alpha=0}^{3} e_\alpha P'^\alpha \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\nu} \tag{49.20}$$

и свободный антисимметричный тензор

$$M_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} e_\alpha e_\beta M'^{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}. \tag{49.21}$$

Эти величины будут функциями от координат и времени, удовлетворяющими уравнениям

$$\nabla_\sigma P_\nu = 0; \quad \nabla_\sigma M_{\mu\nu} = 0. \tag{49.22}$$

Значения этих функций в любой точке определяются значениями их в какой-нибудь одной точке. Поэтому число постоянных, от которых зависят функции P_ν и $M_{\mu\nu}$, будет равно числу этих функций, т. е. будет равно 10. Роль этих постоянных и играют константы движения P'^α и $M'^{\alpha\beta}$.

В приведенных рассуждениях роль галилеевых координат была чисто вспомогательная и заключалась в том, что через них выражались векторы φ_μ, соответствующие различным интегралам уравнений (49.08). Разумеется, гораздо проще было бы вести все рассуждения прямо в галилеевых координатах (как мы это делали в главе II). Но цель наших более сложных рассуждений как раз и состояла в том, чтобы показать, что также и интегральная форма законов сохранения может быть получена непосредственно из уравнений, написанных в произвольных координатах.

ГЛАВА V

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

§ 50. Обобщенный закон Галилея

Наиболее существенная особенность поля тяготения, отличающая его от всех других известных в физике полей, проявляется в характере его влияния на движение свободного тела (материальной точки). При одинаковых начальных условиях (положении и скорости) все свободные тела, независимо от их массы, движутся в поле тяготения одинаковым образом. Этот фундаментальный закон можно рассматривать, как обобщение закона Галилея, согласно которому все тела падают при отсутствии сопротивления с одинаковой скоростью.

Здесь уместно напомнить определения массы инертной и массы весомой (или тяготеющей). Инертная масса есть мера способности тела сопротивляться ускорению: при заданной силе ускорение обратно пропорционально инертной массе. Весомая или тяготеющая масса есть мера способности тела создавать поле тяготения и испытывать воздействие этого поля; в заданном поле тяготения сила, испытываемая телом, пропорциональна его весомой массе.

При помощи этих определений приведенный выше обобщенный закон Галилея может быть формулирован, как закон равенства массы инертной и массы тяготеющей.

По Ньютону, поле тяготения характеризуется потенциалом тяготения $U(x, y, z)$. Потенциал тяготения, порождаемый отдельной сферически симметричной массой M, в точках вне этой массы равен

$$U = \frac{\gamma M}{r}, \tag{50.01}$$

где r есть расстояние от центра массы. Величина γ есть ньютонова постоянная тяготения, численное значение которой в системе (*см·г·сек*) равно

$$\gamma = \frac{1}{15\,000\,000} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{сек}^2}. \tag{50.02}$$

Таким образом, размерность U совпадает с размерностью квадрата скорости. Заметим здесь же, что во всех встречающихся в природе случаях, даже на поверхности Солнца и сверхплотных звезд, величина U весьма мала по сравнению с квадратом скорости света

$$U \ll c^2. \tag{50.03}$$

В общем случае произвольного распределения масс порождаемый ими ньютонов потенциал U удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho, \tag{50.04}$$

где ρ есть плотность масс. Ньютонов потенциал U вполне определяется уравнением Пуассона вместе с условиями непрерывности и предельными условиями, которые заключаются в следующем: функция U и ее первые производные должны быть конечны, однозначны и непрерывны во всем пространстве и обращаться в нуль на бесконечности.

Предположим, что ньютонов потенциал U задан. Сила, испытываемая телом (материальной точкой) с весомой массой $(m)_{\text{вес}}$ в поле тяготения с потенциалом U, равна

$$\mathbf{F} = (m)_{\text{вес}} \cdot \operatorname{grad} U. \tag{50.05}$$

С другой стороны, согласно уравнениям движения Ньютона, мы имеем

$$(m)_{\text{ин}} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{F}. \tag{50.06}$$

Поэтому

$$(m)_{\text{ин}} \cdot \mathbf{w} = (m)_{\text{вес}} \cdot \operatorname{grad} U. \tag{50.07}$$

Согласно обобщенному закону Галилея, движение тела в заданном поле тяготения не должно зависеть от его массы. Поэтому отношение инертной массы $(m)_{\text{ин}}$ к весомой массе $(m)_{\text{вес}}$ для всех тел одно и то же, т. е. представляет универсальную постоянную, значение которой может зависеть только от выбора единиц для инертной и весомой массы. При общепринятом выборе единиц будет просто

$$(m)_{\text{ин}} = (m)_{\text{вес}} = m, \tag{50.08}$$

т. е. инертная и весомая масса друг другу равны.

Равенство инертной и весомой массы есть факт настолько привычный, что воспринимается обычно, как нечто само собою разумеющееся. Однако дело обстоит не так просто: это равенство представляет особый и очень важный закон природы, тесно связанный с обобщенным законом Галилея.

Вследствие равенства массы инертной и массы весомой уравнения движения

$$\mathbf{w} = \operatorname{grad} U \tag{50.09}$$

имеют универсальный характер, что и является выражением обобщенного закона Галилея.

Заметим, что уравнения движения (50.09) могут быть получены из вариационного начала

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} v^2 + U\right) dt = 0. \tag{50.10}$$

Это послужит нам указанием при построении теории тяготения.

§ 51. Квадрат интервала в ньютоновом приближении

Явление всемирного тяготения требует расширения рамок той теории пространства и времени, которая составляла предмет предыдущих глав. Необходимость такого расширения видна из следующих соображений.

Из уравнения распространения фронта волны, написанного в виде

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0, \tag{51.01}$$

вытекает прямолинейность распространения света. Но свет обладает энергией, а по закону пропорциональности между массой и энергией всякая энергия неразрывно связана с некоторой массой; следовательно, свет обладает массой. С другой стороны, по закону всемирного тяготения всякая масса, находящаяся в поле тяготения, должна испытывать действие этого поля; ее движение не будет в общем случае прямолинейным. Поэтому следует ожидать, что и луч света в поле тяготения не будет прямолинейным *). Отсюда вытекает, что в поле тяготения уравнение распространения фронта волны должно несколько отличаться от написанного выше. Но, как мы видели в предыдущих главах, уравнение распространения фронта волны является основной характеристикой свойств пространства и времени. Отсюда следует вывод, что наличие поля тяготения должно влиять на свойства пространства и времени. Такой вывод и делается в теории тяготения к построению которой мы приступаем.

Как было показано в главе I, уравнению распространения фронта волны в форме (51.01) соответствует, при некоторых добавочных предположениях, следующее выражение для квадрата интервала:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{51.02}$$

Влияние поля тяготения на свойства пространства и времени должно сказываться в том, что коэффициенты в уравнении распространения фронта волны и в выражении для квадрата интервала будут отличаться от постоянных значений, даваемых формулами (51.01) и (51.02). Нам надлежит установить приближенный вид выражения для квадрата интервала в поле тяготения с ньютоновым потенциалом U. Мы будем опираться

*) Теория отклонения луча света в поле тяготения дана ниже, в § 59.

при этом на обобщенный закон Галилея. Тот фундаментальный факт, что закон движения свободного тела в поле тяготения имеет универсальный характер и не зависит от свойств тела, позволяет найти связь между этим законом движения и метрикой пространства-времени.

В § 38 мы изучали уравнения геодезической линии в пространстве-времени с данной метрикой. Мы можем попытаться подобрать метрику так, чтобы уравнения геодезической линии приближенно совпали с ньютоновыми уравнениями движения свободного тела в заданном поле тяготения. Успех этой попытки позволит ввести гипотезу о том, что в пространстве-времени с данной метрикой свободное тело (материальная точка) движется по геодезической линии, и тем самым установить искомую связь между законом движения и метрикой.

Уравнения геодезической линии могут быть выведены, как мы знаем, из вариационного начала

$$\delta \int ds = 0. \tag{51.03}$$

Если квадрат интервала имеет вид (51.02), то будет

$$ds = \sqrt{c^2 - v^2}\, dt, \tag{51.04}$$

и при малых скоростях

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c}\right) dt. \tag{51.05}$$

Подстановка в вариационное начало (51.03) выражений (51.04) и (51.05) для ds дает движение с постоянной скоростью, т. е. свободное движение при отсутствии поля тяготения. Предположим теперь, что при малых скоростях и слабых полях тяготения ($U \ll c^2$) выражение для интервала имеет вид

$$ds = \sqrt{c^2 - 2U - v^2}\, dt \tag{51.06}$$

или

$$ds = \left[c - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2} v^2 + U\right)\right] dt \tag{51.07}$$

вместо предыдущих двух формул (51.04) и (51.05). Так как аддитивная постоянная и постоянный множитель в лагранжевой функции не играют роли, то вариационное начало (51.03) со значением (51.07) для ds дает то же, что и формулированное в конце § 50 вариационное начало

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} v^2 + U\right) dt = 0, \tag{51.08}$$

а именно уравнения свободного движения тела в поле тяготения.

Правда, по той же причине несущественности аддитивной постоянной и постоянного множителя в лагранжевой функции уравнение (51.08) получалось бы из (51.03) и (51.06) при любом достаточно большом значении постоянной c. Но мы должны потребовать, чтобы при отсутствии поля тяготения ($U=0$) выражение (51.06) для интервала переходило, при любых v^2, в формулу (51.04), соответствующую галилеевой метрике. Отсюда уже следует, что постоянная c в формуле (51.06) должна равняться скорости света.

Приведенные рассуждения дают нам право предполагать, что при условиях

$$\left.\begin{aligned} &U \ll c^2 \\ &\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=v^2 \ll c^2 \end{aligned}\right\} \tag{51.09}$$

квадрат интервала мало отличается от выражения

$$ds^2=(c^2-2U)\,dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{51.10}$$

Относительная погрешность в коэффициенте при dt^2 здесь во всяком случае более высокого порядка, чем учтенный член $\frac{2U}{c^2}$. Что касается коэффициента при чисто пространственной части интервала, то он может отличаться от единицы на величины порядка $\frac{2U}{c^2}$. Действительно, теория тяготения, которая будет развита в следующих параграфах, дает в качестве более точного выражения

$$ds^2=(c^2-2U)\,dt^2-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{51.11}$$

При условиях (51.09) отличие выражения (51.10) от (51.11) остается несущественным, как и должно быть.

Найденное значение коэффициента при dt^2 допускает, в принципе, опытную проверку.

Пусть в некоторой точке (x, y, z), где потенциал тяготения есть U_1, имеется излучатель с собственным периодом T_0. Испускаемая им волна будет иметь зависимость от времени вида

$$\exp\left(i2\pi\frac{t}{T_1}\right), \tag{51.12}$$

где T_1 уже не равно T_0, а связано с T_0 так же, как dt связано с $d\tau$, где $d\tau$ — дифференциал собственного времени излучателя. Предполагая для простоты излучатель (в данной системе отсчета) неподвижным, будем иметь приближенно

$$d\tau=\frac{1}{c}\,ds=\left(1-\frac{U_1}{c^2}\right)dt \tag{51.13}$$

и, следовательно,

$$T_0=\left(1-\frac{U_1}{c^2}\right)T_1. \tag{51.14}$$

В данной задаче можно пренебречь зависимостью потенциала тяготения U от времени и считать поле тяготения статическим. Тогда распространяющаяся от излучателя волна сохранит свою зависимость от времени (51.12) во всем пространстве.

Предположим теперь, что в некоторой другой точке (x_2, y_2, z_2), где потенциал тяготения отличен от U_1 и равен U_2, имеется второй точно такой же излучатель (например, атом того же элемента). Испускаемая им волна будет во всем пространстве иметь зависимость от времени вида

$$\exp\left(i2\pi\frac{t}{T_2}\right), \tag{51.15}$$

где

$$T_0=\left(1-\frac{U_2}{c}\right)T_2. \tag{51.16}$$

Сравнивая периоды волн, идущих из мест с разными значениями потенциала тяготения, но испускаемых одинаковыми излучателями, мы получаем разность

$$T_2-T_1=\frac{U_2-U_1}{c^2}\cdot T_0. \tag{51.17}$$

Если U_2 есть потенциал на Солнце, а U_1 — на Земле, то будет $U_2>U_1$, причем численное значение множителя при T_0 в (51.17) будет приблизительно равно

$$\frac{U_2-U_1}{c^2}=2\cdot 10^{-6}. \tag{51.18}$$

Таким образом, длина волны спектральных линий, испускаемых на Солнце, должна смещаться (по сравнению с линиями, испускаемыми на Земле) на две миллионные доли к красному концу спектра.

Необходимо, однако, заметить, что испускание линий на Солнце происходит при других физических условиях, чем на Земле, и что поправка на разность потенциалов тяготения в значительной мере затушевывается другими поправками.

Но имеются сверхплотные звезды (например спутник Сириуса), плотность которых в десятки тысяч раз превышает плотность воды. На их поверхности значение потенциала тяготения значительно больше, чем на поверхности Солнца (для спутника Сириуса — в 20 раз). Для таких звезд поправка на разность потенциалов тяготения становится весьма заметной и может быть обнаружена на опыте.

Таким образом, можно считать, что найденное значение коэффициента при dt^2 в выражении для квадрата интервала согласуется с экспериментальными данными.

§ 52. Уравнения тяготения Эйнштейна

Основная идея теории тяготения Эйнштейна, в ее ограниченной (не космологической) постановке, состоит в следующем.

Геометрические свойства реального физического пространства и времени соответствуют не геометрии Евклида, а геометрии Римана.

с основными положениями которой мы ознакомились в главе III. Отклонения геометрических свойств от евклидовых (точнее, от псевдоевклидовых) проявляются в природе как поле тяготения. Свойства эти неразрывно связаны с распределением тяготеющих масс и их движением. Связь эта — взаимная. С одной стороны, отклонения геометрических свойств от евклидовых обусловлены наличием тяготеющих масс, а с другой стороны, движение масс в поле тяготения определяется отклонениями этих свойств от евклидовых. Короче можно сказать, что массы определяют геометрические свойства пространства и времени, а эти свойства определяют движение масс.

Постараемся сформулировать эти идеи математически.

В предыдущем параграфе мы видели, что в системе координат, практически совпадающей с инерциальной системой ньютоновой механики, ньютонов потенциал тяготения U входит в коэффициент при dt^2 в выражении для квадрата интервала, т. е. в коэффициент g_{00} общего выражения

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}. \qquad (52.01)$$

С другой стороны, потенциал тяготения U удовлетворяет, в ньютоновом приближении, уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho. \qquad (52.02)$$

Искомое обобщение ньютоновой теории тяготения должно быть ковариантным относительно произвольных преобразований координат. Поэтому мы не можем рассматривать в качестве обобщения ньютонова потенциала отдельное слагаемое в коэффициенте g_{00}, или самый этот коэффициент, а должны ввести в рассмотрение всю совокупность коэффициентов $g_{\mu\nu}$ и считать, что обобщением ньютонова потенциала тяготения является фундаментальный метрический тензор. Этот тензор должен удовлетворять общековариантной системе уравнений, одно из которых должно, в ньютоновом приближении, переходить в уравнение Пуассона для ньютонова потенциала U. Общее число уравнений должно, вообще говоря, равняться числу неизвестных функций, т. е. числу компонент тензора $g_{\mu\nu}$, которое равно десяти.

В левой части уравнения Пуассона стоит дифференциальный оператор второго порядка от U (оператор Лапласа). Наиболее простым общековариантным обобщением левой части уравнения Пуассона будет поэтому тензор, содержащий линейным образом вторые производные от фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$.

Таким тензором является тензор кривизны (второго или четвертого ранга). Тензор кривизны четвертого ранга $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$ отпадает, так как его составляющие не содержат таких выражений, которые бы представляли обобщение оператора Лапласа. Кроме того, число составляющих $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$ слишком велико (оно равно 20, т. е. вдвое больше числа неизвестных функций) *). Остается, следовательно, тензор кривизны второго ранга, который как раз имеет должное число составляющих.

В правой части уравнения Пуассона стоит плотность масс ρ. Обобщением плотности масс, имеющим надлежащий тензорный характер, является тензор массы $T^{\mu\nu}$, инвариант которого равен инвариантной плотности массы.

Мы приходим к выводу, что обобщением уравнения Пуассона должно являться соотношение между тензором кривизны второго ранга $R^{\mu\nu}$ и тензором массы $T^{\mu\nu}$.

В предыдущих главах мы видели, что при отсутствии тяготения расходимость тензора $T^{\mu\nu}$ равна нулю:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{52.03}$$

Мы сохраним это уравнение и для общего случая, отложив обсуждение связанных с ним вопросов (об энергии поля тяготения, об интегральной форме законов сохранения и др.) до главы VII.

С другой стороны, в конце главы III мы установили, что тензор

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R, \tag{52.04}$$

называемый тензором Эйнштейна или консервативным тензором, обладает тем замечательным свойством, что его расходимость тождественно равна нулю

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} \equiv 0. \tag{52.05}$$

Поэтому, если мы положим

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\varkappa T^{\mu\nu}, \tag{52.06}$$

где $\varkappa$ — постоянная, то уравнение (52.03) для тензора массы будет следствием соотношения (52.06).

Уравнению (52.05) удовлетворяет, как мы знаем, также фундаментальный тензор $g^{\mu\nu}$; поэтому мы могли бы, не нарушая (52.03), добавить к левой части (52.06) член вида $\lambda g^{\mu\nu}$, где λ — новая постоянная. Однако такая добавка противоречила бы требованию, чтобы при отсутствии масс поле тяготения равнялось нулю. В самом деле, согласно нашим основным положениям, изложенным в начале этого параграфа, отсутствие поля тяготения означает отсутствие отклонений геометрии пространства-времени от евклидовой, а значит и равенство

*) Правда, уравнения для тензора $R_{\mu\nu,\,\sigma\beta}$, даже в избыточном числе, могут оказаться совместными, как это имеет место в случае пространства постоянной кривизны [уравнения (49.12)]. Но в этом случае уравнения позволяют определить метрику чисто локально (т. е. без привлечения предельных условий) и имеют поэтому другой характер, чем уравнение Пуассона, для которого предельные условия существенны.

нулю тензора кривизны. Следовательно, при $T^{\mu\nu}=0$ должно быть и $R^{\mu\nu}=0$ (а также $R=0$), что возможно только, если левая часть уравнений, связывающих $G^{\mu\nu}$ с $T^{\mu\nu}$, не содержит члена $\lambda g^{\mu\nu}$ (т. е. только, если $\lambda=0$).

Таким образом, надлежащим обобщением уравнения Пуассона для потенциала тяготения являются именно уравнения (52.06).

Можно доказать, что при поставленных условиях [соответствие с уравнением Пуассона, общая ковариантность, линейность во вторых производных от $g_{\mu\nu}$, тождественное выполнение соотношения (52.05) для левой части, евклидовость при отсутствии масс] полученные уравнения являются единственными.

Уравнения (52.06) называются уравнениями тяготения Эйнштейна и играют фундаментальную роль в теории тяготения. Дальнейшие параграфы будут посвящены их исследованию.

§ 53. Характеристики уравнений Эйнштейна. Скорость распространения тяготения

Мы начнем исследование уравнений тяготения Эйнштейна

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\varkappa T^{\mu\nu} \tag{53.01}$$

с составления уравнения первого порядка, дающего характеристики исследуемой системы уравнений. С физической точки зрения уравнение характеристики представляет закон распространения фронта гравитационной волны.

Умножая уравнения (53.01) на $g_{\mu\nu}$ и суммируя, мы получаем соотношение

$$R=\varkappa T \tag{53.02}$$

между инвариантами тензора кривизны и тензора массы. Это соотношение позволяет написать уравнения тяготения в виде

$$R^{\mu\nu}=-\varkappa\left(T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right). \tag{53.03}$$

Для контравариантного тензора кривизны $R^{\mu\nu}$ в Добавлении Б выведено выражение

$$R^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\Gamma^{\mu\nu}+\Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{53.04}$$

Здесь $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ есть величина, получаемая из $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ поднятием значков

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta}=g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}. \tag{53.05}$$

Таким образом, последний член в (53.04) не содержит вторых производных, а представляет однородную квадратичную функцию от величин $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$, а значит и от первых производных фундаментального тензора.

Вторые производные входят, кроме первого члена, также и в величины $\Gamma^{\mu\nu}$. Но эти последние содержат вторые производные только через посредство первых производных от величин

$$\Gamma^{\nu} = g^{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}, \tag{53.06}$$

введенных нами в § 41. Напомним, что оператор Даламбера от некоторой функции ψ может быть написан как в виде

$$\Box\psi = g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - \Gamma^{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}, \tag{53.07}$$

так и в виде

$$\Box\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right) \tag{53.08}$$

откуда

$$\Gamma^{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}), \tag{53.09}$$

а также

$$\Gamma^{\alpha} = -\Box x_\alpha. \tag{53.10}$$

Величины $\Gamma^{\mu\nu}$ получаются из Γ^{ν} по правилу, формально совпадающему с правилом составления полусуммы контравариантных производных, а именно

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla^{\mu}\Gamma^{\nu} + \nabla^{\nu}\Gamma^{\mu}), \tag{53.11}$$

или подробнее

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\nu}}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\Gamma^{\alpha}\right). \tag{53.12}$$

Разумеется, поскольку Γ^{ν} не есть вектор, величины $\Gamma^{\mu\nu}$ не являются тензором. Этим обстоятельством можно воспользоваться для упрощения уравнений Эйнштейна.

Уравнения Эйнштейна являются общековариантными и, следовательно, допускают преобразования координат, содержащие четыре произвольные функции. Пусть уравнения решены в каких-нибудь произвольных координатах. Мы можем перейти тогда к другим координатам, взяв в качестве независимых переменных четыре решения уравнения $\Box\psi = 0$. Эти решения можно выбрать так, чтобы удовлетворялись неравенства для $g^{\mu\nu}$, формулированные в § 35, а также некоторые дополнительные условия. Но если каждая из координат x_0, x_1, x_2, x_3 удовлетворяет уравнению $\Box x_\alpha = 0$, то в данной координатной системе будет

$$\Gamma^{\alpha} = 0, \tag{53.13}$$

а следовательно, и

$$\Gamma^{\mu\nu} = 0. \tag{53.14}$$

Такую координатную систему мы будем называть гармонической.

Вопрос об однозначности выбора гармонической координатной системы (и о дополнительных условиях, которые бы гарантировали однозначность) нас пока не интересует и будет рассмотрен в другом месте (§ 93). Нам важно здесь констатировать, что уравнения (53.13) совместны с уравнениями Эйнштейна и что они не налагают по существу никаких ограничений на их решения, а только суживают класс допустимых координатных систем *).

При условии (53.13) выражение для $R^{\mu\nu}$ упростится и примет вид

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{53.15}$$

Это выражение для $R^{\mu\nu}$ содержит вторые производные только от одной величины, а именно от одноименной компоненты фундаментального тензора $g^{\mu\nu}$, причем эти вторые производные группируются в виде оператора Даламбера.

Вид уравнения характеристик данной системы уравнений зависит только от членов с высшими производными, входящих в эту систему. В случае системы уравнений (53.01) и (53.13) членами с высшими производными являются те, которые группируются в виде оператора Даламбера.

Поэтому для системы уравнений тяготения характеристики будут те же, как для уравнения Даламбера

$$\Box \psi = 0. \tag{53.16}$$

Но эти последние легко найти. Как показано в Добавлении В, они имеют вид

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 0, \tag{53.17}$$

где

$$\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = \text{const} \tag{53.18}$$

есть уравнение фронта волны т. е. уравнение движущейся поверхности разрыва значений поля.

Уравнение (53.17), дающее закон распространения фронта гравитационной волны, совпадает с положенным в основу всей теории пространства и времени уравнением, дающим закон распространения фронта световой волны в свободном пространстве **). Коротко можно сказать, что тяготение распространяется со скоростью света.

---

*) Условия $\Gamma^\alpha = 0$ были впервые введены де-Дондером [16] и Ланчосом [17].

**) При выводе этого закона из уравнений Максвелла (§ 3) мы предполагали, что пространство-время является евклидовым. Но, согласно замечанию, сделанному в конце Добавления В, тот же результат получается и без этого предположения, если исходить из общековариантных уравнений Максвелла (§ 46)

Тот факт, что по теории Эйнштейна тяготение распространяется со скоростью света, имеет большое принципиальное значение. Он показывает, что принятая в этой теории форма уравнений тяготения находится в согласии с общим положением теории относительности, согласно которому существует предельная скорость распространения всякого рода действий, равная скорости света в свободном пространстве. Существование конечной скорости распространения тяготения устраняет те противоречия, которые были присущи ньютоновой теории тяготения, рассматривавшей мгновенные дальнодействия.

§ 54. Сравнение с постановкой задачи в теории Ньютона. Предельные условия

В теории тяготения Ньютона потенциал тяготения удовлетворяет уравнению

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho \tag{54.01}$$

и стремится к нулю на бесконечности так, что

$$\lim_{r\to\infty} rU = \gamma M, \tag{54.02}$$

где M — полная масса всех тел рассматриваемой системы, равная

$$M = \int \rho\, dx\, dy\, dz. \tag{54.03}$$

Теория Эйнштейна, основанная на уравнениях тяготения

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\varkappa T^{\mu\nu}, \tag{54.04}$$

должна в первом приближении давать то же, что теория Ньютона. Теория тяготения Ньютона применима к таким распределениям масс, для которых полная масса, выражаемая интегралом (54.03), распространенным по всему бесконечному объему, остается конечной. Этому условию удовлетворяет, в частности, распределение масс, имеющее островной характер. Под этим мы разумеем тот случай, когда все массы рассматриваемой системы сосредоточены внутри конечного объема, отделенного весьма большим расстоянием от остальных масс, не входящих в систему. При достаточно большом удалении остальных масс влиянием их на данную систему масс можно пренебречь и рассматривать ее как изолированную

При формулировке теории Эйнштейна мы также будем исходить из предположения об островном характере распределения масс. Это предположение дает возможность поставить (как и в теории Ньютона) определенные предельные условия на бесконечности, что делает задачу математически определенной.

Теоретически мыслимы и другие предположения, например, предположение о равномерном (в среднем) распределении масс во всем пространстве. Такая точка зрения предполагает рассмотрение столь огромных расстояний, что по сравнению с ними даже расстояния между галактиками должны считаться весьма малыми. Мы мало знаем о распределении масс в таких огромных пространствах. Поэтому теория таких огромных пространств будет по необходимости менее достоверной и менее доступной опытной проверке, чем теория астрономических явлений меньшего масштаба.

Основная часть этой книги будет посвящена случаю островного распределения масс. Предположение о равномерном распределении масс будет рассматриваться лишь в §§ 94 и 95, где будет дана теория пространства Фридмана — Лобачевского, к которому приводит это предположение.

Итак, мы будем считать, что в среднем пространство-время евклидово (точнее, псевдо-евклидово или галилеево) и что отклонения геометрии пространства-времени от евклидовой обусловлены наличием поля тяготения. Там, где поле тяготения отсутствует, геометрия должна быть евклидовой. При островном распределении масс поле тяготения на бесконечности стремится к нулю. Поэтому мы должны предположить, что на достаточно большом удалении от масс геометрия пространства-времени становится евклидовой. Но там, где геометрия евклидова, существуют галилеевы координаты x, y, z, t, в которых квадрат интервала имеет вид:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{54.05}$$

Поскольку опыт показывает, что и во всем пространстве геометрия мало отличается от евклидовой, следует ожидать, что существуют такие переменные, в которых выражение для квадрата интервала мало отличается от (54.05) во всем пространстве. Более точное математическое определение этих „квази-галилеевых“ координат будет дано в дальнейшем.

Заметим, что теория Ньютона проще всего формулируется именно в галилеевых координатах (инерциальная система отсчета). Поэтому сравнение с ней теории Эйнштейна, которая является ее обобщением, следует производить в таких координатах, которые по своим свойствам ближе всего к галилеевым.

Теория Ньютона является нерелятивистской. Но для перехода от релятивистской теории к нерелятивистской необходимо выделить в качестве большого параметра скорость света c. Поэтому мы не будем вводить величины c в выражение для временной координаты и положим, вместо (35.03), просто

$$x_0 = t; \quad x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z. \tag{54.06}$$

Таким образом, переменная x_0 будет иметь у нас теперь значение времени t, а не величины ct, как раньше.

Выражение (54.05) для квадрата интервала напишется теперь:

$$ds^2 = c^2\, dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \qquad (54.07)$$

Это выражение должно иметь место на достаточно большом расстоянии от масс, где геометрия является евклидовой.

Из сравнения с общим выражением

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \qquad (54.08)$$

мы получим следующие предельные значения $g_{\mu\nu}$ на бесконечности:

$$\left.\begin{aligned} (g_{00})_\infty &= c^2; \qquad (g_{0i})_\infty = 0, \\ (g_{ik})_\infty &= -\delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \qquad (54.09)$$

Соответствующие предельные значения для контравариантных компонент фундаментального тензора будут равны

$$(g^{00})_\infty = \frac{1}{c^2}; \quad (g^{0i})_\infty = 0; \quad (g^{ik})_\infty = -\delta_{ik}. \qquad (54.10)$$

Эти формулы можно рассматривать как предельные условия для фундаментального тензора.

Написанных предельных условий, однако, недостаточно, и к ним нужно присоединить другие, характеризующие асимптотическое поведение разностей $g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu})_\infty$ на большом удалении от масс.

В предыдущем параграфе мы видели, что уравнения Эйнштейна представляют (по крайней мере, при условии $\Gamma^\nu = 0$) уравнения волнового типа, в которых главные члены имеют вид оператора Даламбера. Вне масс тензор $T^{\mu\nu}$ равен нулю, и уравнения приводятся к виду

$$R^{\mu\nu} = 0, \qquad (54.11)$$

где, при условии $\Gamma^\nu = 0$, тензор $R^{\mu\nu}$ имеет вид:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma^\nu_{\alpha\beta}. \qquad (54.12)$$

Предположим, что на больших расстояниях разности $g^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu})_\infty$ и их первые и вторые производные стремятся к нулю, как $1/r$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. (Это предположение будет оправдано в дальнейшем). Тогда на больших расстояниях второй член в (54.12), представляющий однородную квадратичную функцию от первых производных, будет стремиться к нулю как $1/r^2$. Что касается оператора Даламбера, то с тем же приближением коэффициенты в нем можно заменить их предельными значениями. После этих упрощений мы получим

$$R^{\mu\nu} \cong -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_0^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_3^2}\right). \quad (54.13)$$

Более полное исследование асимптотического поведения величин $g^{\mu\nu}$ будет дано в § 87. Исследование это показывает, что на асимптотический вид $g^{\mu\nu}$ влияют также члены порядка $\frac{1}{r^2}$, отброшенные в (54.13), но что качественно поведение разности $g^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu})_\infty$ будет то же, как поведение функции ψ, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = 0, \quad (54.14)$$

где Δ есть обыкновенный (евклидов) оператор Лапласа.

Нас интересуют решения волнового уравнения (54.14), которые соответствуют расходящейся волне, убывающей на бесконечности. Они имеют асимптотический вид

$$\psi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{n}\right), \quad (54.15)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор с составляющими

$$n_x = \frac{x}{r}; \qquad n_y = \frac{y}{r}; \qquad n_z = \frac{z}{r}, \quad (54.16)$$

а f — произвольная функция. Функция f и ее производные по всем аргументам предполагаются конечными. Аргумент $\mathbf{n}$ дает зависимость функции f от направления, в котором точка удаляется на бесконечность.

Другие возможные решения волнового уравнения должны быть отброшены по физическим соображениям. В самом деле, в нашей постановке задачи система рассматривается как изолированная. Но это означает, что извне никакие волны на нее не падают. Всякая волна имеет своим источником одно из тел системы, а поскольку в системе островного типа все тела сосредоточены в некоторой конечной области, всякая волна исходит из этой области и на больших расстояниях от нее имеет асимптотический вид (54.15).

Условие, чтобы решение волнового уравнения имело на бесконечности указанный вид, можно записать в дифференциальной форме:

$$\left.\begin{array}{c} \lim\left(\dfrac{\partial(r\psi)}{\partial r} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(r\psi)}{\partial t}\right) = 0. \\ (\text{при } r \to \infty \text{ и всех } t) \end{array}\right\} \quad (54.17)$$

Это условие можно назвать условием излучения. Оно гарантирует единственность решения волнового уравнения, если только присоединить к нему требование, чтобы функция ψ и ее первые производные по x, y, z, t были всюду ограничены и убывали на бесконечности, как $\frac{1}{r}$ (см. § 92).

Напомним, что вышеприведенные соображения относятся, строго говоря, к обычному волновому уравнению (54.14), а не к уравнениям Эйнштейна. Поэтому асимптотический вид разности

$$g^{\mu\nu}-(g^{\mu\nu})_{\infty}=\psi \tag{54.18}$$

будет несколько отличаться от (54.15). Однако условие излучения, написанное в дифференциальной форме (54.17), будет справедливо и для величины (54.18).

Резюмируя, можно сказать, что, в нашей постановке задачи, фундаментальный тензор должен удовлетворять требованию евклидовости на бесконечности и условию излучения.

§ 55. Решение уравнений тяготения Эйнштейна в первом приближении и определение постоянной

Для сравнения теории тяготения Эйнштейна с теорией Ньютона мы должны прежде всего определить постоянную $\varkappa$, входящую в уравнения тяготения Эйнштейна

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\varkappa T^{\mu\nu}. \tag{55.01}$$

Значение этой постоянной можно найти из сопоставления выражения для квадрата интервала в ньютоновом приближении (§ 51) с выражением, получаемым путем приближенного решения уравнений Эйнштейна.

Для тензора массы в правой части (55.01) мы можем взять приближенные выражения, соответствующие евклидовой метрике и рассмотренные в § 32 (где они были выписаны для случая упругого тела). Переписывая эти выражения, мы должны помнить, что величина x_0 означает у нас теперь просто время t, а не ct, как раньше. Поэтому прежнее T^{00} будет равно, в новых обозначениях, c^2T^{00}, а прежнее T^{0i} будет равно новому cT^{0i}, тогда как T^{ik} не изменится. Таким образом, если $x_0=t$, то формулы (32.34) перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
c^2T^{00}&=\rho+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\Pi\right),\\
c^2T^{0i}&=\rho v_i+\frac{1}{c^2}\left\{v_i\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\Pi\right)-\sum_{k=1}^{3}p_{ik}v_k\right\},\\
c^2T^{ik}&=\rho v_iv_k-p_{ik}.
\end{aligned}\right\} \tag{55.02}$$

В нашем приближении мы должны здесь отбросить члены, соответствующие плотности и потоку энергии (скаляру и вектору Умова), и писать просто

$$c^2 T^{00} = \rho; \quad c^2 T^{0i} = \rho v_i. \tag{55.03}$$

С той же точностью, с какой справедливы выражения (55.03), мы можем заменить инвариант тензора массы значением

$$T = \rho. \tag{55.04}$$

Формулы (55.03) и (55.04) позволяют вычислить приближенные значения тензора, входящего в правую часть уравнений Эйнштейна, написанных, согласно (53.03), в виде

$$R^{\mu\nu} = -\varkappa\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T\right). \tag{55.05}$$

Используя галилеевы значения $g^{\mu\nu}$, мы получим

$$\left.\begin{aligned} T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T &= \frac{1}{2c^2}\rho, \\ T^{0i} - \frac{1}{2} g^{0i} T &= \frac{1}{c^2}\rho v_i, \\ T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T &= \frac{1}{2}\rho\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55.06}$$

С другой стороны, в гармонической координатной системе мы приближенно имеем, согласно (54.13):

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial t^2}, \tag{55.07}$$

где Δ — обычный евклидов оператор Лапласа. Поскольку нас интересует квази-статическое решение, мы можем отбросить здесь член с второй производной по времени. Подставляя (55.07) и (55.06) в (55.05), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \Delta g^{00} &= -\frac{\varkappa}{c^2}\rho, \\ \Delta g^{0i} &= -\frac{2\varkappa}{c^2}\rho v_i, \\ \Delta g^{ik} &= -\varkappa\rho\delta_{jk}. \end{aligned}\right\} \tag{55.08}$$

Припомним теперь выражение для квадрата интервала в ньютоновом приближении. Согласно (51.10), в этом выражении

$$g_{00} = c^2 - 2U, \tag{55.09}$$

где U есть ньютонов потенциал; остальные компоненты фундаментального тензора заменяются в этом приближении их галилеевыми значениями. Применяя формулу

$$g_{00} g^{00} + \sum_{i=1}^{3} g_{0i} g^{i0} = 1 \tag{55.10}$$

и используя то обстоятельство, что произведения $g_{i0} g^{i0}$ весьма малы по сравнению с единицей *), мы можем считать, что

$$g_{00}g^{00} = 1 \tag{55.11}$$

и, следовательно,

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4}. \tag{55.12}$$

Но ньютонов потенциал U удовлетворяет уравнению

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho. \tag{55.13}$$

Отсюда

$$\Delta g^{00} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}\rho. \tag{55.14}$$

Сравнивая это уравнение с первым уравнением (55.08), мы получим совпадение, если эйнштейнова постоянная тяготения $\varkappa$ будет связана с ньютоновой постоянной γ соотношением

$$\varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2}. \tag{55.15}$$

Ньютонов потенциал U есть то решение уравнения (55.13), которое удовлетворяет надлежащим предельным условиям на бесконечности. Это решение, как известно, может быть представлено в виде объемного интеграла

$$U = \gamma \int \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dx'\, dy'\, dz'. \tag{55.16}$$

Введем, наряду с ньютоновым потенциалом, функции

$$U_i = \gamma \int \frac{\rho v_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dx'\, dy'\, dz', \tag{55.17}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i \tag{55.18}$$

и условиям на бесконечности. Эти функции могут быть названы, по аналогии с соответствующими электродинамическими величинами, вектор-потенциалом тяготения. Тогда решения уравнений (55.08), после замены в них постоянной $\varkappa$ ее значением (55.15), напишутся:

$$\left.\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right), \\ g^{0i} &= \frac{4}{c^4} U_i, \\ g^{ik} &= -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55.19}$$

*) Оценка этим членам будет дана ниже

Заметим, что U имеет размерность квадрата скорости, а U_i—размерность третьей степени скорости. При оценке порядка величины можно считать, что U будет порядка q^2, а U_i — порядка q^3, где q есть некоторая скорость, малая по сравнению со скоростью света.

Из контравариантных компонент фундаментального тензора мы можем уже чисто алгебраическим путем найти ковариантные компоненты, а также определитель g и другие величины.

Для упрощения алгебраических выкладок введем систему величин

$$a_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}; \quad a^{ik} = -g^{ik}, \tag{55.20}$$

где $i, k = 1, 2, 3$. Нетрудно проверить, что будет

$$\sum_{m=1}^{3} a_{im}a^{mk} = \delta_{ik}. \tag{55.21}$$

Совокупность величин a_{ik} можно рассматривать, как трехмерный пространственный метрический тензор; нам важны здесь, впрочем, только алгебраические их свойства.

Если мы положим

$$a = \operatorname{Det} a_{ik} \tag{55.22}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{a} = \operatorname{Det} a^{ik}, \tag{55.23}$$

то будет

$$g = -ag_{00}. \tag{55.24}$$

Из определения (55.20) непосредственно следует

$$g_{00}g^{0k} = \sum_{m=1}^{3} a^{mk}g_{m0}, \tag{55.25}$$

а также

$$g_{i0} = g_{00}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}g^{0k}. \tag{55.26}$$

Если величины $g^{\mu\nu}$ имеют значения (55.19), то будет

$$a^{ik} = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik} \tag{55.27}$$

и, следовательно,

$$a_{ik} = \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}. \tag{55.28}$$

Принимая во внимание значение g_{00}, получим

$$g_{00}a_{ik} = c^2\delta_{ik}, \tag{55.29}$$

причем относительная погрешность здесь будет более высокого порядка, чем U/c^2.

Отсюда, с той же относительной погрешностью,

$$g_{i0} = c^2 g^{i0}, \tag{55.30}$$

Используя эти формулы, получаем для ковариантных компонент фундаментального тензора выражения:

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= c^2 - 2U, \\ g_{0i} &= \frac{4}{c^2} U_i, \\ g_{ik} &= -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55.31}$$

Зная приближенные значения g_{0i} и g^{0i}, мы можем теперь проверить, с какой точностью выполняется использованное нами равенство (55.11). Мы имеем приближенно

$$g_{00}g^{00} = 1 - \frac{16}{c^6} \sum_{i=1}^{3} U_i^2. \tag{55.32}$$

Если U_i — порядка q^3, то это выражение отличается от единицы на величины порядка q^6/c^6. Следовательно, равенством (55.11) можно пользоваться не только в данном, но и в следующем приближении относительно U/c^2 (или v^2/c^2). Заметим, что из формулы (55.26) следует

$$g_{00}g^{00} = 1 - g_{00} \sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik} g^{0i} g^{0k}. \tag{55.33}$$

Здесь величина g_{00} положительна, а двойная сумма представляет определенную положительную форму, следовательно, будет всегда (вполне строго)

$$g_{00}g^{00} \leqslant 1, \tag{55.34}$$

хотя отличие левой части (55.34) от единицы, как мы видели, весьма мало.

Выпишем теперь значения определителя g и умноженных на $\sqrt{-g}$ контравариантных компонент фундаментального тензора, которые мы обозначаем через

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}. \tag{55.35}$$

Мы имеем

$$-g = c^2 + 4U \tag{55.36}$$

и, следовательно,

$$\sqrt{-g} = c + \frac{2U}{c}. \tag{55.37}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{4}{c^3} U_i, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55.38}$$

Нам необходимо теперь оценить отброшенные нами в выражении для $R^{\mu\nu}$ члены, квадратичные в первых производных.

Эти члены имеют вид $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$. Для вычисления приближенных значений скобок Кристоффеля мы могли бы воспользоваться только что найденными приближенными значениями фундаментального тензора. Мы не будем, однако, проделывать здесь этих вычислений, так как квадратичные члены будут подробно вычисляться в главе VI, где уравнения тяготения будут решаться в следующем приближении. Здесь нам нужен только порядок величины квадратичных членов. Он будет следующий. Члены в R^{00} и R^{0i} будут шестого, а члены в R^{ik} — четвертого порядка относительно $1/c$. В рассматриваемом приближении эти члены на результат не влияют.

Нам остается проверить, выполняются ли в должном приближении условия гармоничности

$$\Gamma^{\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right) = 0. \tag{55.39}$$

Выясним прежде всего, с какой точностью должны быть выполнены эти условия. Если в формуле (53.04) для $R^{\mu\nu}$ не вычеркивать членов $\Gamma^{\mu,\nu}$, а выписать их с точностью, соответствующей приближению (55.07) для остальных членов, мы получим вместо (55.07):

$$\left.\begin{aligned}
R^{00} &= \frac{1}{2}\Delta g^{00} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g^{00}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Gamma^0}{\partial t},\\
R^{0i} &= \frac{1}{2}\Delta g^{0i} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g^{0i}}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^0}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Gamma^i}{\partial t}\right),\\
R^{ik} &= \frac{1}{2}\Delta g^{ik} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^i}{\partial x_k} + \frac{\partial\Gamma^k}{\partial x_i}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{55.40}$$

Для того чтобы члены с Γ^{ν}, которые мы отбрасывали, были действительно малы по сравнению с членами типа $\Delta g^{\mu\nu}$, принятыми во внимание, необходимо, чтобы Γ^0 было относительно c более высокого порядка малости, чем $1/c^4$, а Γ^i — более высокого, чем $1/c^2$. Эти условия в самом деле выполняются. Действительно, из (55.38) непосредственно видно, что Γ^i будет четвертого порядка относительно $1/c$. Что касается Γ^0, то здесь члены четвертого порядка равны

$$\Gamma^0 = -\frac{4}{c^4}\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right). \tag{55.41}$$

Эти члены должны исчезать. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \tag{55.42}$$

Как видно из определения величин U и U_i (посредством дифференциальных уравнений с предельными условиями или посредством объемных интегралов), это равенство действительно выполняется в силу соотношения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}=0, \tag{55.43}$$

выражающего закон сохранения массы в ньютоновом приближении.

Таким образом, полученные нами для фундаментального тензора выражения действительно удовлетворяют, в первом приближении, как уравнениям тяготения, так и условиям гармоничности. Кроме того, они, очевидно, удовлетворяют предельным условиям на бесконечности. Соответствующее им выражение для квадрата элементарного интервала имеет вид:

$$ds^2=(c^2-2U)\,dt^2-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+ \\ +\frac{8}{c^2}(U_1\,dx_1+U_2\,dx_2+U_3\,dx_3)\,dt. \tag{55.44}$$

Обычно члены, содержащие произведения $dx_i\,dt$, не играют роли. Отбрасывая их, мы получим выражение

$$ds^2=(c^2-2U)\,dt^2-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2), \tag{55.45}$$

в которое входит только ньютонов потенциал. Это выражение уже было приведено нами без доказательства в § 51 [формула (51.11)].

§ 56. Уравнения тяготения в статическом случае

Фундаментальный тензор называется статическим, если его компоненты не зависят от временной координаты $x_0=t$, так что

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}=0 \tag{56.01}$$

и если, кроме того,

$$g_{0i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{56.02}$$

Из физических соображений очевидно, что когда имеется несколько масс, то они должны двигаться *). Поэтому фундаментальный тензор может оказаться статическим только в случае одной массы. Несмотря на ограниченность физических применений, статический случай представляет известный интерес: во-первых, в этом случае легко исследовать вопрос об единственности решения и, во-вторых, в статическом случае можно указать строгое решение уравнений Эйнштейна со сферической симметрией.

*) Задача о движении системы масс подробно рассматривается в главе VI.

При условиях (56.01) и (56.02) мы можем положить

$$g_{00} = V^2; \quad g_{ik} = -a_{ik}, \tag{56.03}$$

после чего квадрат интервала напишется:

$$ds^2 = V^2\,dt^2 - \sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}\,dx_i\,dx_k, \tag{56.04}$$

причем коэффициенты этой квадратичной формы не зависят от t. Для пространственной части квадрата интервала мы введем обозначение

$$dl^2 = \sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}\,dx_i\,dx_k, \tag{56.05}$$

так что формула (56.04) примет вид:

$$ds^2 = V^2\,dt^2 - dl^2. \tag{56.06}$$

Рассматривая, наряду с четырехмерной квадратичной формой (56.04), также и трехмерную форму (56.05), мы можем применять формулы тензорного анализа к обеим этим формам. Определяя величины a^{ik} из уравнений (55.21), мы можем считать их контравариантными компонентами пространственного фундаментального тензора, соответствующего форме (56.05). Мы будем иметь

$$g^{00} = \frac{1}{V^2}; \quad g^{0i} = 0; \quad g^{ik} = -a^{ik}, \tag{56.07}$$

а также

$$\sqrt{-g} = V\sqrt{a},$$

где, согласно (55.22),

$$a = \operatorname{Det} a_{ik}. \tag{56.08}$$

Латинским значкам i, k, ... мы придаем значения 1, 2, 3, а греческим значкам μ, ν, ... — значения 0, 1, 2, 3.

Обозначим четырехмерные скобки Кристоффеля (для фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$) через $(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_g$ и трехмерные скобки Кристоффеля (для фундаментального тензора a_{ik}) — через $(\Gamma^{h}_{ik})_a$. Аналогично будем снабжать значками g и a тензорные величины, относящиеся к четырехмерному и к трехмерному случаю. Кроме того, положим

$$V_k = \frac{\partial V}{\partial x_k}; \quad V^i = a^{ik}V_k \tag{56.09}$$

(в последней формуле подразумевается суммирование по k от 1 до 3). Мы будем тогда иметь

$$(\Gamma^{h}_{ik})_g = (\Gamma^{h}_{ik})_a, \tag{56.10}$$

а также

$$(\Gamma^i_{00})_g = V \cdot V^i; \quad (\Gamma^0_{0i})_g = \frac{V_i}{V} \tag{56.11}$$

и, наконец,

$$(\Gamma^0_{00})_g = 0; \quad (\Gamma^0_{ik})_g = 0; \quad (\Gamma^k_{i0})_g = 0. \tag{56.12}$$

Припоминая общую формулу

$$R^\rho_{\sigma,\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\rho_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\rho_{\alpha\mu}, \tag{56.13}$$

мы можем выразить четырехмерный тензор кривизны через трехмерный тензор.

Если ни один значок не равен нулю, мы будем иметь, вследствие (56.10),

$$(R^l_{i,hk})_g = (R^l_{i,hk})_a. \tag{56.14}$$

Если только один значок равен нулю, мы имеем

$$(R^0_{i,hk})_g = 0; \quad (R^l_{0,hk})_g = 0; \quad (R^l_{i,0k})_g = 0. \tag{56.15}$$

Нетрудно проверить также, что

$$(R^0_{0,hk}) = 0. \tag{56.16}$$

Применяя общую формулу (56.13) к случаю $\sigma = \mu = 0$ и пользуясь выражениями (56.10) — (56.12) для скобок Кристоффеля, будем иметь:

$$(R^l_{0,0k})_g = \frac{\partial}{\partial x_k}(V \cdot V^l) + V \cdot V^i (\Gamma^l_{ik})_a - V_k V^l =$$

$$= V\left(\frac{\partial V^l}{\partial x_k} + (\Gamma^l_{ik})_a V^i\right). \tag{56.17}$$

Но величина

$$(V^l)_k = \frac{\partial V^l}{\partial x_k} + (\Gamma^l_{ik})_a V^i \tag{56.18}$$

есть вычисленная по правилам трехмерного тензорного анализа ковариантная производная от вектора V^l. Вследствие (56.09) мы имеем

$$(V^l)_k = \left(a^{li}\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_k = a^{li} V_{ik}, \tag{56.19}$$

где

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} - (\Gamma^j_{ik})_a \frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{56.20}$$

есть вторая ковариантная производная от V (в трехмерном смысле). Так как $V_{ik} = V_{ki}$, то безразлично, который из двух значков V_{ik} будет поднят; поэтому мы можем писать вместо $(V^l)_k$ просто V^l_k, после чего формула (56.17) примет вид:

$$(R^l_{0,\,0k})_g = V \cdot V^l_k. \tag{56.21}$$

Аналогично вычисляем

$$(R^0_{i,\,0k})_g = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{V_i}{V}\right) + \frac{V_i V_k}{V^2} - (\Gamma^j_{ik})_a \frac{V_j}{V} \tag{56.22}$$

и после небольшого преобразования

$$(R^0_{i,\,0k})_g = \frac{V_{ik}}{V}, \tag{56.23}$$

где V_{ik} имеет значение (56.20).

Выразим теперь четырехмерный тензор Римана через трехмерные величины. По общей формуле (44.22) мы имеем

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu,\,\alpha\nu} = R^0_{\mu,\,0\nu} + R^l_{\mu,\,l\nu}. \tag{56.24}$$

Отсюда, вследствие (56.14) и (56.23),

$$(R_{ik})_g = (R_{ik})_a + \frac{V_{ik}}{V}, \tag{56.25}$$

где $(R_{ik})_a$ есть трехмерный тензор Римана. Полагая же в (56.21) $l = k$ и суммируя по k, получим

$$(R_{00})_g = -V \cdot \Delta V, \tag{56.26}$$

где

$$\Delta V = V^k_k = a^{ik} V_{ik} \tag{56.27}$$

есть трехмерный оператор Лапласа, который можно написать в виде

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{a}\, a^{ik} \frac{\partial V}{\partial x_i}\right). \tag{56.28}$$

Что касается смешанных компонент четырехмерного тензора Римана, то вследствие (56.15) они равны нулю:

$$(R_{i0})_g = 0. \tag{56.29}$$

Выпишем также инвариант четырехмерного тензора Римана. Он равен

$$(R)_g = -\frac{2\,\Delta V}{V} - (R)_a, \tag{56.30}$$

где $(R)_a$ — инвариант соответствующего трехмерного тензора.

Подставляя найденные выражения в формулу

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{56.31}$$

мы можем выразить тензор Эйнштейна через трехмерные величины.

Вводя для консервативного тензора трехмерного пространства обозначение

$$A_{ik} = (R_{ik})_a - \frac{1}{2} a_{ik} (R)_a \tag{56.32}$$

и разумея под A трехмерный инвариант этого тензора, равный

$$A = a^{ik} A_{ik} = -\frac{1}{2} (R)_a, \tag{56.33}$$

мы получим для составляющих тензора (56.31 выражения *):

$$G_{ik} = A_{ik} + \frac{1}{V} (V_{ik} - a_{ik} \Delta V), \tag{56.34}$$

$$G_{i0} = 0, \tag{56.35}$$

$$G_{00} = -V^2 A. \tag{56.36}$$

Заметим, что, согласно (Г.13), трехмерные контравариантные составляющие A^{ik} непосредственно выражаются через ковариантные составляющие трехмерного тензора кривизны четвертого ранга.

Согласно уравнениям тяготения Эйнштейна,

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T_{\mu\nu}. \tag{56.37}$$

В случае пустого пространства $T_{\mu\nu} = 0$. Покажем, что единственным статическим решением уравнений Эйнштейна для пустого пространства, не имеющим особенных точек и удовлетворяющим предельным условиям, будет решение, соответствующее евклидову пространству и псевдо-евклидову пространству-времени.

В случае $G_{\mu\nu} = 0$ из написанных уравнений легко выводится

$$\Delta V = 0. \tag{56.38}$$

Это есть уравнение эллиптического типа для V, представляющее обобщение уравнения Лапласа. Функция V должна на пространственной бесконечности стремиться к постоянному значению, а ее производные должны стремиться к нулю. Но единственным решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим этим условиям, будет постоянное значение V. Если же V постоянно, то тензориальные производные V_{ik} равны нулю, а тогда уравнения $G_{ik} = 0$ дают $A_{ik} = 0$, и, следовательно, тензор кривизны трехмерного пространства равен нулю, а самое пространство — евклидово (см. Добавление Г).

§ 57. Строгое решение уравнений тяготения для одной сосредоточенной массы

В случае одной сосредоточенной массы можно найти строгое решение уравнений тяготения, обладающее сферической симметрией. Так как нас интересует статическое решение, мы можем воспользоваться

*) Эти выражения приведены в книге Леви-Чивита [14].

формулами предыдущего параграфа и писать ds^2 в виде

$$ds^2 = V^2\,dt^2 - dl^2, \tag{57.01}$$

где

$$dl^2 = a_{ik}\,dx_i\,dx_k. \tag{57.02}$$

Если x_1, x_2, x_3 — гармонические координаты, мы можем ввести соответствующие им сферические координаты, положив

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ x_2 &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ x_3 &= r\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{57.03}$$

Предположению о сферической симметрии соответствует выражение для dl^2 вида

$$dl^2 = F^2\,dr^2 + \rho^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \tag{57.04}$$

где F и ρ суть функции от одного r. При этом коэффициент V также должен зависеть только от r.

Заметим, что если ds^2 имеет принятый здесь вид, то оператор Даламбера от некоторой функции Ψ напишется

$$\Box\Psi = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{1}{VF}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V\rho^2}{F}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \Delta^*\Psi\right\}, \tag{57.05}$$

где $\Delta^*\Psi$ есть оператор Лапласа на шаре:

$$\Delta^*\Psi = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}. \tag{57.06}$$

Время t есть, очевидно, гармоническая переменная, так как $\Box t = 0$. Чтобы координаты (57.03) также были гармоническими переменными, необходимо выполнение условий $\Box x_i = 0$. Но если x_i есть одна из величин (57.03), то

$$\Delta^* x_i = -2x_i, \tag{57.07}$$

и условие гармоничности для x_i дает

$$\frac{1}{VF}\frac{d}{dr}\left(\frac{V\rho^2}{F}\right) - 2r = 0. \tag{57.08}$$

Это есть дополнительное (помимо уравнений Эйнштейна) уравнение для величин V, F, ρ.

Составим теперь скобки Кристоффеля для дифференциальной формы (57.04). Мы должны положить

$$\left.\begin{aligned} a_{rr} &= F^2; & a_{\vartheta\vartheta} &= \rho^2; & a_{\varphi\varphi} &= \rho^2\sin^2\vartheta, \\ a_{\vartheta\varphi} &= 0; & a_{\varphi r} &= 0; & a_{r\vartheta} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{57.09}$$

и для контравариантного трехмерного метрического тензора

$$\left.\begin{array}{lll} a^{rr}=\dfrac{1}{F^2}; & a^{\vartheta\vartheta}=\dfrac{1}{\rho^2}; & a^{\varphi\varphi}=\dfrac{1}{\rho^2\sin^2\vartheta}; \\ a^{\vartheta\varphi}=0; & a^{\varphi r}=0; & a^{r\vartheta}=0. \end{array}\right\} \tag{57.10}$$

Отсюда получаем по общим формулам следующие выражения для 18 скобок Кристоффеля:

$$\left.\begin{array}{lll} \Gamma^r_{rr}=\dfrac{F'}{F}; & \Gamma^\vartheta_{rr}=0; & \Gamma^\varphi_{rr}=0, \\ \Gamma^r_{\vartheta\vartheta}=-\dfrac{\rho\rho'}{F^2}; & \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta}=0; & \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta}=0, \\ \Gamma^r_{\varphi\varphi}=-\dfrac{\rho\rho'}{F^2}\sin^2\vartheta; & \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi}=-\sin\vartheta\cos\vartheta; & \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}=0, \\ \Gamma^r_{r\vartheta}=0; & \Gamma^\vartheta_{r\vartheta}=\dfrac{\rho'}{\rho}; & \Gamma^\varphi_{r\vartheta}=0, \\ \Gamma^r_{r\varphi}=0; & \Gamma^\vartheta_{r\varphi}=0; & \Gamma^\varphi_{r\varphi}=\dfrac{\rho'}{\rho}, \\ \Gamma^r_{\vartheta\varphi}=0; & \Gamma^\vartheta_{\vartheta\varphi}=0; & \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi}=\operatorname{ctg}\vartheta, \end{array}\right\} \tag{57.11}$$

где штрихом обозначены производные по r.

Заметим, что каждая строчка этой таблицы дает взятые с обратным знаком коэффициенты при первых производных $\dfrac{\partial V}{\partial r}$, $\dfrac{\partial V}{\partial \vartheta}$, $\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$ в выражении для второй ковариантной производной от некоторой функции V. Так как эти выражения нам пригодятся, мы их здесь выпишем:

$$\left.\begin{aligned} V_{rr}&=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-\frac{F'}{F}\frac{\partial V}{\partial r}, \\ V_{\vartheta\vartheta}&=\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}+\frac{\rho\rho'}{F^2}\frac{\partial V}{\partial r}, \\ V_{\varphi\varphi}&=\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\rho\rho'}{F^2}\sin^2\vartheta\frac{\partial V}{\partial r}+\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ V_{r\vartheta}&=\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\vartheta}-\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ V_{r\varphi}&=\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\varphi}-\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ V_{\vartheta\varphi}&=\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta\,\partial\varphi}-\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{57.12}$$

С другой стороны, каждый столбец таблицы (57.11) дает коэффициенты при квадратах и произведениях первых производных в уравнениях пространственной геодезической линии, которые имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r}+\frac{F'}{F}\dot{r}^2-\frac{\rho\rho'}{F^2}(\dot{\vartheta}^2+\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2)=0,\\ \ddot{\vartheta}+2\frac{\rho'}{\rho}\dot{\vartheta}\dot{r}-\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2=0,\\ \ddot{\varphi}+2\frac{\rho'}{\rho}\dot{\varphi}\dot{r}+2\operatorname{ctg}\vartheta\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta}=0,\end{aligned}\right\} \tag{57.13}$$

где точка обозначает дифференцирование по длине дуги $\left(\dot{r}=\frac{dr}{dl}\right.$ и т. д.). Практически скобки Кристоффеля легче всего вычислять не по общим формулам, а путем составления уравнений геодезической линии непосредственно из вариационного начала.

При помощи выписанных в таблице (57.11) скобок Кристоффеля составляем трехмерный тензор кривизны четвертого ранга, а затем по формулам

$$\left.\begin{aligned} (R_{rr})_a&=R^{\vartheta}_{r,\,\vartheta r}+R^{\varphi}_{r,\,\varphi r},\\ (R_{\vartheta\vartheta})_a&=R^{r}_{\vartheta,\,r\vartheta}+R^{\varphi}_{\vartheta,\,\varphi\vartheta},\\ (R_{\varphi\varphi})_a&=R^{r}_{\varphi,\,r\varphi}+R^{\vartheta}_{\varphi,\,\vartheta\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{57.14}$$

— трехмерный тензор кривизны второго ранга. Аналогичных формул для не-диагональных компонент мы не выписываем, так как эти последние оказываются равными нулю.

Оставляя только члены, отличные от нуля, получаем по общей формуле (56.13):

$$R^{\vartheta}_{r,\,\vartheta r}=\frac{\partial\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta}}{\partial r}+\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta}\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta r}-\Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta}. \tag{57.15}$$

Подставляя сюда значения скобок Кристоффеля из (57.11), получим, после небольшого преобразования,

$$R^{\vartheta}_{r,\,\vartheta r}=\frac{F}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right). \tag{57.16}$$

Вычисление показывает, что величина $R^{\varphi}_{r,\,\varphi r}$ имеет то же самое значение

$$R^{\varphi}_{r,\,\varphi r}=\frac{F}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right), \tag{57.17}$$

поэтому

$$(R_{rr})_a=\frac{2F}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right). \tag{57.18}$$

Далее,

$$R^{r}_{\vartheta,\,r\vartheta}=-\frac{\partial\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}}{\partial r}+\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta r}\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}-\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}\Gamma^{r}_{rr}, \tag{57.19}$$

откуда

$$R^{r}_{\vartheta,\,r\vartheta}=\frac{\rho}{F}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right). \tag{57.20}$$

Продолжая вычисления, получаем

$$R^{\varphi}_{\vartheta,\,\varphi\vartheta}=\frac{\partial\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi}}{\partial\vartheta}+\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi}-\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}, \tag{57.21}$$

откуда

$$R^{\varphi}_{\vartheta,\,\varphi\vartheta}=-1+\frac{\rho'^2}{F^2}. \tag{57.22}$$

Подставляя (57.20) и (57.22) в (57.14), находим для $(R_{\vartheta\vartheta})_a$ выражение

$$(R_{\vartheta\vartheta})_a=\frac{1}{F}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho\rho'}{F}\right)-1. \tag{57.23}$$

Аналогичные вычисления дают

$$(R_{\varphi\varphi})_a=\sin^2\vartheta\,(R_{\vartheta\vartheta})_a, \tag{57.24}$$

что и следовало ожидать в силу сферической симметрии. Мы уже упоминали, что

$$(R_{r\vartheta})_a=0;\quad (R_{r\varphi})_a=0;\quad (R_{\vartheta\varphi})_a=0. \tag{57.25}$$

Инвариант трехмерного тензора кривизны вычисляется по формуле

$$(R)_a=\frac{1}{F^2}(R_{rr})_a+\frac{2}{\rho^2}(R_{\vartheta\vartheta})_a \tag{57.26}$$

и может быть представлен в виде

$$(R)_a=\frac{2}{\rho^2\rho'}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho\rho'^2}{F^2}-\rho\right). \tag{57.27}$$

Найденные формулы позволяют выписать уравнения тяготения Эйнштейна в раскрытом виде.

Если тензор массы равен нулю, то уравнения тяготения приводятся к виду

$$(R_{\mu\nu})_g=0. \tag{57.28}$$

Вследствие (56.25) пространственные компоненты этого тензора дают в статическом случае

$$V(R_{ik})_a+V_{ik}=0. \tag{57.29}$$

Компонента со значками (0, 0) приводит к уравнению

$$\Delta V=0. \tag{57.30}$$

Уравнения для смешанных компонент (со значками $0l$) удовлетворяются тождественно.

Уравнения (57.29) и (57.30) являются тензорными уравнениями в смысле трехмерного тензорного анализа; каждому из значков i, k мы можем приписать значение r, ϑ, φ, как это мы и делали в предыдущих рассуждениях этого параграфа. При этом уравнения для не-диагональных компонент (r, ϑ), (r, φ) и (ϑ, φ) удовлетворятся тождественно в силу равенств (57.25) и вытекающих из (57.12) аналогичных равенств

$$V_{r\vartheta}=0; \quad V_{r\varphi}=0; \quad V_{\vartheta\varphi}=0 \tag{57.31}$$

для ковариантных производных от функции V, зависящей только от r. Далее, вследствие равенства (57.24) и вытекающего из (57.12) аналогичного равенства

$$V_{\varphi\varphi}=\sin^2\vartheta V_{\vartheta\vartheta} \tag{57.32}$$

уравнение для компоненты (φ, φ) совпадает с уравнением для компоненты (ϑ, ϑ). Таким образом, из шести уравнений (57.29) будут независимыми следующие два:

$$V(R_{rr})_a+V_{rr}=0, \tag{57.33}$$

$$V(R_{\vartheta\vartheta})_a+V_{\vartheta\vartheta}=0. \tag{57.34}$$

Подставляя в (57.33) выражение для $(R_{rr})_a$ из (57.18) и выражение для V_{rr} из (57.12), получаем:

$$\frac{2VF}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right)+V''-\frac{F'}{F}V'=0. \tag{57.35}$$

Аналогично, после подстановки (57.23) и (57.12) в (57.34) будем иметь

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho\rho' V}{F}\right)-VF=0. \tag{57.36}$$

Наконец, уравнение (57.30) напишется

$$V''-\frac{F'}{F}V'+\frac{2\rho'}{\rho}V'=0. \tag{57.37}$$

Последние три уравнения нетрудно решить. Комбинируя (57.35) и (57.37), получим

$$V\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right)-\frac{\rho'}{F}\cdot V'=0, \tag{57.38}$$

откуда

$$\frac{\rho'}{VF}=\text{const}. \tag{57.39}$$

Значение постоянной определяется предельными условиями: на бесконечности должно быть

$$\rho'=1; \quad F=1; \quad V=c \qquad (\text{при } r\to\infty). \tag{57.40}$$

Отсюда

$$VF = c\rho', \tag{57.41}$$

где c — скорость света. Подставляя это значение VF в (57.36) и интегрируя, получим

$$\frac{\rho\rho' V}{F} - c\rho = \text{const} \tag{57.42}$$

и, пользуясь снова соотношением (57.41),

$$\rho\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \text{const}. \tag{57.43}$$

Значение постоянной интегрирования можно определить из сравнения с теорией Ньютона. Если M есть значение сосредоточенной массы, то на больших расстояниях должно быть

$$V^2 = c^2 - 2U; \quad U = \frac{\gamma M}{r}, \tag{57.44}$$

причем

$$\lim \frac{\rho}{r} = 1. \tag{57.45}$$

Отсюда

$$\rho \cdot (c^2 - V^2) = 2\gamma M \tag{57.46}$$

и, следовательно,

$$V^2 = c^2 - \frac{2\gamma M}{\rho}. \tag{57.47}$$

До сих пор было использовано только уравнение (57.36) и одна комбинация [а именно (57.38)] уравнений (57.35) и (57.37). Необходимо еще проверить, что последние два уравнения выполняются в отдельности. Напишем уравнение (57.37) в виде

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{V'\rho^2}{F}\right) = 0. \tag{57.48}$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (57.47), получим

$$VV' = \frac{\gamma M}{\rho^2}\rho'. \tag{57.49}$$

В соединении с (57.41) это дает

$$\frac{V'\rho^2}{F} = \frac{\gamma M}{c} = \text{const}, \tag{57.50}$$

и, следовательно, уравнение (57.37) выполняется. Таким образом, из трех уравнений: (57.35), (57.36), (57.37) — независимыми являются только два.

Так как, в силу (57.41)

$$F\,dr = \frac{c}{V}\,d\rho, \tag{57.51}$$

то подстановка найденных значений F и V в выражение для ds^2 дает

$$ds^2 = V^2\,dt^2 - \frac{c^2}{V^2}\,d\rho^2 - \rho^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \tag{57.52}$$

где V^2 имеет значение

$$V^2 = c^2 - \frac{2\gamma M}{\rho}. \tag{57.47}$$

Пока используются только уравнения тяготения, а условия гармоничности для координат не учитываются, величина ρ будет произвольной функцией от r (и, следовательно, r будет произвольной функцией от ρ). Но условия гармоничности координат приводят к тому, что эта функция определяется однозначным образом. В самом деле, из условия гармоничности

$$\frac{1}{VF}\frac{d}{dr}\left(\frac{V\rho^2}{F}\right) - 2r = 0 \tag{57.08}$$

и соотношения

$$VF = c\rho' \tag{57.41}$$

получаем

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{V^2\rho^2}{c^2}\frac{dr}{d\rho}\right) - 2r = 0. \tag{57.53}$$

Подставляя сюда значение V^2 из (57.47), будем иметь

$$\frac{d}{d\rho}\left[(\rho^2 - 2\alpha\rho)\,\frac{dr}{d\rho}\right] - 2r = 0, \tag{57.54}$$

где мы положили для краткости

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}. \tag{57.55}$$

Область изменения ρ есть

$$\rho \geqslant 2\alpha, \tag{57.56}$$

так как только в этой области будет $V^2 \geqslant 0$.

При помощи подстановки

$$\rho = \alpha\,(1 + z) \tag{57.57}$$

уравнение (57.54) приводится к уравнению Лежандра

$$\frac{d}{dz}\left[(z^2 - 1)\frac{dr}{dz}\right] - 2r = 0 \tag{57.58}$$

для области

$$z \geqslant 1. \tag{57.59}$$

Общее решение уравнения Лежандра (57.58) есть

$$r = CP_1(z) + C'Q_1(z), \tag{57.60}$$

где

$$P_1(z) = z; \quad Q_1(z) = \frac{z}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} - 1 \tag{57.61}$$

функции Лежандра первого и вторго рода. При $z=1$ функция Q_1 обращается в бесконечность. Поэтому член, содержащий Q_1, должен отсутствовать, и в (57.60) остается член, пропорциональный z. Из сравнения значений ρ и r при больших z нетрудно заключить, на основании (57.40) или (57.45), что

$$r = az. \tag{57.62}$$

Таким образом, мы имеем окончательно

$$\rho = r + \alpha. \tag{57.63}$$

Подстановка этого значения ρ в найденное выражение для ds^2 дает

$$ds^2 = c^2\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)dt^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)dr^2 - (r+\alpha)^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{57.64}$$

где, согласно (57.55), постоянная α пропорциональна значению сосредоточенной массы M.

Выражение для ds^2 в форме (57.52) (в произвольных, не-гармонических координатах) было впервые получено Шварцшильдом [18] и часто называется по имени этого автора.

§ 58. Движение перигелия планеты

Найденное строгое решение уравнений тяготения может быть применено к исследованию поля тяготения Солнца и планет.

Мы имеем

$$ds^2 = c^2\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)dt^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)dr^2 - (r+\alpha)^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{58.01}$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}. \tag{58.02}$$

Пропорциональная массе M постоянная α имеет размерность длины и называется гравитационным радиусом массы M. Для Солнца, и тем более для планет, гравитационный радиус α во много раз меньше геометрического радиуса L (в качестве L можно взять радиус шара одинакового объема с данным телом). Мы можем составить следующую табличку:

	Солнце	Земля	Луна
α	1,48 *км*	0,443 *см*	0,0053 *см*
L	696 000 *км*	6370 *км*	1738 *км*
$\alpha : L$	$2 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-11}$

Для сверхплотных звезд величина α того же порядка, как для Солнца, тогда как L, хотя и меньше, чем для Солнца, но все же не более чем во сто раз. Благодаря малости отношения $\alpha : L$ метрика пространства-времени мало отличается от евклидовой даже вблизи и внутри масс. Однако нужно помнить, что, согласно (55.45), уже в ньютоновом приближении величина g_{00} отлична от постоянной и равна $c^2 - 2U$ и что отклонение от постоянного значения величины g_{00} проявляется (для медленных движений) гораздо более чувствительным образом, чем такие же относительные отклонения в пространственной части интервала.

Сравним найденное строгое решение уравнений тяготения с приближенным решением, рассмотренным в § 55. Для этого нам нужно перейти в (58.01) от сферических координат к прямоугольным, которые будут гармоническими. Мы можем представить в (58.01) пространственную часть

$$dl^2 = \frac{r+\alpha}{r-\alpha}\,dr^2 + (r+\alpha)^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) \tag{58.03}$$

в виде

$$dl^2 = \frac{r+\alpha}{r-\alpha}\cdot\frac{\alpha^2}{r^2}\,dr^2 + \left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2). \tag{58.04}$$

В последнем выражении уже легко перейти к прямоугольным координатам, и мы получим

$$ds^2 = c^2\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\,dt^2 - \left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - \\ - \frac{r+\alpha}{r-\alpha}\,\frac{\alpha^2}{r^4}\,(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2, \tag{58.05}$$

откуда

$$g_{ik} = -\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2\delta_{ik} - \frac{r+\alpha}{r-\alpha}\cdot\frac{\alpha^2}{r^4}\,x_i x_k \tag{58.06}$$

и, кроме того,

$$g_{00} = c^2\,\frac{r-\alpha}{r+\alpha}; \quad g_{0i} = 0. \tag{58.07}$$

Пренебрегая в (58.05) квадратом отношения α/r, мы придем к приближенной формуле (55.45), в которой

$$U = c^2\frac{\alpha}{r} = \frac{\gamma M}{r} \tag{58.08}$$

есть ньютонов потенциал.

Из формул (58.06) и (58.07) получается следующее значение определителя g в гармонических координатах:

$$g = -c^2\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^4. \tag{58.09}$$

Заметим, что величина

$$\sqrt[4]{-\frac{g}{c^2}} = 1 + \frac{\alpha}{r} \tag{58.10}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа с евклидовыми коэффициентами. В следующей главе (§ 68) мы увидим, что корень четвертой степени из $(-g/c^2)$ и в общем случае приближенно удовлетворяет уравнению Даламбера с евклидовыми коэффициентами.

Из тех же формул (58.06) и (58.07) или же путем непосредственного преобразования равенства

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}=\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\cdot\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{(r+\alpha)^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\right] \tag{58.11}$$

к прямоугольным координатам получаются значения контравариантных компонент фундаментального тензора. Мы выпишем эти компоненты, умноженные на $\sqrt{-g}$. Мы будем иметь

$$\mathfrak{g}^{ik}=\sqrt{-g}\,g^{ik}=-c\delta_{ik}+c\alpha^2\frac{x_i x_k}{r^4}, \tag{58.12}$$

а также

$$\mathfrak{g}^{00}=\frac{1}{c}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^3}{1-\frac{\alpha}{r}};\quad \mathfrak{g}^{0i}=0. \tag{58.13}$$

Эти формулы позволяют без труда проверить, что наши координаты действительно гармонические и что

$$\frac{\partial\mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{58.14}$$

Зная потенциалы тяготения для поля сосредоточенной массы, мы можем определить движение частицы в этом поле в предположении, что частица движется по геодезической линии. Как мы видели в § 51, это предположение находится в согласии с механикой Ньютона. Более полное обоснование этого закона движения материальной точки будет дано в § 63 на основе уравнений тяготения.

Уравнения геодезической линии получаются, как мы знаем, из вариационного принципа

$$\delta\int ds=0, \tag{58.15}$$

который может быть написан в виде

$$\delta\int L\,dt=0, \tag{58.16}$$

где функция Лагранжа L в нашем случае равна корню квадратному из выражения

$$L^2=c^2\frac{r-\alpha}{r+\alpha}-\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-$$
$$-\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\frac{\alpha^2}{r^4}(x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2+x_3\dot{x}_3)^2, \tag{58.17}$$

где точки сверху обозначают производные по времени. Таким образом, мы имеем здесь простую задачу механики материальной точки.

Для решения этой задачи обратим, прежде всего, внимание на тот факт, что функция Лагранжа обладает сферической симметрией. Это значит, что функция Лагранжа не меняется при линейной ортогональной подстановке над величинами x_1, x_2, x_3, сопровождаемой такой же подстановкой над величинами $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$. Отсюда следует, как обычно в механике (см. также § 27 этой книги), существование интегралов площадей в виде

$$\left.\begin{aligned} x_2\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}-x_3\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}&=c_1,\\ x_3\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}-x_1\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}&=c_2,\\ x_1\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}-x_2\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}&=c_3.\end{aligned}\right\} \tag{58.18}$$

Это позволяет заключить о том, что траектория частицы лежит в плоскости

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0. \tag{58.19}$$

Беря эту плоскость за одну из координатных плоскостей, мы можем без ограничения общности положить

$$x_3=0;\quad \dot{x}_3=0 \tag{58.20}$$

и рассматривать плоское движение. Последнее удобнее всего изучать в полярных координатах, к которым приводятся наши сферические координаты, если мы положим

$$\vartheta=\frac{\pi}{2};\quad \dot{\vartheta}=0. \tag{58.21}$$

Переписывая квадрат функции Лагранжа в полярных координатах, будем иметь:

$$L^2=c^2\frac{r-\alpha}{r+\alpha}-\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\cdot\dot{r}^2-(r+\alpha)^2\dot{\varphi}^2. \tag{58.22}$$

Функция Лагранжа не зависит ни от времени t, ни от угла φ. Это сразу дает нам два интеграла:

$$\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}+\dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}-L=\text{const}, \tag{58.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\text{const}, \tag{58.24}$$

которые соответствуют обычным интегралу энергии и интегралу площадей. Помня, что

$$L\,dt=ds=c\,d\tau, \tag{58.25}$$

где τ — собственное время, мы можем переписать интегралы (58.23) и (58.24) в виде

$$\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\frac{dt}{d\tau}=\varepsilon, \tag{58.26}$$

$$(r+\alpha)^2\frac{d\varphi}{d\tau}=\mu, \tag{58.27}$$

где ε и μ — постоянные. Величина μ может быть истолкована, как момент количества движения единицы массы. Если положить

$$\varepsilon=1+\frac{E_0}{c^2}, \tag{58.28}$$

где E_0 — новая постоянная, то из наших формул следует, что в нерелятивистском приближении будет

$$E_0=\frac{1}{2}v^2-\frac{\gamma M}{r}, \tag{58.29}$$

так что E_0 есть отнесенная к единице массы полная энергия частицы.

Алгебраическим следствием уравнений (58.26) и (58.27) является соотношение

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=c^2\varepsilon^2-c^2\frac{r-\alpha}{r+\alpha}-\frac{\mu^2(r-\alpha)}{(r+\alpha)^3}. \tag{58.30}$$

Оно выводится подстановкой (58.26) и (58.27) в тождество

$$c^2\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-(r+\alpha)^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2=c^2. \tag{58.31}$$

Предыдущие формулы дают три дифференциальных уравнения первого порядка для величин r, ϑ, φ как функций от τ. Решение этих уравнений, очевидно, сводится к квадратурам. Мы не будем выписывать в явной форме соответствующих интегралов, а ограничимся исследованием траектории частицы, т. е. зависимости r от φ.

Исключая $d\tau$ из (58.27) и (58.30), получаем

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\frac{c^2\varepsilon^2}{\mu^2}(r+\alpha)^4-\frac{c^2}{\mu^2}(r+\alpha)^3(r-\alpha)-(r+\alpha)(r-\alpha). \tag{58.32}$$

Справа стоит здесь многочлен четвертой степени от r. Следовательно, φ выражается через r в виде эллиптического интеграла первого рода и, обратно, r есть эллиптическая функция от φ. Вещественный период этой эллиптической функции будет несколько отличен от 2π; поэтому орбита не будет замкнутой. Многочлен в правой части (58.32) имеет, кроме очевидного отрицательного корня $r=-\alpha$, малый положительный корень

$$r_0\sim\alpha+\frac{8\alpha^3c^2\varepsilon^2}{\mu^2} \tag{58.33}$$

и еще два корня r_1 и r_2. Если $\varepsilon^2 < 1$, то оба эти корня положительны и мы будем иметь всегда $r_1 < r < r_2$ (финитное движение). Если же $\varepsilon^2 > 1$, то один из корней (r_1 или r_2) становится отрицательным; обозначая остающийся положительный корень через r_1, мы будем иметь $r_1 < r$, и орбита будет уходить на бесконечность. При $\varepsilon^2 = 1$ будет $r_2 = \infty$.

Если ввести вместо r переменную

$$u = \frac{1}{r} \tag{58.34}$$

и писать многочлен в раскрытом виде, то будет:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2(\varepsilon^2 - 1)}{\mu^2} + \frac{2\alpha c^2}{\mu^2}(2\varepsilon^2 - 1)u + \left(\frac{6\alpha^2 c^2 \varepsilon^2}{\mu^2} - 1\right)u^2 + \\ + \frac{2\alpha^3 c^2(2\varepsilon^2 + 1)}{\mu^2}u^3 + \alpha^2\left(1 + \frac{\alpha^2 c^2(\varepsilon^2 + 1)}{\mu^2}\right)u^4. \tag{58.35}$$

Оценим в этом выражении порядок величины отдельных членов. Введем, как в § 55, характерную скорость q и характерную длину l. Тогда по порядку величины будет

$$\varepsilon^2 - 1 \sim \frac{q^2}{c^2}; \quad \mu^2 \sim l^2 q^2,$$
$$\alpha \sim \frac{q^2}{c^2} l; \quad u \sim \frac{1}{l}.$$

На основе этих оценок нетрудно видеть, что в правой части (58.35) члены с нулевой, первой и второй степенью u имеют порядок величины $\frac{1}{l^2}$, члены же с третьей и четвертой степенью u — порядок величины $q^4/c^4 \cdot 1/l^2$. Поэтому, пренебрегая лишь весьма малыми величинами порядка q^4/c^4 (или α^2/l^2) по сравнению с единицей, мы можем отбросить в уравнении (58.35) последние два члена, после чего оно примет вид:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2(\varepsilon^2 - 1)}{\mu^2} + \frac{2\alpha c^2}{\mu^2}(2\varepsilon^2 - 1)u + \left(\frac{6\alpha^2 c^2 \varepsilon^2}{\mu^2} - 1\right)u^2. \tag{58.36}$$

Корни квадратичного многочлена будут соответствовать упомянутым выше корням r_1 и r_2. Мы положим

$$u_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{1+e}{p}; \quad u_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{1-e}{p}, \tag{58.37}$$

где p и e — новые постоянные, связанные с первоначально введенными постоянными ε и μ. Приближенно мы имеем

$$\left.\begin{aligned} 1 - \varepsilon^2 &= \frac{\alpha}{p}(1 - e^2), \\ \mu^2 &= \alpha c^2 p = \gamma M p. \end{aligned}\right\} \tag{58.38}$$

Положим также

$$\nu^2 = 1 - \frac{6\alpha}{p}, \tag{58.39}$$

откуда приближенно

$$\nu = 1 - \frac{3\alpha}{p}. \tag{58.40}$$

С этими обозначениями мы можем переписать уравнение (58.36) в виде

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{e^2-1}{p^2} + \frac{2}{p}u - u^2. \tag{58.41}$$

Решение этого уравнения есть

$$u = \frac{1 + e\cos\nu\varphi}{p}. \tag{58.42}$$

Здесь постоянная интегрирования выбрана так, что наименьшему расстоянию r (наибольшему u) соответствует значение $\varphi = 0$. Выражение (58.42) хорошо передает общий характер движения. При $\nu = 1$ мы имели бы эллипс, параболу или гиперболу с параметром p и эксцентриситетом e. Рассмотрим случай эллипса ($e < 1$). Радиус-вектор r вернется к прежнему значению, когда угол φ увеличится не на 2π, а на несколько большую величину $2\pi/\nu$. Разность

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\nu} - 2\pi = \frac{6\pi\alpha}{p} \tag{58.43}$$

дает смещение перигелия за один период обращения планеты. Таким образом, орбита планеты может быть характеризована, как прецессирующий эллипс.

Заметим, что эйнштейновские уравнения движения для планеты приводятся к тому же виду, как и классические уравнения движения сферического маятника; поэтому траектория планеты имеет тот же вид, как траектория конца маятника *).

Для всех планет численное значение величины $\Delta\varphi$ весьма мало. Так, для Земли, полагая $p = 1{,}5 \cdot 10^8$ *км* и используя значение $\alpha = 1{,}5$ *км*, получим

$$\Delta\varphi = 6\pi 10^{-8} = 0{,}038''$$

за один оборот, т. е. за год, иначе говоря, 3,8″ в столетие. Для Меркурия смещение перигелия за столетие получается значительно больше (а именно 43″), во-первых, потому, что он находится значительно ближе к Солнцу (радиус его орбиты составляет 0,39 радиуса орбиты Земли) и, во-вторых, потому, что он обращается быстрее (за столетие он успевает совершить около 420 обращений).

При сравнении теории с опытом необходимо помнить, что движение перигелия происходит не только в силу эйнштейновского эффекта, но и в силу возмущающего влияния других планет,

*) См. чертеж в книге А. Н. Крылова [19].

отклонения их формы от сферической и т. п. Эти поправки превышают эйнштейновскую во много раз. Кроме того, нужно иметь в виду, что положение перигелия наблюдать тем труднее, чем меньше эксцентриситет e, т. е. чем ближе орбита к кругу; при $e=0$ положение перигелия перестает быть определенным. Тем не менее, астрономические средства наблюдения настолько точны и вычислительные возможности небесной механики настолько велики, что, в случае Меркурия, необъясненный ньютоновой теорией остаток в движении перигелия определяется с точностью до секунды в столетие. Этот остаток составляет 42,6″, в прекрасном согласии с теорией. Для Земли остаток определяется с несколько меньшей точностью и составляет около 4″, что также вполне согласуется с эйнштейновским значением.

§ 59. Отклонение луча света, проходящего мимо Солнца

Мы рассмотрим теперь другое наблюдаемое следствие эйнштейновской теории тяготения — отклонение луча света, проходящего мимо Солнца.

Мы составим себе сперва общую картину распространения света в поле тяготения Солнца, а затем уже перейдем к интегрированию уравнения луча.

Закон распространения фронта световой волны мы будем писать в виде, умноженном на $\sqrt{-g}$:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}=0. \tag{59.01}$$

Пользуясь формулами (58.10) и (58.11), мы будем иметь, в сферических координатах:

$$\frac{\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^3}{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\cdot\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-\left(1-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)^2\right]=0. \tag{59.02}$$

Если пренебрегать здесь членами порядка α^2/r^2 по сравнению с единицей, то уравнение для ω приведется к виду

$$\frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-(\operatorname{grad}\omega)^2=0, \tag{59.03}$$

где

$$n^2=1+\frac{4\alpha}{r}; \qquad n=1+\frac{2\alpha}{r}. \tag{59.04}$$

Это уравнение можно толковать, как закон распространения света в евклидовом пространстве, но в среде с показателем преломления n.

Заметим, что уравнение (59.03) может быть получено уже из приближенной формы

$$ds^2 = (c^2 - 2U)\,dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \qquad (59.05)$$

для ds^2 [см. (55.45)], причем эффективный показатель преломления равен

$$n = 1 + \frac{2U}{c^2}. \qquad (59.06)$$

Напротив того, пригодная для медленных движений приближенная форма (51.10) для ds^2 привела бы к вдвое меньшему коэффициенту при U в выражении для эффективного показателя преломления. Как мы увидим ниже, с опытом согласуется выражение (59.06), соответствующее квадратичной форме (59.05).

Воображаемая среда с показателем преломления (59.06) будет вблизи Солнца оптически более плотной, чем вдали от него. Поэтому волна будет огибать Солнце, и луч будет уже не прямым. Как мы увидим ниже, луч будет иметь, примерно, форму ветви гиперболы, в фокусе которой находится Солнце. Угол между асимптотами гиперболы дает наблюдаемое отклонение луча.

Луч света является, как мы знаем из § 38, нулевой геодезической линией, для которой уравнение распространения фронта волны является уравнением Гамильтона — Якоби (см. также Добавление Г). Поскольку в предыдущем параграфе мы уже решили задачу о геодезической линии конечной длины, мы можем получить уравнение луча из формул § 58 путем предельного перехода. Напомним эти формулы. Мы имели интегралы движения

$$\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\,\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon, \qquad (58.26)$$

$$(r+\alpha)^2\,\frac{d\varphi}{d\tau} = \mu \qquad (58.27)$$

и уравнение траектории

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2\varepsilon^2}{\mu^2}(r+\alpha)^4 - \frac{c^2}{\mu^2}(r+\alpha)^3(r-\alpha) - (r+\alpha)(r-\alpha). \qquad (58.32)$$

Так как для луча света $d\tau = 0$, то постоянные ε и μ в формулах (58.26) и (58.27) будут бесконечно велики, отношение же их, равное

$$\frac{(r+\alpha)^3}{r-\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mu}{\varepsilon} = \mu_1 \qquad (59.07)$$

будет конечным. Вследствие этого формула (58.32) примет вид

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2}{\mu_1^2}(r+\alpha)^4 - (r+\alpha)(r-\alpha). \qquad (59.08)$$

Вместо постоянной μ_1 удобно ввести по формуле

$$\lim \frac{\mu}{\varepsilon} = \mu_1 = cb \tag{59.09}$$

другую постоянную b, имеющую размерность длины. Формула (59.08) перепишется тогда

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2}(r+\alpha)^4 - (r+\alpha)(r-\alpha), \tag{59.10}$$

а соответствующее уравнение для $u = 1/r$ будет иметь вид:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2}(1+\alpha u)^4 - u^2 + \alpha^2 u^4. \tag{59.11}$$

Если толковать r, φ как полярные координаты в евклидовой плоскости, то только что введенная постоянная b есть „прицельное расстояние“, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на асимптоту к траектории. В самом деле, из элементарных формул евклидовой геометрии на плоскости вытекает следующее выражение для длины перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к кривой, заданной в полярных координатах:

$$d = \frac{r}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2}}. \tag{59.12}$$

Асимптота есть касательная в бесконечно удаленной точке ($u = 0$), а следовательно, прицельное расстояние есть значение d при $u = 0$; это значение получается из (59.11) и (59.12) равным b.

Вернемся к уравнению траектории луча в форме (59.11). Если считать величину u порядка $1/b$, то в этом уравнении члены, содержащие u^3 и u^4, будут по крайней мере порядка α^2/b^3 по сравнению с главными членами. Отбрасывая малые члены, мы получаем уравнение, которое решается элементарно. Решение будет иметь вид:

$$u = \frac{2\alpha}{b^2} + \frac{1}{b}\cos\varphi. \tag{59.13}$$

Постоянная интегрирования в (59.13) выбрана так, что значению $\varphi = 0$ соответствует наибольшее значение u (и, следовательно, наименьшее значение расстояния r). Приближенно

$$r_{\min} = b - 2\alpha. \tag{59.14}$$

В евклидовой плоскости r, φ уравнение (59.13) представляет гиперболу. Направления асимптот этой гиперболы определяются из условия $u = 0$, которое дает

$$\cos\varphi = -\frac{2\alpha}{b}. \tag{59.15}$$

Здесь правая часть есть малая отрицательная величина. Предельные значения угла φ будут поэтому равны

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta; \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2} - \delta, \tag{59.16}$$

где малая положительная величина δ может быть положена равной

$$\delta = \frac{2\alpha}{b}. \tag{59.17}$$

Угол отклонения луча есть угол между асимптотами гиперболы, который равен

$$2\delta = \frac{4\alpha}{b}. \tag{59.18}$$

Смещение видимого положения звезды, от которой луч проходит вблизи Солнца, можно наблюдать во время полного солнечного затмения. Если положить величину b равной радиусу Солнца, то для угла отклонения 2δ получится значение

$$2\delta = 1'',75, \tag{59.19}$$

которое хорошо согласуется с наблюденными значениями. Обработка наблюдений затмения 1952 г. приводит к числу $1'',70$. Этот результат позволяет совершенно однозначно утверждать, что наблюдаемому закону распространения света соответствует выражение (59.05) для ds^2, но не выражение (51.10), которое дает вдвое меньшее число $0'',87$.

В заключение сделаем одно замечание по вопросу об определении прямой линии в теории тяготения. Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3? Нам представляется единственно правильным второе определение. Фактически мы им и пользовались, когда говорили о том, что луч света вблизи Солнца имеет форму гиперболы (59.13). Гармонические координаты глубоко соответствуют, в рассматриваемых здесь случаях, природе пространства и времени, и определение прямой должно опираться на них. Что касается того соображения, что прямая, как луч света, более непосредственно наблюдаема, то оно не имеет никакого значения: в определениях решающим является не непосредственная наблюдаемость, а соответствие природе, хотя бы это соответствие и устанавливалось путем косвенных умозаключений.

§ 60. Вариационный принцип для уравнений тяготения

В уравнениях тяготения

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T^{\mu\nu} \tag{60.01}$$

слева стоит консервативный тензор, а справа — тензор массы. В § 48 мы видели, что выражение для тензора массы может быть получено путем варьирования интеграла действия по компонентам фундаментального тензора. Так, в случае уравнений гидродинамики, интеграл действия может быть написан в виде

$$S=\int(\rho^{*}c^{2}+\rho^{*}\Pi)\sqrt{-g}\,(dx), \tag{60.02}$$

где величина ρ^{*} есть инвариантная плотность той части массы покоя, которая при движении не меняется и удовлетворяет уравнению неразрывности (48.29), а величина Π есть отнесенная к единице массы потенциальная энергия упругого сжатия жидкости, определяемая формулой (48.30). Если проварьировать интеграл S по компонентам фундаментального тензора, то получится

$$\delta_{g}S=\frac{c^{2}}{2}\int T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx), \tag{60.03}$$

где $T^{\mu\nu}$ есть гидродинамический тензор массы, определяемый формулой (48.39). В случае электродинамики интеграл действия имеет вид (47.37); главный член, зависящий от массы покоя, в нем тот же, как в гидродинамическом случае. Вариация электродинамического интеграла действия по величинам $g_{\mu\nu}$ также имеет вид (60.03), где уже $T^{\mu\nu}$ есть электродинамический тензор массы, определяемый формулами (46.22) и (46.32). Что касается вариации интеграла действия по другим входящим в него функциям (по смещениям и составляющим поля), то такая вариация дает, как мы знаем, уравнения движения рассматриваемой материальной системы.

Мы будем предполагать, что рассматриваемая система такова, что для нее справедлива формула (60.03), где S — соответствующий интеграл действия. Тогда тензор массы, входящий в правую часть уравнений тяготения (60.01), может быть представлен, как коэффициент при $\delta g_{\mu\nu}$ в выражении для вариации некоторого интеграла. Попытаемся представить в аналогичном виде также и левую часть уравнений тяготения, т. е. консервативный тензор.

Для этого рассмотрим интеграл

$$I=\int R\sqrt{-g}\,(dx), \tag{60.04}$$

где R — скаляр кривизны, и составим его вариацию.

При вычислении вариации подинтегральной функции мы воспользуемся тем, что вариации скобок Кристоффеля $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ представляют тензор (хотя самые скобки Кристоффеля тензором не являются). Это доказывается следующим образом. Согласно (42.04), закон преобразования скобок Кристоффеля имеет вид:

$$\frac{\partial^{2}x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}\partial x_{\nu}}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\rho}}=-(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta})'\frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x_{\nu}}. \tag{60.05}$$

Эта формула справедлива для величин $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, относящихся к данной метрике $(g_{\alpha\beta})$. Произведем здесь вариацию метрики, сохраняя связь между старыми и новыми координатами. Метрике $(g_{\alpha\beta}+\delta g_{\alpha\beta})$ будут соответствовать величины $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}+\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, причем будет

$$\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\rho}}=(\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta})'\,\frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}\cdot\frac{\partial x_{\beta}}{\partial x_{\nu}}, \tag{60.06}$$

что и доказывает, что вариации $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ представляют смешанный тензор третьего ранга.

При составлении вариации скаляра R мы будем исходить из выражений

$$R^{\alpha}_{\mu,\beta\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}+\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta}, \tag{60.07}$$

$$R_{\mu\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}+\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\alpha} \tag{60.08}$$

для смешанных компонент тензора кривизны четвертого ранга и для тензора кривизны второго ранга. В системе координат, геодезической в данной точке, вариация $R_{\mu\nu}$ равна

$$\delta R_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha})-\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}), \tag{60.09}$$

так как в этой точке все скобки Кристоффеля равны нулю. Отсюда

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=g^{\nu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\nu})-g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) \tag{60.10}$$

(после перестановки некоторых значков в первом члене справа). Введем вектор

$$w^{\alpha}=g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}-g^{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}. \tag{60.11}$$

Нетрудно видеть, что равенство (60.10) равносильно следующему:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(\sqrt{-g}w^{\alpha}), \tag{60.12}$$

так как в геодезической системе координат можно величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}=\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ вынести из-под знака производной. Но обе части равенства (60.12) представляют скаляры; поэтому, если это равенство справедливо в геодезической системе координат, то оно справедливо и вообще.

Предположим, что на границах области интегрирования в интеграле (60.04) исчезают не только самые вариации $\delta g_{\mu\nu}$, но и их производные, а следовательно, и величины $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, а также вектор w^{α}.

Тогда, написав интеграл I в виде

$$I=\int R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx)=\int R_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}\,(dx), \tag{60.13}$$

мы получим для его вариации выражение

$$\delta I=\int R_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}\,(dx), \tag{60.14}$$

так как, в силу равенства (60.12), будет

$$\int \delta R_{\mu\nu}\cdot g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx)=0. \tag{60.15}$$

Используя формулы

$$\delta\sqrt{-g}=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}, \tag{60.16}$$

$$\delta g^{\mu\nu}=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}, \tag{60.17}$$

получаем

$$\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}=\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)=\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right)\delta g_{\alpha\beta}. \tag{60.18}$$

Подставляя это выражение в (60.14) и производя суммирование по μ и по ν, будем иметь:

$$\delta I=\int\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R-R^{\alpha\beta}\right)\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,(dx). \tag{60.19}$$

Наша ближайшая цель достигнута: консервативный тензор представлен в виде коэффициента при вариации фундаментального тензора.

Сопоставляя формулы (60.03) и (60.19), мы приходим к выводу, что вариация выражения

$$W=S-\frac{c^4}{16\pi\gamma}I \tag{60.20}$$

по компонентам фундаментального тензора равна

$$\delta_g W=\frac{c^2}{2}\int\left\{T^{\mu\nu}+\frac{c^2}{8\pi\gamma}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\right\}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx). \tag{60.21}$$

Эта вариация исчезает в силу уравнений тяготения (60.01). В свою очередь, уравнения тяготения могут быть получены из вариационного начала $\delta W=0$, если производить вариацию по компонентам фундаментального тензора и считать величины $\delta g_{\mu\nu}$ произвольными. (Напомним, что в § 48 мы уже рассматривали вариацию интеграла действия по $g_{\mu\nu}$, но там величины $\delta g_{\mu\nu}$ не были вполне произвольными, так как соответствовали бесконечно малому преобразованию координат и выражались через четыре функции η_ν).

Варьируя же W по остальным функциям, входящим в интеграл действия S, мы получим уравнения движения и уравнения поля для этих функций.

Таким образом, уравнения тяготения (для гравитационного поля) объединяются с уравнениями для других полей (поле скоростей вещества, электромагнитное поле и др.) в одном общем вариационном принципе.

Вариационному принципу можно придать несколько другую форму, взяв вместо инвариантного интеграла

$$I = \int R\sqrt{-g}\,(dx) \tag{60.04}$$

другой, хотя и не инвариантный, но не содержащий зато вторых производных.

В Добавлении Б выведена формула

$$R = \Box y - \Gamma - L, \tag{60.22}$$

где $\Box y$ есть оператор Даламбера (Б.51), причем $y = \lg\sqrt{-g}$. Величина Γ выражается формулой (Б.43), а величину L можно, согласно (Б.54), написать в виде

$$L = g^{\mu\nu}(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}), \tag{60.23}$$

а также во многих других видах, приведенных в Добавлении Б.

При помощи обозначений (Б.59) и (Б.61) можно, вместо (60.22), написать также

$$R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,(y^\nu - \Gamma^\nu)\right) - L. \tag{60.24}$$

Интеграл I будет отличаться от выражения

$$I^* = -\int L\sqrt{-g}\,(dx) \tag{60.25}$$

на величину

$$I' = \int \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,(y^\nu - \Gamma^\nu)\right)(dx), \tag{60.26}$$

которая приводится к интегралу по поверхности и вариация от которой равна нулю. Поэтому вариации интегралов I и I^* равны:

$$\delta I = \delta\int R\sqrt{-g}\,(dx) = -\delta\int L\sqrt{-g}\,(dx) = \delta I^*. \tag{60.27}$$

Поскольку в вариационном начале важны не самые варьируемые интегралы, а лишь их вариации, можно в формуле (60.20) заменить I на I^*. При этом величина δI^* (равная δI) от координатной системы не зависит, несмотря на то, что самый интеграл I^* может зависеть от координатной системы. Целью замены I на I^* является исключение из подинтегрального выражения вторых производных. Вытекающая из (60.19) и (60.27) формула

$$\delta \int L \sqrt{-g}\,(dx) = \int \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\right) \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) \qquad (60.28)$$

может быть, разумеется, выведена и непосредственно, хотя соответствующие выкладки довольно сложны.

§ 61. О локальной эквивалентности полей ускорения и тяготения

Под принципом эквивалентности в теории тяготения понимают утверждение, согласно которому поле ускорения в каком-то смысле эквивалентно полю тяготения.

Принцип эквивалентности связан с фундаментальным законом равенства инертной и весомой массы, но с ним не тождественен. Закон равенства инертной и весомой массы, которым мы пользовались в § 51 при выводе уравнений тяготения, имеет общий, а не локальный характер, тогда как эквивалентность между полем ускорения и полем тяготения имеет место только локально, т. е. относится к одной точке пространства и к одному моменту времени.

Эквивалентность заключается в следующем. Путем введения надлежащей координатной системы (которая обычно толкуется, как ускоренно движущаяся система отсчета) можно так преобразовать уравнения движения материальной точки, находящейся в поле тяготения, что они будут (в новой системе отсчета) иметь вид уравнений движения *свободной* материальной точки. Тем самым поле тяготения как бы заменяется (или, лучше сказать, имитируется) полем ускорения. Благодаря закону равенства инертной и весомой массы такое преобразование будет одно и то же для любого значения массы материальной точки. Но оно будет достигать своей цели только в бесконечно малой области пространства и в течение бесконечно малого промежутка времени, т. е. оно будет строго локальным.

В общем случае указанное преобразование математически соответствует переходу к локально-геодезической системе координат (§ 42).

Можно пытаться толковать принцип эквивалентности менее локальным образом, т. е. применять его не к бесконечно малой, а к конечной области пространства, в которой, однако, поле должно быть однородным. Но тогда этот „принцип“ будет справедлив лишь в той мере, в какой справедлива ньютонова механика. Он будет иметь место лишь для слабых однородных полей и для медленных движений (см. разобранный ниже пример).

Принцип эквивалентности сыграл большую роль в период, предшествовавший созданию Эйнштейном его теории тяготения. Приведем одно из относящихся к тому времени рассуждений Эйнштейна и проанализируем его.

Эйнштейн иллюстрирует свою „гипотезу эквивалентности“ на примере лаборатории внутри падающего лифта. Все предметы внутри такого лифта как бы лишены тяжести: все они падают, вместе с лифтом, с одинаковым ускорением, так что их относительные ускорения равны нулю, даже когда они не закреплены относительно дна и стенок лифта. Мы имеем, говорит Эйнштейн, две системы отсчета: одну инерциальную (или почти инерциальную), связанную с землей, и другую, ускоренную, связанную с лифтом. В первой, инерциальной, системе существует поле тяготения, во второй, ускоренной, оно отсутствует. Таким образом, по Эйнштейну, ускорение может заменить собой тяготение, или, по крайней мере, однородное поле тяготения. Эту мысль Эйнштейн развивает и дальше. Он предлагает считать, что обе системы отсчета (ускоренная и неускоренная) физически вполне равноправны, и указывает, что с этой точки зрения говорить об абсолютном ускорении так же невозможно, как и об абсолютной скорости.

Разберем изложенную точку зрения Эйнштейна подробнее. Прежде всего возникает вопрос: что такое ускоренно движущаяся система отсчета и как она может быть физически реализована? В примере с лифтом „система отсчета“ как бы отождествляется с некоторым ящиком (с клеткой лифта). Но мы знаем (см. конец § 32), что даже без учета тяготения абстракция абсолютно твердого тела не допустима; всякое тело будет при ускорении испытывать деформации, которые будут различны для различных тел. Поэтому для ускоренной системы отсчета непригодна также модель ящика или твердого каркаса, которую мы рассматривали в § 11 для инерциальной системы. Таким образом, в рассуждениях Эйнштейна остается без определения исходное понятие ускоренно движущейся системы отсчета. Это затруднение можно было бы обойти только наложив ограничения на величину ускорений и на размеры рассматриваемой области. Можно, например, потребовать следующее: допускаемые ускорения должны быть настолько малы, чтобы в рассматриваемой области можно было пренебречь вызываемыми ими деформациями и пользоваться понятием твердого тела. Но тогда станет ясным приближенный характер всего рассуждения Эйнштейна.

Далее, уже сам Эйнштейн подчеркивает, что не всякое поле тяготения может быть заменено ускорением: для возможности такой замены поле тяготения должно быть однородным. Это также налагает ограничения на пространственные размеры рассматриваемой области, в которой поля тяготения и ускорения приближенно эквивалентны. Нельзя, например, „уничтожить“ поле тяготения вокруг земного шара: для этого пришлось бы ввести какую-то „ускоренно сжимающуюся“ систему отсчета, что нелепо.

Ограничения должны быть наложены не только на пространственные размеры области, но и на промежутки времени, в течение которых возможна приближенная замена тяготения ускорением.

Эйнштейновский лифт не может падать неограниченно долго: он непременно разобьется.

Эйнштейн применял также свой принцип эквивалентности не локальным образом. Однако сделанная им в его работе 1911 г. попытка исследовать таким путем распространение света вблизи тяжелой массы привела его к вдвое меньшему значению отклонения светового луча, чем то, какое получается по его теории тяготения (см. § 59). Это связано с тем, что принцип эквивалентности никак не может дать для ds^2 правильного выражения (51.11), а может дать, самое большее, выражение (51.10), пригодное для медленных движений. Таким образом, и при не локальном толковании приближенная эквивалентность полей тяготения и ускорения ограничена в пространстве и во времени. Как мы уже говорили, эта эквивалентность имеет место лишь для слабых и однородных полей и для медленных движений.

Вследствие указанных ограничений, приближенная эквивалентность полей тяготения и ускорения, сама по себе, не заслуживает названия физического принципа и едва ли может служить удовлетворительным логическим основанием для построения теории тяготения. Физическим принципом, действительно пригодным для построения теории тяготения, является закон равенства инертной и тяготеющей массы. Этот закон и был положен нами в основу наших рассуждений.

Как мы упоминали, Эйнштейн полагал, что с точки зрения принципа эквивалентности говорить об абсолютном ускорении так же невозможно, как и об абсолютной скорости. Это заключение Эйнштейна представляется нам ошибочным. Оно основано на предположении о неразличимости полей ускорения и тяготения. Однако, хотя действия ускорения и тяготения неразличимы „в малом“ (т. е. локально), но они безусловно различимы „в большом“ (т. е. с учетом предельных условий, налагаемых на поле тяготения). Так, потенциал тяготения, который получается при введении равноускоренной системы отсчета, является линейной функцией от координат и, следовательно, не удовлетворяет условиям на бесконечности (там он должен был бы обращаться в нуль). Во вращающейся системе отсчета потенциал центробежных сил возрастает пропорционально квадрату расстояния от оси вращения; кроме того, там имеются силы Кориолиса. По этим признакам сразу можно обнаружить, что „поле тяготения“ в этих системах отсчета является фиктивным.

Рассмотрим пример равноускоренной системы отсчета несколько подробнее, с учетом теории относительности. При этом мы оставим в стороне вопрос о реализации ускоренно движущейся системы отсчета и будем толковать термин „система отсчета“ более формально, в смысле „координатная система“. Сообразно этому, под переходом к ускоренно движущейся системе отсчета мы будем разуметь некоторое преобразование координат, содержащее нелинейным образом время.

Предположим, что истинное поле тяготения отсутствует и квадрат бесконечно малого интервала имеет вид

$$ds^2 = c^2\,dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2). \tag{61.01}$$

где $(x'y'z't')$ — декартовы координаты и время в некоторой инерциальной системе отсчета. Произведем преобразование *) координат:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\,\mathrm{ch}\,\frac{gt}{c} + \frac{c^2}{g}\left(\mathrm{ch}\,\frac{gt}{c} - 1\right); \\ y' &= y; \quad z' = z, \\ t' &= \frac{c}{g}\,\mathrm{sh}\,\frac{gt}{c} + \frac{x}{c}\,\mathrm{sh}\,\frac{gt}{c}, \end{aligned}\right\} \tag{61.02}$$

где g — постоянная, имеющая размерность ускорения. При условии

$$\frac{gt}{c} \ll 1 \tag{61.03}$$

предыдущие формулы могут быть написаны в виде

$$x' = x + \frac{1}{2}gt^2; \quad y' = y; \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{61.04}$$

Подстановка (61.02) в (61.01) дает

$$ds^2 = \left(c + \frac{gx}{c}\right)^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{61.05}$$

Спрашивается: можно ли толковать это выражение, как квадрат интервала в некоторой *инерциальной* системе отсчета, в которой существует поле тяготения? Ответ на этот вопрос есть в то же время ответ на вопрос о справедливости принципа эквивалентности.

Чтобы получить этот ответ, произведем сравнение выражения (61.05) с вытекающим из теории тяготения приближенным выражением

$$ds^2 = (c^2 - 2U)\,dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{61.06}$$

где U есть ньютонов потенциал истинного поля тяготения.

При условии

$$|gx| \ll c^2 \tag{61.07}$$

коэффициенты при dt^2 приближенно совпадут, если мы возьмем потенциал тяготения равным

$$U = -gx. \tag{61.08}$$

*) Это преобразование указано Меллером [20].

Что касается коэффициента в пространственной части ds^2, то отличие его от единицы будет несущественным для таких интервалов, для которых величина

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \tag{61.09}$$

удовлетворяет неравенству

$$v^2 \ll c^2. \tag{61.10}$$

Значение (61.08) потенциала тяготения действительно дает, по ньютоновой механике, равноускоренное движение. В случае нулевой начальной скорости мы будем иметь постоянные значения x', y', z' и приближенно

$$x+\frac{1}{2}gt^2=\mathrm{const}, \tag{61.11}$$

что соответствует равноускоренному движению в координатах (x, t).

Произведенное нами сравнение двух выражений для квадрата интервала показывает, что ускоренно движущаяся система отсчета при отсутствии тяготения действительно представляет известную аналогию *) с инерциальной системой отсчета при наличии поля тяготения. Однако это же сравнение указывает на то, что данная аналогия далеко не полна, так что не может быть и речи о полной эквивалентности или неразличимости полей ускорения и тяготения. Рассмотренный пример вполне подтверждает формулированное выше заключение о том, что „эквивалентность" имеет место только в ограниченной области пространства и только для слабых и однородных полей и медленных движений [равенство (61.08) в соединении с неравенствами (61.07) и (61.10)].

Мы уже говорили о том, что если рассматривать всё пространство, то истинные поля тяготения можно отделить от фиктивных, вызванных ускорением.

В ньютоновой теории это можно сделать, используя предельные условия для ньютонова потенциала тяготения.

В эйнштейновой теории вопрос об отделении истинных полей тяготения от фиктивных проще всего решается в гармонических координатах (компоненты фундаментального тензора должны при этом удовлетворять предельным условиям, рассмотренным в § 54). Как будет показано в § 93, гармонические координаты определяются единственным образом, с точностью до преобразования Лоренца

*) Эту аналогию можно использовать при построении теории тяготения Возможность преобразовать выражение (61.01) к виду (61.05) дает указание на то, что ньютонов потенциал должен входить именно в коэффициент при dt^2. В этом отношении аналогия несомненно полезна. Впрочем, в § 51 мы выяснили вопрос о виде ds^2 в ньютоновом приближении, не прибегая к указанной аналогии.

Поэтому можно считать, что введение гармонических координат автоматически исключает все фиктивные поля тяготения. Так, для квадратичной формы (61.05) гармоническими координатами будут исходные переменные (61.02), в которых квадрат интервала имеет вид (61.01).

Условия гармоничности вообще не допускают тех произвольных преобразований координат [например, вида (61.02) или (61.04)], на рассмотрении которых основаны рассуждения о локальной эквивалентности. Но если даже оставить эти условия в стороне и пытаться толковать переменные (x, y, z, t) в формуле (61.05) как декартовы координаты и время, то такое толкование будет возможно только „в малом“. Если же рассматривать выражение (61.05) „в большом“, то непосредственно ясно, что такое толкование наталкивается на противоречия. Во-первых, коэффициент при dt^2 в этом выражении не удовлетворяет предельным условиям, так как обращается в бесконечность вместе с координатой x; во-вторых, этот коэффициент (а с ним и „скорость света“) обращается в нуль на некоторой плоскости $\left(x = -\frac{c^2}{g}\right)$, что недопустимо.

Еще более явное нарушение предельных условий для фундаментального тензора получается в результате преобразования (35.47), которое в ньютоновой механике означает введение вращающейся координатной системы. Подстановка выражений (35.47) в (61.01) дает

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2 (x^2 + y^2)]\, dt^2 - 2\omega (y\, dx - x\, dy)\, dt - \\ - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (61.12)$$

Здесь фундаментальный тензор не только не удовлетворяет предельным условиям, но даже нарушает, на достаточно большом расстоянии от оси вращения, неравенства, установленные в § 35. Это показывает невозможность толкования выражения (61.12) в смысле „гипотезы эквивалентности“.

В рассуждениях этого параграфа мы не пользовались общим тензорным анализом. Применение его к формулам (61.05) и (61.12) показало бы равенство нулю тензора кривизны четвертого ранга, а тем самым и отсутствие истинных полей тяготения.

В заключение заметим, что при выводе уравнений тяготения Эйнштейна *мы ускоренно движущихся систем отсчета вообще не рассматривали*, а следовательно, и *не пользовались принципом эквивалентности*. Мы пользовались законом равенства инертной и весомой массы, который является общим законом и не имеет локального характера. Что касается принципа эквивалентности, то он не составляет отдельной физической гипотезы, а содержится в гипотезе о римановом характере пространства-времени. Математическим выражением его является, как мы уже говорили, возможность введения локально-геодезической системы координат (§ 42).

§ 62. О парадоксе часов

В заключение этой главы мы рассмотрим так называемый парадокс часов. Мы остановимся на нем не потому, что здесь заключен какой-либо особо важный или трудно разрешимый вопрос, а потому, что этот парадокс широко обсуждался в литературе, причем предлагались не вполне удовлетворительные его разъяснения.

Парадокс основан на неправильном применении понятия относительного движения и на игнорировании различия между инерциальными системами отсчета и неинерциальными. Состоит он в следующем.

Представим себе часы A, неподвижные в некоторой инерциальной системе отсчета. Пусть мимо них проходят с постоянной скоростью v часы B, которые, пройдя известный путь, испытывают отрицательное ускорение, меняют знак скорости и вновь проходят со скоростью $(-v)$ мимо часов B. В моменты прохождения часов A мимо часов B (туда и обратно) возможно непосредственное сравнение их показаний (без посредства световых сигналов). Такое сравнение должно обнаружить, что отстали часы B; по крайней мере, к такому выводу приводит применение формул для собственного времени, выведенных в § 14.

Но ведь движение относительно. Значит, можно считать неподвижными часы B. Другие же часы (A) будут, при таком рассмотрении, сперва равномерно удаляться, потом равномерно приближаться к часам B, и по тем же формулам § 14, как будто, должно оказаться, что теперь отстали часы A, в противоречии с полученным ранее результатом.

Разность показаний часов, находящихся в одной точке пространства, есть факт абсолютный и объективный (т. е. ни от системы отсчета, ни от способа рассмотрения не зависящий). Поэтому любой способ рассмотрения, если только он верен, должен приводить к одному и тому же результату. Противоречие в результате показывает, что где-то в рассуждениях допущена ошибка.

Нетрудно видеть, что ошибка заключена в неучете того, что часы A и часы B находились в этом воображаемом опыте в неодинаковых физических условиях: часы A никакому ускорению не подвергались и никаких толчков не испытывали, тогда как часы B подвергались ускорению и испытали толчок, изменивший знак их скорости. Другими словами, ошибка произошла из-за того, что обе системы отсчета (связанная с часами A и связанная с часами B) в приведенных рассуждениях предполагались равноправными, чего на самом деле нет: инерциальной является только система отсчета, связанная с часами A.

Таково качественное разъяснение парадокса. Количественная теория должна позволить вычислить показания ускоренно движущихся часов. Как было уже отмечено в конце § 14, так называемое собственное время τ, определяемое уравнением

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt, \tag{62.01}$$

имеет простой физический смысл только в случае постоянной скорости v. Тогда это есть измеренная в „своей“ системе отсчета длительность локализованного процесса, связанного с движущейся точкой (показания движущихся часов). Если же скорость v переменна, то такое толкование величины (62.01) незаконно. Незаконное применение формулы (62.01) к ускоренному движению и явилось непосредственной причиной противоречия.

Чем же нужно заменить формулу (62.01) в случае ускоренного движения? Прежде всего нужно ясно себе представить, что не существует формулы, которая бы давала показания часов при произвольном ускоренном их движении. (Это обстоятельство почти всегда упускается из вида при изложении парадокса часов). В конце § 14 мы уже отмечали, что никакая теория не может, не входя в детали устройства часов, предсказать, как будут себя вести эти часы в условиях, когда они подвергаются толчкам или произвольному ускорению.

Можно, однако, ввести гипотезу, что в тех случаях, когда ускорение вызвано полем тяготения, показания часов при их свободном движении в поле тяготения выражаются формулой

$$\tau = \frac{1}{c} \int_0^t \sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}\, dt, \tag{62.02}$$

т. е. интегралом, условие максимума которого и дает уравнения свободного движения. В пользу этой гипотезы говорит то соображение, что поле тяготения, и только оно одно, обладает способностью проникать внутрь любого тела и действовать на все его части пропорционально их массе.

Если ввести эту гипотезу, то всякая возможность парадокса сама собою отпадает. В самом деле, показания часов A получатся тогда путем вычисления интеграла (62.02) вдоль траектории часов A; так же точно показания часов B получатся путем вычисления интеграла вдоль траектории часов B. Оба вычисляемые интеграла инвариантны по отношению к любой замене переменных (любому преобразованию координат и времени); пользование же разными системами отсчета (инерциальной и неинерциальной) равносильно вычислению одного и того же интеграла в разных переменных. Ясно, что несовпадение результатов при этом полностью исключается.

Заметим, что при разъяснении парадокса часов мы (в отличие от обычного рассмотрения) намеренно не пользовались „принципом эквивалентности“: ввиду приближенного характера этого принципа пользование им могло бы оставить сомнение в том, полностью ли устраняется парадокс рассуждениями, которые на этот принцип опираются.

Произведем теперь, на основе сделанной гипотезы, приближенное вычисление показаний часов, претерпевших ускорение. Мы будем пользоваться выражением для ds^2 в ньютоновом приближении, причем будем вести вычисления в инерциальной системе отсчета, в которой часы A неподвижны. Согласно формуле (51.07), мы имеем

$$\tau = \int_0^t \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right)\right\} dt. \tag{62.03}$$

Пусть U_0 есть постоянное значение U в той точке, где находятся часы A. Если часы B в первый раз проходят мимо A в момент $t = 0$, а второй раз (в обратном направлении) — в момент $t = T$, то разность показаний часов A за этот промежуток времени равна

$$\tau_A = \int_0^T \left(1 - \frac{U_0}{c^2}\right) dt = \left(1 - \frac{U_0}{c}\right) T. \tag{62.04}$$

Здесь учтено влияние потенциала тяготения на ход часов [см. формулу (51.14)]. Для разности показаний часов B за тот же промежуток времени получим выражение

$$\tau_B = \int_0^T \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right)\right\} dt. \tag{62.05}$$

Следовательно, часы B отстанут от часов A на величину

$$\tau_A - \tau_B = \frac{1}{c^2} \int_0^T \left(\frac{1}{2} v^2 + U - U_0\right) dt, \tag{62.06}$$

где интеграл взят вдоль траектории часов B. Заметим, что по закону сохранения энергии

$$\frac{1}{2} v^2 - U = \frac{1}{2} v_0^2 - U_0, \tag{62.07}$$

где v_0 есть значение скорости часов B в той точке, где $U = U_0$. Соотношение (62.07) позволяет писать формулу (62.06) в различных других видах, например в виде

$$\tau_A - \tau_B = \frac{1}{c^2} \int_0^T \left(\frac{1}{2} v_0^2 + 2U - 2U_0\right) dt. \tag{62.08}$$

Относительно потенциала U мы предположим, что в рассматриваемой области он имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &U = U_0 \quad (\text{при } x < x_1), \\ &U = U_0 + g(x_1 - x) \quad (\text{при } x > x_1). \end{aligned}\right\} \tag{62.09}$$

Пусть часы A все время находятся в начале координат, а движение часов B происходит по оси x. Координаты часов B будут

$$x = v_0 t \qquad (\text{при } t < t_1), \tag{62.10}$$

$$x = x_1 + v_0(t - t_1) - \frac{1}{2} g (t - t_1)^2 \qquad (\text{при } t_1 < t < t_2), \tag{62.11}$$

$$x = x - v_0(t - t_2) \qquad (\text{при } t > t_2). \tag{62.12}$$

Здесь t_1 и t_2 — времена прямого и обратного прохождения часов B через точку $x = x_1$. Эти времена равны

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0}; \qquad t_2 = t_1 + \frac{2v_0}{g} = t_1 + t^*, \tag{62.13}$$

где

$$t^* = \frac{2v_0}{g} \tag{62.14}$$

продолжительность равноускоренного движения. Время возвращения часов B в точку $x = 0$ равно, согласно (62.12),

$$T = t_2 + \frac{x_1}{v_0} = t_2 + t_1. \tag{62.15}$$

При вычислении интеграла удобнее пользоваться формулой (62.08), так как величина $\frac{1}{2} v_0^2$ в нем постоянна, а разность $2U - 2U_0$ отлична от нуля только в области $(t_1 < t < t_2)$, где справедлива формула (62.11). Элементарные выкладки дают, при помощи (62.14):

$$\tau_A - \tau_B = \frac{v_0^2}{c^2}\left(\frac{1}{2} T - \frac{2}{3} t^*\right). \tag{62.16}$$

Если бы мы применяли (незаконным образом) формулу (62.01), мы получили бы выражение (62.16) без члена с t^*. Этот член дает поправку на ускоренное движение. Из формулы (62.16) следует, что если продолжительность ускоренного движения равна $^3/_4\, T$, то никакого отставания часов B не получится, а при $t^* = T$ получается даже опережение. Не следует, впрочем, забывать, что формула (62.16) не является общей, а выведена в довольно частных предположениях относительно характера движения.

Вычисления произведены нами в инерциальной системе отсчета, связанной с часами A. Повторять их в координатной системе, связанной с часами B, не имеет смысла, поскольку тогда пришлось бы вычислять те же самые интегралы, только выраженные через другие переменные.

ГЛАВА VI

ЗАКОН ТЯГОТЕНИЯ И ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ

§ 63. Уравнения свободного движения материальной точки и их связь с уравнениями тяготения

В предыдущей главе мы уже пользовались предположением, что в заданном поле тяготения материальная точка движется по геодезической линии. Это предположение не является, однако, независимой гипотезой, но может рассматриваться, как следствие из уравнений тяготения, в соединении с предположением о виде тензора массы. Уравнения тяготения используются при этом лишь постольку, поскольку из них вытекают соотношения

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{63.01}$$

выражающие равенство нулю расходимости тензора массы. Уравнения движения материальной точки получаются, путем предельного перехода к случаю сосредоточенной массы, из уравнений движения сплошной среды. При этом тензор массы принимается равным

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}\rho^* u^\mu u^\nu, \tag{63.02}$$

где, как и в § 48, ρ^* есть инвариантная плотность массы, а u^ν — четырехмерная скорость. Эти величины связаны уравнением неразрывности

$$\nabla_\nu (\rho^* u^\nu) = 0. \tag{63.03}$$

Мы дадим здесь для уравнений движения материальной точки два вывода: один из них основан на вариационном начале, а другой — на непосредственном использовании уравнений (63.01).

В § 47 мы установили формулу, согласно которой вариация интеграла действия

$$S = \int c^2 \rho^* \sqrt{-g}\,(dx) \tag{63.04}$$

равна

$$\delta \int c^2 \rho^* \sqrt{-g}\,(dx) = -\int \rho^* (u^\nu \nabla_\nu u_\sigma)\,\xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx), \tag{63.05}$$

где ξ^σ — вектор бесконечно малого смещения. [Формула (63.04) отличается от (47.46) только обозначением ρ^* для инвариантной плотности]. С другой стороны, если тот же интеграл действия варьировать по величинам $g_{\mu\nu}$, то получится, согласно (48.03),

$$\delta_g \int c^2\rho^* \sqrt{-g}\,(dx) = \frac{1}{2}\int \rho^* u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\,(dx). \tag{63.06}$$

Согласно общей формуле (48.22), это соотношение показывает, что интеграл действия (63.04) действительно соответствует тензору массы (63.02).

В интеграле действия (63.04) мы можем произвести предельный переход, предположив, что инвариантная плотность ρ^* отлична от нуля только в окрестностях одной пространственной точки, причем интеграл от плотности, взятый по объему, окружающему эту точку, имеет конечное значение.

Уравнение неразрывности (63.03) может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\,\rho^* u^\nu) = 0. \tag{63.07}$$

Умножая на $dx_1\,dx_2\,dx_3$, интегрируя по указанному объему и пользуясь тем, что на его границах величина ρ^* равна нулю, получим отсюда

$$\frac{d}{dt}\int \rho^* u^0 \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 0 \tag{63.08}$$

(для наглядности мы пишем t вместо x_0). Следовательно, значение интеграла

$$\int \rho^* u^0 \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = mc \tag{63.09}$$

есть постоянная, от времени не зависящая. Но величина ρ^* отлична от нуля только в окрестностях одной точки. Поэтому множитель u^0 при ней мы можем вынести за знак интеграла с его значением в этой точке. Это значение равно

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}}, \tag{63.10}$$

где x_i есть координата материальной точки и $\dot{x}_i$ — производная от нее по времени. Пользуясь этим значением u^0, получаем

$$\int \rho^* \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = m\sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}. \tag{63.11}$$

Интеграл действия S получается отсюда умножением на $c^2\,dt$ и интегрированием по времени. Таким образом,

$$S = mc^2 \int_{t^{(0)}}^{t} \sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}\,dt = mc^2 \int d\tau. \tag{63.12}$$

Но это выражение только множителем отличается от рассмотренного в § 38 интеграла, вариация которого дает уравнения геодезической линии. Таким образом, вариационное начало

$$\delta S = 0 \tag{63.13}$$

приводит к уравнениям движения свободной материальной точки, совпадающим с уравнениями геодезической линии.

Выведем эти уравнения другим путем, исходя из равенства нулю расходимости тензора массы.

Формула (63.01) может быть подробнее написана в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{-g}\, T^{0\nu}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{-g}\, T^{i\nu}\right) + \sqrt{-g}\,\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \tag{63.14}$$

Умножая ее на $dx_1\, dx_2\, dx_3$ и интегрируя по объему, на границах которого тензор $T^{\mu\nu}$ исчезает, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int \sqrt{-g}\, T^{0\nu}\, dx_1\, dx_2 dx_3 + \int \sqrt{-g}\,\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0. \tag{63.15}$$

Сюда мы можем подставить выражения (63.02) для составляющих тензора массы. Предыдущая формула по умножении на c^2 примет вид

$$\frac{d}{dt}\int \rho^* u^0 u^{\nu} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2 dx_3 + \\ + \int \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\rho^* u^{\alpha} u^{\beta} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0. \tag{63.16}$$

Интегралы здесь могут быть вычислены при помощи того же приема, как и интеграл (63.11). Мы имеем, вследствие (63.09),

$$\int \rho^* u^0 u^{\nu} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = mcu^{\nu}, \tag{63.17}$$

$$\int \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\rho^* u^{\alpha} u^{\beta} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{mc}{u^0}\,\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}, \tag{63.18}$$

где все величины взяты в точке, в которой находится частица. Заменяя dt на $u^0\, d\tau$ и сокращая на общий множитель $\frac{mc}{u^0}$, получим из (63.16)

$$\frac{du^{\nu}}{d\tau} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = 0 \tag{63.19}$$

или

$$\frac{d^2 x_{\nu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{dx_{\alpha}}{d\tau}\frac{dx_{\beta}}{d\tau} = 0; \quad \frac{dx_{\nu}}{d\tau} = u^{\nu}. \tag{63.20}$$

Это — явная форма уравнений геодезической линии. Мы еще раз убедились, что уравнения свободного движения материальной точки совпадают с уравнениями геодезической линии. Наш вывод показывает, что эти уравнения могут быть получены непосредственно из равенства $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ путем интегрирования по объему и последующего перехода к случаю сосредоточенной массы.

Заметим, что если взять за независимую переменную не собственное время τ, а просто время $t = x_0$, и если умножить предыдущие уравнения на $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$, то они напишутся:

$$\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - \frac{dx_\nu}{dt}\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dx_\beta}{dt} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dx_\beta}{dt} = 0. \tag{63.21}$$

Уравнение, соответствующее значению $\nu = 0$, приводится к тождеству.

Стоящая в левой части уравнений движения величина

$$w^\nu = \frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \tag{63.22}$$

представляет, согласно (46.26), контравариантный вектор ускорения частицы.

Выясним, о каком ускорении здесь идет речь. При отсутствии поля тяготения величина w^ν представляла обычное ускорение: в галилеевых координатах пространственные компоненты этого вектора переходили, в нерелятивистском приближении, во вторые производные от декартовых координат частицы по времени. При наличии поля тяготения это будет уже не так. Чтобы выяснить, во что переходят в этом случае величины w^ν в нерелятивистском приближении, можно вычислить приближенные значения скобок Кристоффеля $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$, вытекающие из найденных в § 55 значений фундаментального тензора. Соответствующие вычисления удобнее отложить до § 65, а здесь мы приведем готовые результаты. Для величин $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ с нулевым верхним значком получаются значения

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \qquad \Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{63.23}$$

тогда как остальные будут малы. Из величин $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ с пространственным верхним значком наиболее важными будут

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{63.24}$$

Далее, нам нужно иметь приближенные выражения для четырехмерной скорости. Обозначая через

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \tag{63.25}$$

обыкновенную скорость, мы можем приближенно положить

$$u^i = \frac{dx_i}{d\tau} \cong v_i, \tag{63.26}$$

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} \cong 1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right). \tag{63.27}$$

Подстановка этих выражений в формулу (63.22) дает

$$w^i \cong \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{63.28}$$

$$w^0 \cong \frac{1}{c^2} v_k \left(\frac{dv_k}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x_k}\right) \tag{63.29}$$

(суммирование по k от 1 до 3 здесь подразумевается).

Из этих формул видно, что пространственные компоненты вектора w^ν представляют ускорение частицы *за вычетом ускорения силы тяжести*, а нулевая компонента пропорциональна производимой в единицу времени над частицей работе всех сил *за вычетом силы тяжести*.

Таким образом, при наличии поля тяготения четырехмерный вектор ускорения w^ν соответствует ускорению за вычетом ускорения силы тяжести. Понятно поэтому, что при свободном движении частицы в поле силы тяжести этот вектор равен нулю.

§ 64. Общая постановка задачи о движении системы масс

Общая характеристика интересующей нас задачи была уже дана в § 54. Мы рассматриваем здесь задачу астрономического типа, т. е. задачу о движении небесных тел в свободном пространстве. Как известно из астрономических наблюдений, в мировом пространстве масса распределена далеко не равномерно: подавляющая ее часть сконцентрирована в виде отдельных небесных тел, находящихся на больших расстояниях друг от друга. Сообразно этому, мы будем считать, что компоненты тензора массы равны нулю во всем пространстве, кроме некоторых отдельных областей, размеры которых малы по сравнению с их расстояниями; каждая такая область соответствует небесному телу.

Внутри каждого тела тензор массы должен, во-первых, соответствовать принятой физической модели этого тела (газ, жидкость, упругое тело и т. п.) и, во-вторых, должен удовлетворять условию

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{64.01}$$

выражающему равенство нулю его расходимости. Соответствие физической модели означает, что компоненты тензора массы определенным образом выражаются через функции состояния физической системы, образующей данное тело [плотность, скорость, давление и другие величины, см., например, (55.02)].

Кроме физических свойств данного тела, вид тензора массы, как и всякого тензора, будет зависеть также от метрики. Помимо функций состояния в собственном смысле, компоненты тензора массы будут поэтому содержать также фундаментальный тензор. Фундаментальный тензор и его производные входят также в выражение (64.01) для расходимости.

Таким образом, для того чтобы написать тензор массы, уже нужно знать метрику. Но метрика определяется из уравнений Эйнштейна, в правой части которых стоит тензор массы. Отсюда ясно, что определение тензора массы и фундаментального тензора может быть произведено только совместно.

Сравним рассматриваемую здесь задачу с теми, какие встречаются в теории тяготения Ньютона. Там обычно задача ставится так, что плотность масс предполагается известной, а по ней определяется потенциал тяготения. Но в ньютоновой теории есть и другие, более сложные задачи, в которых потенциал должен определяться одновременно с плотностью. Такова, например, знаменитая задача о фигурах равновесия вращающейся жидкости — задача, которой занимались у нас Ляпунов, а за границей Джинс и Пуанкаре, и строгое решение которой было дано Ляпуновым в его посмертном мемуаре [21, 22]. Занимающая нас задача эйнштейновой теории напоминает по своему характеру задачу Ляпунова, только вместо двух скалярных величин (ньютонова потенциала и плотности) определению теперь подлежат два тензора: фундаментальный тензор и тензор массы. Кроме того, в нашем случае речь идет не о равновесии, а о движении. Заметим, что основное уравнение задачи Ляпунова встретится и у нас (§ 73).

Наша задача облегчается, прежде всего, тем, что метрика всюду мало отличается от евклидовой; о малости отклонений дает представление табличка, приведенная в § 58. Другим упрощающим обстоятельством является то, что на сколько-нибудь значительном расстоянии от каждого тела метрика зависит не от деталей его внутренней структуры, а от некоторых его суммарных характеристик. Таковыми являются: полная масса данного тела, его моменты инерции, положение и скорость его центра тяжести и другие. От этих величин зависит и ньютонов потенциал тела.

Для решения уравнений Эйнштейна мы будем пользоваться приближенным методом, который представляет развитие способа вычислений, примененного в § 55. Этот способ основан на разложении всех искомых функций по обратным степеням скорости света. Такому формальному разложению соответствует фактически разложение по степеням некоторых безразмерных величин. Таковыми являются величины U/c^2 и v^2/c^2, где U — ньютонов потенциал, а v^2 — квадрат некоторой скорости (скорости одного из тел). Для систем, к которым применима теорема вириала, обе эти величины (U и v^2) будут одного порядка, скажем, порядка q^2, где q — некоторый параметр, имеющий размерность скорости (этим параметром мы уже пользовались в §§ 55 и 58). В качестве безразмерного параметра, по которому ведется разложение, можно тогда взять величину q^2/c^2.

Решая волновое уравнение путем введения поправок на запаздывание, мы тем самым предполагаем, что размеры системы малы по сравнению с длиной излучаемых волн (в данном случае, гравитационных). Это предположение не является независимым от предыдущих. В самом деле, обозначив через ω угловую частоту обращения планеты и через R радиус ее орбиты, мы можем написать условие малости размеров системы в виде $R \ll c/\omega$, так как c/ω есть деленная на 2π длина гравитационной волны. С другой стороны, условие малости скорости планеты $v = R\omega$ по сравнению со скоростью света напишется в виде $R\omega \ll c$, а это неравенство совпадает с предыдущим.

Как мы уже отмечали в конце § 54, нас интересуют „квази-стационарные" состояния гравитационного поля, т. е. такие, которые устанавливаются после многих обращений планет. Решения волнового уравнения, получаемые путем введения поправок на запаздывание, условию квази-стационарности удовлетворяют.

Мы уже упоминали о том, что в большинстве астрономических задач расстояния между небесными телами весьма велики по сравнению с их линейными размерами. Если R есть длина, характеризующая порядок величины расстояний, а L — длина, характеризующая линейные размеры тел, то имеет место неравенство

$$L \ll R. \tag{64.02}$$

Использование этого неравенства вносит значительные упрощения в вычисление потенциала тяготения, а также фундаментального тензора, вне масс: как мы уже говорили, эти величины не будут тогда зависеть от деталей внутренней структуры тел. Поэтому мы будем пользоваться также и неравенством (64.02), хотя оно является менее существенным, чем неравенства $v^2 \ll c^2$ и $U \ll c^2$, на которых основан наш метод решения уравнений Эйнштейна.

Заметим, что на поверхности и внутри тела, где потенциал тяготения наибольший, будет, по порядку величины,

$$U/c^2 = \alpha/L, \tag{64.03}$$

где α — гравитационный радиус тела (см. табличку в § 58). Поэтому оба используемых неравенства можно записать в виде

$$\alpha \ll L \ll R. \tag{64.04}$$

Наша задача состоит в определении фундаментального тензора и тензора массы. Зная компоненты тензора массы в функции координат и времени, мы тем самым будем знать и движение массы, так как массы занимают области, в которых тензор массы отличен от нуля. Существенно отметить, что движение этих областей не может быть предписано наперед; закон движения вытекает из самих уравнений тяготения.

В результате решения нашей задачи мы, во-первых, получим для тензора массы и для фундаментального тензора приближенные выражения, которые будут содержать некоторые неизвестные функции. Во-вторых, мы получим для этих неизвестных функций уравнения, которые позволяют их определить из начальных условий (уравнения движения).

Выбор упомянутых здесь неизвестных функций подсказывается ходом решения задачи. Естественным образом входят в решение те величины, которые применяются уже в ньютоновой механике. Таковы, например, координаты центра тяжести каждого из тел, его полная масса, момент количества движения, моменты инерции и другие интегральные характеристики тела.

Для всех этих величин получаются уравнения движения, которые в первом приближении совпадают с ньютоновыми, а в следующем приближении отличаются от ньютоновых малыми поправками. Для нас представляют интерес как эти поправки, так и выражения для фундаментального тензора и для других величин эйнштейновской теории через ньютоновы величины.

§ 65. Расходимость тензора массы во втором приближении

Задачу совместного определения тензора массы и фундаментального тензора мы будем решать последовательными этапами, исходя из рассуждений § 55. Напомним ход этих рассуждений. В исходном приближении метрика принималась евклидовой, что соответствует полному пренебрежению силами тяготения. В этом приближении можно было наперед указать лишь компоненты T^{00} и T^{0i} тензора массы. Согласно формуле (55.03), в галилеевых координатах эти компоненты равны

$$T^{00} = \frac{1}{c^2}\rho; \qquad T^{0i} = \frac{1}{c^2}\rho v_i, \tag{65.01}$$

где ρ — плотность и v_i — скорость вещества в данной точке, причем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{65.02}$$

Пространственные компоненты (T^{ik}) в этом приближении не определялись; предполагалось только, что их порядок величины такой же, как в отсутствии сил тяготения.

Этих предположений относительно тензора массы оказалось достаточно, чтобы определить метрику в первом приближении. Согласно формулам (55.31), мы имеем

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= c^2 - 2U, \\ g_{0i} &= \frac{4}{c^2}U_i, \\ g_{ik} &= -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{65.03}$$

где U — ньютонов потенциал тяготения, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho, \tag{65.04}$$

а U_i — вектор-потенциал тяготения, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i. \tag{65.05}$$

Следует помнить, что потенциалы U и U_i связаны с плотностью массы ρ и потока массы ρv_i не-локальным образом: значения потенциалов внутри данного тела зависят от распределения плотности во всем пространстве, а не только внутри того же тела.

В § 55 приведены также формулы для контравариантных компонент фундаментального тензора, а именно:

$$\left.\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{c^2}\left(1+\frac{2U}{c^2}\right), \\ g^{0i} &= \frac{4}{c^2}U_i, \\ g^{ik} &= -\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik} \end{aligned}\right\} \tag{65.06}$$

При этом, согласно (55.37),

$$\sqrt{-g} = c + \frac{2U}{c}. \tag{65.07}$$

Знание метрики в том приближении, какое дается предыдущими формулами, позволяет сделать следующий шаг в построении тензора массы. Для этого мы должны прежде всего более точно написать выражение для его расходимости, что и будет задачей этого параграфа.

Согласно формуле (41.24), общее выражение для расходимости симметричного тензора имеет вид

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + y_\nu T^{\mu\nu}, \tag{65.08}$$

где для краткости положено

$$y_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\lg\sqrt{-g}) = \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}. \tag{65.09}$$

Порядок величины составляющих тензора массы, во всяком случае, правильно дается формулами (55.02). Мы будем иметь

$$T^{00} = O\left(\frac{\rho}{c^2}\right); \quad T^{0i} = O\left(\frac{\rho}{c^2}q\right); \quad T^{ik} = O\left(\frac{\rho}{c^2}q^2\right), \tag{65.10}$$

где q есть уже применявшийся нами параметр, характеризующий порядок величины скорости.

Рассмотрим нулевую компоненту расходимости тензора массы. Она дается выражением (65.08) при $\mu = 0$. В исходном приближении мы пренебрегали здесь всеми членами, кроме производных. Чтобы сделать следующий шаг, мы должны знать величины $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ и y_ν с точностью до членов порядка $1/c^2$ включительно. Что касается пространственных компонент расходимости, то в исходном приближении мы ими пренебрегали вовсе. Чтобы учесть их хотя бы в первом приближении, мы должны теперь найти в $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ главный член, не содержащий множителя $1/c^2$. Для определения y_ν, $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ и $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ с указанной точностью достаточно приближения, даваемого формулами (65.03)—(65.07).

Из формул (65.07) и (65.09) получаем без труда

$$y_0 = \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \quad y_i = \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{65.11}$$

Вычисляя, далее, скобки Кристоффеля по известным формулам

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\alpha\beta}, \tag{65.12}$$

где

$$\Gamma_{\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\right), \tag{65.13}$$

легко убеждаемся, что в последней формуле, в данном приближении, всеми членами, содержащими множитель $1/c^2$, можно пренебречь, после чего останется

$$\Gamma_{0,00} = -\frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma_{0,0i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{65.14}$$

а также

$$\Gamma_{i,00} = \frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{65.15}$$

Отсюда для $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ получаем:

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{65.16}$$

тогда как величины Γ^0_{ik} будут более высокого порядка малости, а именно

$$\Gamma^0_{ik} = O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{65.17}$$

Из скобок Кристоффеля с пространственным верхним значком главными будут

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{65.18}$$

Что касается остальных, то они будут малыми величинами, а именно

$$\Gamma^i_{0k} = O\left(\frac{1}{c^2}\right); \quad \Gamma^i_{kl} = O\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{65.19}$$

Найденные значения скобок Кристоффеля позволяют нам написать выражение для расходимости тензора массы.

Формулу (65.08) для $\mu = 0$ можно написать подробнее в виде

$$\nabla_\nu T^{0\nu} = \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i} + (\Gamma^0_{00} + y_0) T^{00} + \\ + (2\Gamma^0_{0i} + y_i) T^{0i} + \Gamma^0_{ik} T^{ik}. \quad (65.20)$$

Здесь, согласно (65.11) и (65.16), коэффициент при T^{00} равен

$$\Gamma^0_{00} + y_0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}. \quad (65.21)$$

Что касается коэффициента при T^{0i}, то он оказывается исчезающе малым, а именно

$$2\Gamma^0_{0i} + y_i = O\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (65.22)$$

Согласно (65.17), того же порядка будет и коэффициент при T^{ik}.

Таким образом, в нашем приближении формула (65.20) принимает вид:

$$\nabla_\nu T^{0\nu} = \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t} T^{00}. \quad (65.23)$$

Для пространственных компонент расходимости мы получаем из (65.08) при $\mu = i$

$$\nabla_\nu T^{i\nu} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} + \Gamma^i_{00} T^{00} + \\ + 2\Gamma^i_{0k} T^{0k} + y_0 T^{0i} + \Gamma^i_{kl} T^{kl} + y_k T^{ik}. \quad (65.24)$$

Как видно из приведенных выше оценок, здесь все коэффициенты во второй строке будут содержать множитель $1/c^2$, так что члены во второй строке можно отбросить. Заменяя Γ^0_{00} его выражением (65.18), мы получим тогда

$$\nabla_\nu T^{i\nu} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial x_i} T^{00}. \quad (65.25)$$

Таким образом, учитывая отклонения метрики от евклидовой, или, что то же, учитывая силы тяготения (то и другое в первом приближении), мы должны писать условие равенства нулю расходимости тензора массы в виде уравнений:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t} T^{00} = 0, \quad (65.26)$$

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial x_i} T^{00} = 0. \quad (65.27)$$

§ 66. Приближенный вид тензора массы для упругого тела при учете поля тяготения

Приближенные выражения для тензора массы упругого тела, без учета сил тяготения, были получены нами в § 32 из рассмотрения скаляра и вектора Умова (плотности и потока энергии). В принятых нами теперь обозначениях (в которых $x_0 = t$) эти выражения были затем выписаны в § 55. Согласно формуле (55.02), они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} c^2T^{00} &= \rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi\right)\right\},\\ c^2T^{0i} &= \rho v_i\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi\right)\right\}-\frac{1}{c^2}p_{ik}v_k,\\ c^2T^{ik} &= \rho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{66.01}$$

Напомним, что здесь p_{ik} есть трехмерный тензор упругих напряжений, а Π — упругая энергия единицы массы тела. Эти величины удовлетворяют, согласно (30.08), соотношению

$$\rho\frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{2}p_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{66.02}$$

Нам надлежит теперь обобщить выражения для тензора массы, приняв во внимание поле тяготения. По теории Ньютона, взятый с обратным знаком ньютонов потенциал есть в то же время потенциальная энергия частицы единичной массы, находящейся в данном поле тяготения. Поэтому следует ожидать, что надлежащие выражения для плотности и потока энергии получатся, если в формулах (30.14) и (30.15) для скаляра и вектора Умова добавить члены $(-\rho U)$ и $(-\rho v_i U)$. Это дает

$$S = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho(\Pi - U), \tag{66.03}$$

$$S_i = v_i\left\{\frac{1}{2}\rho v^2+\rho(\Pi-U)\right\} - p_{ik}v_k. \tag{66.04}$$

Компоненты T^{00} и T^{0i} тензора массы получатся по формулам:

$$c^2T^{00} = \rho + \frac{1}{c^2}S, \tag{66.05}$$

$$c^2T^{0i} = \rho v_i + \frac{1}{c^2}S_i. \tag{66.06}$$

Окончательно мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} c^2T^{00} &= \rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)\right\},\\ c^2T^{0i} &= \rho v_i\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)\right\}-\frac{1}{c^2}p_{ik}v_k,\\ c^2T^{ik} &= \rho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{66.07}$$

Если наши рассуждения верны, то эти выражения должны, в требуемом приближении, удовлетворять выведенным в конце предыдущего параграфа уравнениям, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}T^{00}=0,\\ \frac{\partial T^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}-\frac{\partial U}{\partial x_i}T^{00}=0.\end{aligned}\right\} \tag{66.08}$$

Эти уравнения должны удовлетворяться в силу уравнений движения для величин, входящих в тензор массы. Мы имеем, во-первых, уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}=0 \tag{66.09}$$

и, во-вторых, уравнения движения упругого тела в поле тяготения с ускорением $\frac{\partial U}{\partial x_i}$:

$$\rho\frac{dv_i}{dt}-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \tag{66.10}$$

Кроме того, имеет место соотношение (66.02) между тензором напряжений и упругой потенциальной энергией. Используя (66.09), (66.10) и (66.02), получаем для скаляра и вектора Умова соотношение

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S_i}{\partial x_i}=-\rho\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{66.11}$$

откуда, после применения (66.09),

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k}=-\frac{1}{c^4}\rho\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{66.12}$$

Вследствие того, что приближенно $\rho=c^2T^{00}$, уравнение (66.12) в должном приближении совпадает с первым из уравнений (66.08). Что касается остальных уравнений (66.08), то, по умножении на c^2, они приближенно совпадут с уравнениями движения (66.10), написанными в форме

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k}-\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}=0 \tag{66.13}$$

(в выражениях T^{i0} и T^{00} здесь достаточно взять главные члены).

Таким образом, уравнения (66.08), выражающие равенство нулю расходимости тензора массы с учетом неевклидовости, действительно будут приближенно выполнены, если взять в качестве тензора массы величины (66.07).

В формулах (66.07) плотность ρ удовлетворяет уравнению неразрывности (66.09). Соответствующее общековариантное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,\rho^* u^\alpha\right)=0, \tag{66.14}$$

где ρ^* — инвариантная плотность и u^α — четырехмерная скорость. Чтобы оба выражения [(66.09) и (66.14)] совпадали, мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\rho^* u^0, \\ \rho v_i &= \frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\rho^* u^i \end{aligned}\right\} \tag{66.15}$$

(множитель $\frac{1}{c}$ добавлен для того, чтобы ρ^* приближенно равнялось ρ). Имея в виду, что, согласно (65.07) и (63.27),

$$\frac{1}{c}\sqrt{-g} = 1 + \frac{2U}{c^2}; \quad u^0 = 1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right), \tag{66.16}$$

мы получим приближенно

$$\rho^* = \rho\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + 3U\right)\right\}. \tag{66.17}$$

Формулы (66.07) позволяют написать выражение для инварианта тензора массы. Вводя давление p по формуле

$$p = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}), \tag{66.18}$$

мы будем иметь

$$T = \rho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(-\frac{1}{2}v^2 + \Pi - 3U\right)\right\} - \frac{3}{c^2}p \tag{66.19}$$

и, используя формулу (66.17) для ρ^*,

$$T = \rho^*\left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right) - \frac{3}{c^2}p. \tag{66.20}$$

Последнее выражение совпадает с (32.30).

§ 67. Приближенные выражения для скобок Кристоффеля и для некоторых других величин

Для того чтобы сделать следующий шаг в определении фундаментального тензора, мы должны продолжить вычисления § 55. Так как мы ведем все наши вычисления в гармонических координатах, удобно рассматривать в качестве неизвестных функций умноженные на $\sqrt{-g}$ контравариантные компоненты фундаментального тензора, т. е. величины

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}. \tag{67.01}$$

Удобство применения этих величин состоит в том, что выраженное через них условие гармоничности (55.39) принимает простой вид:

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0, \tag{67.02}$$

так что оно является *линейным* относительно неизвестных функций. Дальнейшим преимуществом такого выбора неизвестных функций является то, что пространственные компоненты $\mathfrak{g}^{ik}$ весьма мало отличаются от постоянных. Наконец, весьма удобным является то обстоятельство, что в левую часть каждого из уравнений тяготения входит оператор Даламбера от соответственной компоненты $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$; таким образом, каждая компонента $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ в основном связана только с одной (одноименной) компонентой тензора массы.

В § 55 мы нашли для величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ приближенные выражения [формулы (55.38)]:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{4}{c^3} U_i \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{67.03}$$

где U — ньютонов потенциал, а U_i — вектор-потенциал тяготения. Мы уточним теперь эти выражения, выписав дальнейшие члены разложения по обратным степеням скорости света. Положим

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3} + \frac{4S}{c^5}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5}, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{4S_{ik}}{c^3}. \end{aligned}\right\} \tag{67.04}$$

При помощи этих выражений мы можем вычислять скобки Кристоффеля и другие величины, входящие в уравнения тяготения.

Начнем с вычисления определителя g. Как легко проверить [см. формулу (Б.67)], этот определитель равен определителю из $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. Формулы (67.04) дают

$$g = -c^2\left(1 + \frac{4U}{c^2} + \frac{4S - 4S_{kk}}{c^4}\right). \tag{67.05}$$

Здесь мы положили, в соответствии с принятым условием для суммирования по пространственным значкам,

$$S_{kk} = \sum_{k=1}^{3} S_{kk} = S_{11} + S_{22} + S_{33}. \tag{67.06}$$

Извлекая квадратный корень, получим также

$$\sqrt{-g} = c\left(1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{2S - 2S_{kk} - 2U^2}{c^4}\right). \tag{67.07}$$

Введем особое обозначение для корня четвертой степени

$$\sqrt[4]{-\frac{g}{c^2}}=f. \tag{67.08}$$

Согласно (67.06), эта величина равна

$$f=1+\frac{U}{c^2}+\frac{1}{c^4}\left(S-S_{kk}-\frac{3}{2}U^2\right). \tag{67.09}$$

Величина f приближенно удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, которое будет выведено в следующем параграфе.

Из (67.04) и (67.07) получаем для c^2g^{00} выражение

$$c^2g^{00}=1+\frac{2U}{c^2}+\frac{2S+2S_{kk}-2U^2}{c^4}. \tag{67.10}$$

Если мы положим

$$U^*=U+\frac{1}{c^2}(S+S_{kk}-2U^2), \tag{67.11}$$

мы будем иметь с той же точностью

$$c^2g^{00}=\frac{c^2+U^*}{c^2-U^*}, \tag{67.12}$$

а также

$$\frac{1}{c^2}g_{00}=\frac{c^2-U^*}{c^2+U^*}. \tag{67.13}$$

Величина U^* встретится нам в дальнейшем.

Переходим к вычислению введенных в Добавлении Б величин

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta}=\frac{1}{2g}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\rho}+\mathfrak{g}^{\beta\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\rho}-\mathfrak{g}^{\mu\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho}\right), \tag{67.14}$$

связанных со скобками Кристоффеля. Используя выражения (67.04) и (67.05), получаем следующую таблицу:

$$\left.\begin{aligned}
\Pi^{0,00}&=-\frac{2}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t},\\
\Pi^{0,0l}&=\frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_l},\\
\Pi^{0,kl}&=\frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l}+\frac{\partial U_l}{\partial x_k}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{67.15}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Pi^{i,00}&=-\frac{2}{c^4}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-4U\frac{\partial U}{\partial x_i}+2\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\right\},\\
\Pi^{i,k0}&=\frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right),\\
\Pi^{i,kl}&=O\left(\frac{1}{c^4}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{67.16}$$

Отсюда, спуская второй и третий верхние значки, получаем величины $\Pi^{\mu}_{\alpha\beta}$. Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} \Pi^0_{00} &= -\frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}, \\ \Pi^0_{0l} &= -\frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_l}, \\ \Pi^0_{kl} &= O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{67.17}$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi^i_{00} &= -2\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 8U\frac{\partial U}{\partial x_i} + 2\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\right\}, \\ \Pi^i_{k0} &= -\frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right), \\ \Pi^i_{kl} &= O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{67.18}$$

При вычислении Π^i_{00} потребовалось значение $g_{00} = c^2 - 2U$; при вычислении остальных величин достаточно было галилеевых значений фундаментального тензора. В формулах для $\Pi^{\mu}_{\alpha\beta}$ мы ограничились членами порядка $1/c^2$.

Для вычисления скобок Кристоффеля необходимо знать, помимо величин $\Pi^{\mu}_{\alpha\beta}$, также величины $\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta}$, определяемые, согласно формуле

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(y_\alpha\delta^{\mu}_{\beta} + y_\beta\delta^{\mu}_{\alpha} - y^{\mu}g_{\alpha\beta}\right), \tag{67.19}$$

где

$$y_\alpha = \frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}, \quad y^{\mu} = g^{\mu\alpha}y_\alpha \tag{67.20}$$

[см. Добавление Б]. Выпишем приближенные значения величин y_α. Дифференцируя (67.05), получаем

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \frac{2}{c^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 4U\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}\right)\right\}, \\ y_0 &= \frac{2}{c^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - 4U\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial S_{kk}}{\partial t}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{67.21}$$

Для величин y^{μ} с верхними значками получаем, ограничиваясь членами порядка не выше $1/c^4$, следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} y^i &= -\frac{2}{c^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 6U\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}\right)\right\}, \\ y^0 &= \frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{67.22}$$

Скобки Кристоффеля выражаются через вычисленные величины по формуле

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Pi^{\mu}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\mu}_{\alpha\beta}. \tag{67.23}$$

Если ограничиться членами порядка не выше $1/c^2$, то при $\mu = 0$ мы будем иметь, как и в приближении (65.16),

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad \Gamma^0_{ik} = O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{67.24}$$

тогда как при $\mu = i$ мы получаем более точные [сравнтельно с (65.18) и (65.19)] выражения:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^i_{00} &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i} - 8U\frac{\partial U}{\partial x_i} + 4\frac{\partial U_i}{\partial t}\right), \\ \Gamma^i_{0k} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\delta_{ik} - \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right), \\ \Gamma^i_{kl} &= \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_l}\delta_{ik} + \frac{\partial U}{\partial x_k}\delta_{il} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\delta_{kl}\right). \end{aligned}\right\} \tag{67.25}$$

В приближенных вычислениях удобно пользоваться формулами, преобразованными к такому виду, чтобы в них входили величины $\Pi^{\mu}_{\alpha\beta}$, а не $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$. Преимущество первых величин перед последними видно из сравнения формул (67.18) с формулами (67.25). Эти формулы показывают, что величинами Π^i_{kl} можно пренебрегать, тогда как величины Γ^i_{kl} приходится учитывать.

В Добавлении Б получена для тензора Эйнштейна формула, преобразованная к указанному виду, а именно формула (Б.87). Эта формула содержит функцию Лагранжа, которая, согласно (Б.95), равна

$$L = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}y_\nu y^\nu. \tag{67.26}$$

Найдем приближенное значение этого выражения. Из формул (67.21) и (67.22) получаем

$$\sqrt{-g}\,y_\alpha y^\alpha = \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \frac{4}{c^3}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial (S - S_{kk})}{\partial x_i}\right)^2. \tag{67.27}$$

С другой стороны, формулы (67.17) и (67.18) в соединении с исходными выражениями (67.04) для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ дают:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Pi^{\rho}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} &= \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{16}{c^5}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t} + \\ &+ \frac{4}{c^3}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2. \end{aligned} \tag{67.28}$$

Складывая с этим равенством деленное на 2 предыдущее равенство, получаем для умноженной на $\sqrt{-g}$ функции Лагранжа выражение:

$$\begin{aligned} L\sqrt{-g} &= \frac{2}{c^3}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}\right)\right] + \\ &+ \frac{6}{c^5}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{16}{c^5}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t} - \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2. \end{aligned} \tag{67.29}$$

Вводя по формуле (67.11) величину U^*, можно предыдущее выражение написать в виде

$$L\sqrt{-g}=\frac{2}{c^3}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\right)^2+\frac{6}{c^5}\left(\frac{\partial U^*}{\partial t}\right)^2+\frac{16}{c^5}\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t}-\frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2. \quad (67.30)$$

В поправочных членах мы заменили здесь U на U^*. Последняя формула замечательна тем, что правая часть ее представляет однородную квадратичную функцию, с *постоянными* коэффициентами, от первых производных *четырех* величин U^* и U_i.

Из сравнения формул (67.27) и (67.29) видно, что сумма

$$\sqrt{-g}\left(L+\frac{1}{2}y_\alpha y^\alpha\right)=\frac{8}{c^5}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+2\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right\} \quad (67.31)$$

будет более высокого порядка малости, чем величины (67.27) и (67.29) в отдельности. Это замечание позволяет найти весьма простое выражение для инварианта кривизны R. Согласно формуле (Б.49), мы имеем, в гармонических координатах

$$R=g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-L. \quad (67.32)$$

Пользуясь обозначением (67.08), можем написать

$$\sqrt{-g}=c\cdot f^2, \quad (67.33)$$

после чего получим

$$R=\frac{2}{f}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\frac{2}{f^2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\beta}-L. \quad (67.34)$$

Но мы имеем

$$y_\alpha=\frac{2}{f}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}. \quad (67.35)$$

Поэтому

$$R=\frac{2}{cf^3}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\left(\frac{1}{2}y_\alpha y^\alpha+L\right). \quad (67.36)$$

Перейдем теперь к приближенным формулам. Согласно (67.31), величина $\left(\frac{1}{2}y_\alpha y^\alpha+L\right)$ будет шестого порядка относительно $1/c$. Отбрасывая величины шестого порядка, мы можем заменить величины $\mathfrak{g}^{\beta\alpha}$ их галилеевыми значениями. Это дает для инварианта кривизны R весьма простое приближенное выражение

$$R=\frac{2}{f^3}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\Delta f\right), \quad (67.37)$$

где Δ — оператор Лапласа с евклидовыми коэффициентами.

§ 68. Приближенная форма уравнений тяготения

Вычисления предыдущего параграфа позволяют нам написать левую часть уравнений тяготения Эйнштейна

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\frac{8\pi\gamma}{c^2}T^{\mu\nu} \tag{68.01}$$

в том приближении, какое соответствует принятой точности. Выпишем сперва значение левой части без пренебрежений. Согласно формуле (Б.87), мы имеем

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=\frac{1}{2g}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\Pi^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}y^{\mu}y^{\nu}+$$
$$+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}L+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}B-B^{\mu\nu}. \tag{68.02}$$

Здесь L есть функция Лагранжа:

$$L=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}+\frac{1}{2}y_\nu y^\nu, \tag{68.03}$$

уже встречавшаяся в предыдущем параграфе. Величины $B^{\mu\nu}$, согласно (Б.85), определены формулами

$$B^{\mu\nu}=\Gamma^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(y^{\mu}\Gamma^{\nu}+y^{\nu}\Gamma^{\mu})=$$
$$=\frac{1}{2}(\nabla^{\mu}+y^{\mu})\Gamma^{\nu}+\frac{1}{2}(\nabla^{\nu}+y^{\nu})\Gamma^{\mu}, \tag{68.04}$$

где Γ^ν — введенные в § 41 и в § 53 величины:

$$\Gamma^{\nu}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu}. \tag{68.05}$$

Величина B есть составленный из $B^{\mu\nu}$ „квази-инвариант“

$$B=g_{\mu\nu}B^{\mu\nu}=(\nabla_\nu+y_\nu)\Gamma^{\nu} \tag{68.06}$$

(это не есть настоящий инвариант, поскольку $B^{\mu\nu}$ не есть тензор).

В гармонической системе координат величины Γ^ν, а следовательно, и $\Gamma^{\mu\nu}$, а также $B^{\mu\nu}$ и B, исчезают.

Заметим, что пока в левой части уравнений Эйнштейна (68.01) стоит полное выражение (68.02) для консервативного тензора, равенство

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0 \tag{68.07}$$

представляет следствие самих уравнений. Если же мы в консервативном тензоре с самого начала не будем писать членов $B^{\mu\nu}$ и B, то равенство (68.07) будет выполняться лишь поскольку выполняется условие $\Gamma^\nu = 0$.

Переходя к приближенной форме уравнений Эйнштейна, рассмотрим сперва члены с вторыми производными. Используя выражения (67.04), мы будем иметь:

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = -c\,\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{4}{c^3}\left(S_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k} + 2U_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial t} + U\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right). \tag{68.08}$$

Здесь главные члены дают умноженный на c евклидов оператор Даламбера, тогда как члены с переменными коэффициентами представляют поправки, которыми, в рассматриваемом приближении, можно пренебречь. Рассмотрим подробнее порядок величины этих поправок. В выражение (68.02) для тензора Эйнштейна входит величина (68.08), деленная на $2g$, причем φ есть соответствующая компонента $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. Производные от φ будут третьего порядка, а так как приближенно $g = -c^2$, то деленные на $2g$ поправочные члены в (68.08) будут восьмого порядка относительно $1/c$. Пренебрегая величинами такого порядка, мы должны вычислять и все другие входящие в (68.02) величины с соответствующей точностью.

Чтобы освободиться от величины g в знаменателе, мы будем вычислять не самый тензор Эйнштейна, а этот тензор, умноженный на близкий к единице множитель $(-g/c^2)$. Члены со вторыми производными будут тогда, с требуемой точностью,

$$-\frac{1}{2c^2}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = \frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial t^2}. \tag{68.09}$$

Чтобы получить члены с первыми производными, мы найдем сперва при помощи формул (67.15)—(67.18) величины:

$$\left(-\frac{g}{c^2}\right)\Pi^{0,\alpha\beta}\Pi^0_{\alpha\beta} = -\frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial x_s}\right)^2, \tag{68.10}$$

$$\left(-\frac{g}{c^2}\right)\Pi^{0,\alpha\beta}\Pi^i_{\alpha\beta} = \frac{4}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_s}, \tag{68.11}$$

$$\left(-\frac{g}{c^2}\right)\Pi^{i,\alpha\beta}\Pi^k_{\alpha\beta} =$$

$$= \frac{4}{c^4}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial t}\right) -$$
$$- \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_k}\right). \tag{68.12}$$

В формулах (68.10) и (68.11) можно было бы не писать множителей $(-g/c^2)$, так как в данном приближении их можно заменить на единицу.

Используя, далее, выражения (67.22) для y^α и вводя обозначение

$$N^{\mu\nu}=\left(-\frac{g}{c^2}\right)\left\{\Pi^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}y^\mu y^\nu+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}L\right\}, \tag{68.13}$$

мы получим

$$N^{00}=-\frac{7}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial x_s}\right)^2, \tag{68.14}$$

$$N^{0i}=\frac{6}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s}-\frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_s}, \tag{68.15}$$

$$N^{ik}=\frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_k}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial t}\right)-$$
$$-\frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s}-\frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_s}-\frac{\partial U_s}{\partial x_k}\right)-\frac{1}{2}\delta_{ik}\frac{\sqrt{-g}}{c}L, \tag{68.16}$$

где

$$\frac{1}{c}\sqrt{-g}L=\frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_s}\right)^2+\frac{6}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\frac{16}{c^6}\frac{\partial U}{\partial x_s}\frac{\partial U_s}{\partial t}-$$
$$-\frac{4}{c^6}\left(\frac{\partial U_s}{\partial x_r}-\frac{\partial U_r}{\partial x_s}\right)^2, \tag{68.17}$$

и U^* имеет значение (67.11). Поскольку величина U входит здесь в члены шестого порядка, мы можем заменить ее на U^*, как это сделано в (67.30). Тогда все величины $N^{\mu\nu}$ будут содержать первые производные только от четырех величин U^*, U_s, причем все $N^{\mu\nu}$ будут однородными квадратичными функциями от первых производных с *постоянными* коэффициентами. Это представляет весьма большое упрощение точных формул (68.13).

При помощи найденных выражений мы можем сразу написать приближенные уравнения Эйнштейна Мы будем иметь:

$$\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)=$$
$$=\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}-\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial t^2}+N^{\mu\nu}=\frac{8\pi\gamma g}{c^4}T^{\mu\nu}, \tag{68.18}$$

где величины $N^{\mu\nu}$ имеют значения (68.14)—(68.16).

Чтобы применять формулу (68.18) к определению величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, нужно прежде всего иметь значения входящих в $N^{\mu\nu}$ величин U^*, U_i с требуемою точностью.

Что касается величин U_i, то они входят в выражения (68.14)—(68.16) только в члены шестого порядка; поэтому достаточно знать их с той точностью, с какой они определены в § 55. Соответствующие формулы приведены также в § 65. [Эти формулы получаются и из уравнения (68.18), написанного для $\mu=0$, $\nu=i$, если пренебречь там величиной N^{0i} и второй производной по времени, заменить g на $-c^2$, взять в T^{0i} главный член и выразить $\mathfrak{g}^{0i}$ через U_i]. Мы имеем, согласно (65.05):

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i. \tag{68.19}$$

Величина же U^* входит в члены не шестого, а четвертого порядка, и ее нужно знать с большей точностью. По определению (67.11) мы имеем:

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}(S + S_{kk} - 2U^2). \tag{68.20}$$

Согласно (67.04), производные от $U + \frac{1}{c^2}S$ равны производным от $\frac{c^3}{4}\mathfrak{g}^{00}$. Уравнение (68.18), написанное для $\mu = \nu = 0$, дает поэтому

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\left(U + \frac{1}{c^2}S\right) = -\frac{c^4}{2}N^{00} + 4\pi\gamma g T^{00}. \tag{68.21}$$

Далее, производные от $\frac{1}{c^2}S_{kk}$ — те же, как от $\frac{c}{4}\mathfrak{g}^{kk}$. Полагая в (68.18) $\mu = \nu = k$ и суммируя по k, получим

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{1}{c^2}S_{kk} = -\frac{c^2}{2}N^{kk} - 4\pi\gamma T^{kk} \tag{68.22}$$

[во втором члене справа мы заменили множитель $(-g/c^2)$ единицей]. Наконец, мы можем написать:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{-2U^2}{c^2}\right) = -\frac{4}{c^2}(\operatorname{grad} U)^2 + 16\pi\gamma U T^{00}. \tag{68.23}$$

Мы пренебрегли здесь в операторе Даламбера второй производной по времени и воспользовались тождеством

$$\Delta(U^2) = 2(\operatorname{grad} U)^2 + 2U\,\Delta U, \tag{68.24}$$

а также равенствами

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho = -4\pi\gamma c^2 T^{00}. \tag{68.25}$$

Искомое уравнение для U^* получается сложением трех уравнений (68.21)—(68.23). Найдем его правую часть. Согласно (68.14), мы имеем

$$-\frac{c^4}{2}N^{00} = \frac{7}{2c^2}(\operatorname{grad} U)^2. \tag{68.26}$$

Вычисляя с той же точностью, получаем из (68.16) и (68.17)

$$-\frac{c^2}{2}N^{kk} = \frac{1}{2c^2}(\operatorname{grad} U)^2 \tag{68.27}$$

и, следовательно,

$$\frac{c^4}{2}N^{00} + \frac{c^2}{2}N^{kk} + \frac{4}{c^2}(\operatorname{grad} U)^2 = 0. \tag{68.28}$$

Используя это соотношение, а также формулу

$$4\pi\gamma g + 16\pi\gamma U = -4\pi\gamma c^2, \tag{68.29}$$

получаем для U^* простое уравнение

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\,(c^2 T^{00} + T^{kk}). \tag{68.30}$$

Вне масс величина U^* удовлетворяет уравнению Даламбера с евклидовыми коэффициентами. Этого можно было ожидать на основании вида формулы (68.17) для функции Лагранжа.

В конце § 67 мы вывели для инварианта кривизны R приближенное выражение через функцию

$$f = \sqrt[4]{\frac{-g}{c^2}}, \tag{68.31}$$

пропорциональную корню четвертой степени из абсолютного значения определителя g. Мы имеем приближенно

$$R = \frac{2}{f^3}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f\right). \tag{68.32}$$

В соединении с вытекающим из уравнений Эйнштейна соотношением

$$R = \frac{8\pi\gamma}{c^2}\,T, \tag{68.33}$$

где T — инвариант тензора масс, предыдущее уравнение дает

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\gamma}{c^2} f^3 T. \tag{68.34}$$

Сравним эту формулу с уравнением (68.30) для U^*. Для этого положим

$$f = 1 + \frac{U^{**}}{c^2}, \tag{68.35}$$

где, как это следует из сравнения с (67.09),

$$U^{**} = U + \frac{1}{c^2}\left(S - S_{kk} - \frac{3}{2}U^2\right). \tag{68.36}$$

Так же как и U^*, величина U^{**} в первом приближении равна ньютонову потенциалу U. Уравнение (68.34) принимает вид:

$$\Delta U^{**} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^{**}}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left(1 + \frac{3U}{c^2}\right)T. \tag{68.37}$$

С той же степенью точности можно написать

$$\Delta U^{**} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^{**}}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\,\{(c^2 + U)\,T^{00} - T^{kk}\}. \tag{68.38}$$

Последнее уравнение может быть также получено непосредственно из формул (68.21)—(68.23) и из определения (68.36) величины U^{**}.

Если инвариант T имеет вид (66.19), то будет

$$\left(1+\frac{3U}{c^2}\right)T=\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(-\frac{1}{2}v^2+\Pi\right)\right\}-\frac{3}{c^2}p. \qquad (68.39)$$

На основаниии этой формулы и уравнения (68.37) можно показать, что в данном приближении величина U^{**} будет аддитивной функцией от масс.

Полусумма

$$\overline{U}=\frac{1}{2}(U^*+U^{**}) \qquad (68.40)$$

величин (68.20) и (68.36) удовлетворяет, как легко видеть, уравнению

$$\Delta\overline{U}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}=-4\pi\gamma\left(c^2+\frac{1}{2}U\right)T^{00}, \qquad (68.41)$$

содержащему справа только одну компоненту тензора массы. Это уравнение связано с уравнением Эйнштейна, содержащим ту же компоненту, а сама величина $\overline{U}$ связана с величиной $\mathfrak{g}^{00}$. Действительно, перемножая выражения

$$g^{00}=\frac{1}{c^2}\frac{c^2+U^*}{c^2-U^*}; \quad \sqrt{-g}=c\cdot\left(1+\frac{U^{**}}{c^2}\right)^2 \qquad (68.42)$$

и учитывая, что величины U^* и U^{**} отличаются друг от друга и от $\overline{U}$ на члены порядка $1/c^2$, мы получим

$$\sqrt{-g}\,g^{00}=\mathfrak{g}^{00}=\frac{1}{c}+\frac{4}{c^3}\overline{U}+\frac{7}{c^5}\overline{U}^2, \qquad (68.43)$$

где $\overline{U}$ есть решение уравнения (68.41).

Формулу (68.43) для $\mathfrak{g}^{00}$ нетрудно проверить. Действительно, если $\mathfrak{g}^{00}$ имеет это значение, то

$$\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{00}-\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{00}}{\partial t^2}=\frac{2}{c^4}\left(1+\frac{7\overline{U}}{2c^2}\right)\left(\Delta\overline{U}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}\right)+$$
$$+\frac{7}{c^6}\left((\operatorname{grad}\overline{U})^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\overline{U}}{\partial t}\right)^2\right). \qquad (68.44)$$

Мы можем заменить здесь в поправочных членах $\overline{U}$ на U и отбросить $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2$. Пользуясь значением (68.14) величины N^{00}, мы получим

$$\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{00}-\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{00}}{\partial t^2}+N^{00}=\frac{2}{c^4}\left(1+\frac{7U}{2c^2}\right)\left(\Delta\overline{U}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}\right). \qquad (68.45)$$

Сравнивая это соотношение с уравнением Эйнштейна (68.18), написанным для $\mu=\nu=0$, мы приходим к уравнению (68.41). Заметим, что с той же степенью точности, с какой справедлива формула (68.43), мы можем написать

$$\mathfrak{g}^{00}=\frac{1}{c}\frac{\left(1+\frac{\overline{U}}{c^2}\right)^3}{\left(1-\frac{\overline{U}}{c^2}\right)}. \tag{68.46}$$

Для случая статического поля от сосредоточенной массы M мы получили в § 57 строгое решение. Сравнение с этим строгим решением показывает, что если, для этого случая, в формулах (68.41) и (68.46) положить

$$U^*=U^{**}=\overline{U}=\frac{\gamma M}{r}, \tag{68.47}$$

то они совпадут с точными [см. формулы (58.10) и (58.13)]. Значения (68.47) согласуются с уравнением Даламбера, которому эти величины должны удовлетворять вне масс по рассмотренной в этом параграфе приближенной теории.

§ 69. Связь между расходимостью тензора массы и величинами Γ^ν

В начале предыдущего параграфа мы уже упоминали, что если в тензоре Эйнштейна опустить с самого начала члены, содержащие Γ^ν, то равенство нулю расходимости тензора массы

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0 \tag{69.01}$$

будет выполняться лишь поскольку выполняется условие гармоничности

$$\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu}=0. \tag{69.02}$$

Для исследования уравнений движения необходимо изучить связь между условиями (69.01) и (69.02) или, точнее, между левыми частями соответствующих равенств.

Если не делать никаких пренебрежений, то левая часть (69.01) может быть представлена в виде некоторого довольно сложного дифференциального оператора от левых частей (69.02). Нас интересуют, однако, не эти точные формулы, а приближенные, соответствующие той точности, с которой в предыдущем параграфе выписаны уравнения Эйнштейна. К выводу этих приближенных формул мы и переходим.

Выражение для расходимости симметричного тензора было подробно выписано в § 65. Согласно формуле (65.24), пространственные компоненты расходимости равны

$$\nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} + \Gamma^i_{00} T^{00} + 2\Gamma^i_{0k} T^{0k} + y_0 T^{0i} + \Gamma^i_{kl} T^{kl} + y_k T^{ik}. \quad (69.03)$$

Входящие сюда скобки Кристоффеля и величины y_α выписаны в § 67 [формулы (67.25) и (67.21)]. Преобразуем несколько эти формулы. Вводя, согласно (67.11), обозначение U^*, мы можем вместо первой формулы (67.25) написать

$$\Gamma^i_{00} = -\left(1 - \frac{4U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right). \quad (69.04)$$

Остальные две формулы (67.25) могут быть написаны в виде

$$\Gamma^i_{0k} = \frac{1}{2} y_0 \delta_{ik} - \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right), \quad (69.05)$$

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}(y_l \delta_{ik} + y_k \delta_{il}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta_{kl}. \quad (69.06)$$

Вводя эти выражения в (69.03), получаем:

$$\nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} + 2y_0 T^{i0} + 2y_k T^{ik} - \left(1 - \frac{4U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right) T^{00} -$$
$$- \frac{4}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i} T^{kk}. \quad (69.07)$$

Умножим это выражение на определитель g, приближенно равный

$$g = -c^2\left(1 + \frac{4U}{c^2}\right), \quad (69.08)$$

и воспользуемся тем, что коэффициенты при T^{00} и при T^{kk} почти пропорциональны друг другу. Мы получим

$$g\nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial (gT^{i0})}{\partial t} + \frac{\partial (gT^{ik})}{\partial x_k} +$$
$$+ \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk}) + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k}. \quad (69.09)$$

Таково выражение для умноженной на g расходимости любого симметричного тензора. Но если $T^{\mu\nu}$ есть тензор массы, то имеют место уравнения

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma(c^2 T^{00} + T^{kk}), \quad (69.10)$$

$$\Delta U_k = -4\pi\gamma c^2 T^{0k}, \quad (69.11)$$

которые были установлены выше [формулы (68.19) и (68.30)]. При помощи них можно подвергнуть правую часть (69.09) дальнейшему преобразованию. Для этого рассмотрим введенные формулами

(68.14)—(68.16) величины $N^{\mu\nu}$ и обратим внимание на то, что в уравнения тяготения (68.18) эти величины входят вместе с тензором $T^{\mu\nu}$ в комбинации

$$A^{\mu\nu} = gT^{\mu\nu} - \frac{c^4}{8\pi\gamma} N^{\mu\nu}. \tag{69.12}$$

Составим сумму производных

$$A^i = \frac{\partial A^{i\nu}}{\partial x_\nu}. \tag{69.13}$$

Полагая для краткости

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} + \frac{\partial U_s}{\partial x_s} = \Psi, \tag{69.14}$$

мы будем иметь

$$\frac{\partial N^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial N^{ik}}{\partial x_k} = \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left(\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) + \\ + \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\left(\Delta U_s - \frac{\partial \Psi}{\partial x_s}\right). \tag{69.15}$$

Поскольку в первом приближении имеет место равенство

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_s}{\partial x_s} = 0 \tag{69.16}$$

см. формулу (55.42)], величина Ψ будет порядка не менее $1/c^2$, и в формуле (69.15) члены, содержащие производные от Ψ, могут быть отброшены. Отбрасывая эти члены и используя уравнения (69.10) и (69.11), мы получим из (69.15)

$$-\frac{c^4}{8\pi\gamma}\left(\frac{\partial N^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial N^{ik}}{\partial x_k}\right) = \\ = \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk}) + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k}. \tag{69.17}$$

Но правая часть этого равенства совпадает с дополнительными членами в правой части (69.09), которые, тем самым, представлены в виде суммы производных. Таким образом, если $T^{\mu\nu}$ есть тензор массы, то мы имеем

$$g\nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial}{\partial t}\left(gT^{i0} - \frac{c^4}{8\pi\gamma} N^{i0}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(gT^{ik} - \frac{c^4}{8\pi\gamma} N^{ik}\right). \tag{69.18}$$

С другой стороны, дифференцируя уравнения тяготения, написанные в форме (68.18), мы получим

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k}\right) = \\ = \frac{16\pi\gamma}{c^3}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(gT^{i0} - \frac{c^4}{8\pi\gamma} N^{i0}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(gT^{ik} - \frac{c^4}{8\pi\gamma} N^{ik}\right)\right\}. \tag{69.19}$$

Сравнивая последние две формулы, можем написать:

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k}\right)=\frac{16\pi\gamma g}{c^3}\nabla_\mu T^{i\mu}. \qquad (69.20)$$

Это приближенное соотношение играет важную роль при выводе уравнений движения.

Аналогичное соотношение можно вывести и для нулевой компоненты расходимости тензора массы. Дифференцируя приближенные уравнения Эйнштейна (68.18), получаем

$$\frac{1}{2c}\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{0\mu}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial N^{0\mu}}{\partial x_\mu}=\frac{8\pi\gamma}{c^4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(gT^{0\mu}). \qquad (69.21)$$

Для вычисления второго члена левой части (69.21) дифференцируем выражения (68.14) и (68.15) для N^{00} и N^{0i}. Используя равенство (69.16), мы получим

$$\frac{\partial N^{00}}{\partial t}+\frac{\partial N^{0i}}{\partial x_i}=\frac{6}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\Delta U+\frac{8}{c^6}\frac{\partial U}{\partial x_i}\Delta U_i. \qquad (69.22)$$

Здесь мы можем выразить, по формулам (68.25) и (69.11), величины ΔU и ΔU_i через T^{00} и T^{0i}. Тогда будет

$$\frac{\partial N^{0\mu}}{\partial x_\mu}=-\frac{24\pi\gamma}{c^4}\frac{\partial U}{\partial t}T^{00}-\frac{32\pi\gamma}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_i}T^{0i}. \qquad (69.23)$$

Подставляя это в (69.21) и пользуясь выражением (69.08) для определителя g через U, получим, по умножении на $2c$:

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{0\mu}}{\partial x_\mu}=\frac{16\pi\gamma}{c^3}g\left(\frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x_\mu}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}T^{00}\right) \qquad (69.24)$$

или

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{0\mu}}{\partial x_\mu}=\frac{16\pi\gamma}{c^3}g\nabla_\mu T^{0\mu}, \qquad (69.25)$$

так как, согласно (65.23), нулевая компонента расходимости тензора массы приближенно равна выражению в скобках в правой части (69.24). Формула (69.25) построена вполне аналогично формуле (69.20) для пространственной компоненты расходимости тензора массы.

Обе эти формулы могут быть написаны в виде

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu}=\frac{16\pi\gamma}{c^3}g\nabla_\mu T^{\mu\nu}. \qquad (69.26)$$

Как было указано в начале этого параграфа, эти формулы являются приближенными. Они замечательны тем, что стоящий в левой части дифференциальный оператор имеет постоянные коэффициенты, вследствие чего они являются весьма удобными для исследования.

§ 70. Уравнения движения и условия гармоничности

Общая постановка задачи о движении системы масс была уже дана в § 64. Теперь нам надлежит рассмотреть вопрос о форме уравнений движения.

Мы знаем, что если рассматривать каждое из движущихся тел как сплошную среду, то внутри каждого тела должны выполняться уравнения

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{70.01}$$

С другой стороны, можно рассматривать движение каждого тела как целого, характеризуя его конечным числом параметров (координатами центра тяжести, значениями массы и моментов инерции и т. п.).

Тогда возникает задача найти уравнения движения для тел, как целых, т. е. дифференциальные уравнения для параметров, характеризующих каждое тело.

Мы перечислили некоторые из параметров, характеризующих тело. Чем обусловлен выбор этих параметров? Прежде всего — требованием, чтобы выбранные параметры были достаточны для нахождения сил, действующих на другие тела и определяющих их движение. В нашей задаче речь идет о силах тяготения. Поэтому параметры, характеризующие тело как целое, должны быть выбраны так, чтобы они позволяли с достаточной точностью определять поле тяготения в той области, где находятся другие тела. А так как тела находятся на больших расстояниях друг от друга, то параметры, относящиеся к данному телу, должны хорошо определять поле тяготения на больших расстояниях от него. Такими свойствами и обладают параметры, перечисленные выше.

Сказанное относится как к механике Ньютона, так и к механике Эйнштейна. Так как в теории Эйнштейна тяготение связано с метрикой, и именно метрика непосредственно влияет на движение тел, то основную роль в задаче нахождения уравнений движения системы тел должно играть рассмотрение метрики на больших расстояниях от тел. Как выбор параметров, так и вид уравнений движения должны быть подчинены требованию, чтобы на больших расстояниях от каждого тела правильно получалась метрика.

В конце § 69 были выведены приближенные соотношения

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{16\pi\gamma}{c^3} g \nabla_\mu T^{\mu\nu}. \tag{70.02}$$

Эти соотношения вытекают из уравнений Эйнштейна, написанных в приближенной форме (68.18). В строгом решении как правая часть (70.02), так и выражение под знаком оператора Даламбера в левой части равняются нулю в силу уравнений (70.01) и условий гармоничности

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{70.03}$$

Если же рассматривать приближенное решение, то соотношения (70.02) устанавливают связь между той степенью точности, с какой выполняются уравнения (70.01), и той степенью точности, с какой выполняются условия гармоничности (70.03).

Мы установили, что при нахождении закона движения тел как целых основное требование заключается в том, чтобы на больших расстояниях от каждого тела правильно получалась метрика. Это требование означает, в частности, что на больших расстояниях от каждого тела с возможно большей точностью должно выполняться условие гармоничности (70.03). Посмотрим, какие следствия вытекают отсюда для правой части уравнений (70.02).

Эти уравнения имеют вид обычных уравнений для запаздывающих потенциалов

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi\sigma, \tag{70.04}$$

причем, однако, необходимо помнить, что при самом выводе их были сделаны пренебрежения, равносильные разложению встречающихся функций по обратным степеням скорости света c. Поэтому и решать уравнения (70.04) в нашем случае имеет смысл только приближенно.

Мы начнем, однако, с рассмотрения точного решения. Предположим, что стоящая в правой части функция σ (которую мы будем называть плотностью) отлична от нуля только в ограниченной области пространства, в окрестностях точки с координатами

$$x_i = a_i(t) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{70.05}$$

(это есть область, занятая одной из масс). Нас интересует то решение уравнения, которое физически соответствует потенциалу, порождаемому движущейся массой с плотностью σ (запаздывающий потенциал). Это решение имеет вид

$$\psi = \int \frac{[\sigma]\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{70.06}$$

где $[\sigma]$ есть запаздывающее значение плотности σ, а именно:

$$[\sigma] = \sigma(t',\ \mathbf{r}'); \quad t' = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \tag{70.07}$$

Интегрирование ведется по координатам $(x',\ y',\ z')$ и распространяется на область, занятую массой.

Переходим теперь к приближенным формулам. Разлагая величину $[\sigma]$ по обратным степеням скорости света c и ограничиваясь первыми членами, получим

$$\psi = \int \frac{\sigma\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \sigma\,dV' + \frac{1}{2c^2}\frac{d^2}{dt^2}\int |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,\sigma\,dV', \tag{70.08}$$

где уже

$$\sigma = \sigma(t,\ \mathbf{r}'). \tag{70.09}$$

Написанное выражение мы можем, далее, разложить по обратным степеням расстояния от данной массы.

Используя разложения

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \frac{(x_i-a_i)(x_i'-a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} + \ldots, \\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| &= |\mathbf{r}-\mathbf{a}| - \frac{(x_i-a_i)(x_i'-a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \ldots,\end{aligned}\right\} \tag{70.10}$$

и полагая

$$\left.\begin{aligned}&\int \sigma(t, \mathbf{r}')\,dV' = \mu, \\ &\int \sigma(t, \mathbf{r}')(x_i'-a_i)\,dV' = \mu_i,\end{aligned}\right\} \tag{70.11}$$

мы получим

$$\begin{aligned}\psi = \frac{\mu}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \frac{\mu_i(x_i-a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} + \ldots - \frac{1}{c}\frac{d\mu}{dt} + \\ + \frac{1}{2c^2}\frac{d^2}{dt^2}\left\{\mu\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{a}| - \frac{\mu_i(x_i-a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \ldots\right\}.\end{aligned} \tag{70.12}$$

Величины μ и μ_i можно назвать „моментами“ нулевого и первого порядка. Нетрудно видеть, что если положить $\mu = 0$, то члены, не содержащие c, будут при удалении от данной массы убывать по крайней мере как $1/|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$, член, обратно пропорциональный c, обратится в нуль, а члены, пропорциональные $1/c^2$, будут оставаться ограниченными. Если же, кроме того, потребовать, чтобы обращались в нуль моменты первого порядка, т. е. чтобы было $\mu_i = 0$, то в разложении (70.12) для ψ исчезнут и следующие по важности члены. При равенстве нулю также и моментов второго порядка

$$\int \sigma(x_i-a_i)(x_k-a_k)\,dV = \mu_{ik} \tag{70.13}$$

исчезли бы и дальнейшие члены и т. д. Не все эти условия являются, вообще говоря, независимыми. В общей сложности мы можем поставить столько независимых условий, сколько в нашем распоряжении имеется параметров.

Предположим теперь, что имеется несколько масс, так что плотность σ отлична от нуля в окрестностях нескольких точек, скажем

$$x_i = a_i(t); \qquad x_i = b_i(t), \ \ldots \tag{70.14}$$

Тогда те же рассуждения будут относиться к каждой из точек. Обозначая через

$$\mu^{(a)} = \int\limits_{(a)} \sigma(t, \mathbf{r})\,dV; \qquad \mu^{(b)} = \int\limits_{(b)} \sigma(t, \mathbf{r})\,dV; \qquad \ldots \tag{70.15}$$

и через

$$\mu_i^{(a)} = \int\limits_{(a)} \sigma(t, \mathbf{r})(x_i - a_i)\,dV; \quad \mu_i^{(b)} = \int\limits_{(b)} \sigma(t, \mathbf{r})(x_i - b_i)\,dV, \tag{70.16}$$

интегралы (70.11), распространенные на области, занятые каждой из масс, мы получим для ψ выражение

$$\psi = \sum_a \frac{\mu^{(a)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \sum_a \frac{\mu_i^{(a)}(x_i - a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} -$$

$$- \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\sum_a \mu^{(a)} + \frac{1}{2c^2}\frac{d^2}{dt^2}\sum_a \left\{ \mu^{(a)}|\mathbf{r}-\mathbf{a}| - \frac{\mu_i^{(a)}(x_i - a_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \ldots \right\}. \tag{70.17}$$

Для того чтобы функция ψ была мала в любой точке между массами, а также при удалении от всех масс, мы можем теперь потребовать выполнения ряда уравнений

$$\mu^{(a)} = 0, \qquad \mu_i^{(a)} = 0, \quad \ldots, \tag{70.18}$$

из которых каждое относится к отдельной массе.

После этих общих рассуждений вернемся к рассмотрению уравнений (70.02). Мы постараемся удовлетворить требованию, чтобы в любой точке между массами, а также при удалении от всех масс, с возможно большей точностью удовлетворялось условие гармоничности (70.03).

При написании уравнений движения в четырехмерной форме уравнение, выражающее баланс энергии, обычно является следствием остальных уравнений движения. Поэтому мы займемся сперва пространственными компонентами соотношения (70.02) (соответствующими $\nu = 1, 2, 3$), а затем проверим выполнение условий, содержащих временну́ю компоненту ($\nu = 0$).

Сопоставляя (70.02) с (70.04), мы можем положить

$$\sigma = \sigma_i = -g\nabla_\alpha T^{\alpha i}, \tag{70.19}$$

$$\psi = \psi_i = \frac{c^3}{4\gamma}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha i}}{\partial x_\alpha}. \tag{70.20}$$

Для того чтобы величины (70.20) были малы вне масс, необходимо выполнение ряда условий вида (70.18). Прежде всего, должны быть равны нулю интегралы

$$\mu^{i\,(a)} \equiv -\int\limits_{(a)} g\nabla_\alpha T^{\alpha i}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 0, \tag{70.21}$$

распространенные на область каждой массы. Но, согласно (69.09)

$$g\nabla_\alpha T^{\alpha i} = \frac{\partial}{\partial t}(gT^{i0}) + \frac{\partial}{\partial x_k} gT^{ik}) + \\ + \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk}) + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k}. \quad (70.22)$$

Поэтому уравнения (70.21) могут быть написаны в виде

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} gT^{i0}(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk})(dx)^3 + \\ + 4\int\limits_{(a)} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k}(dx)^3, \quad (70.23)$$

где для краткости положено

$$(dx)^3 = dx_1\, dx_2\, dx_3. \quad (70.24)$$

Напомним еще, что

$$g = -c^2 - 4U. \quad (70.25)$$

Выражения для составляющих тензора массы упругого тела были получены нами в § 66. Согласно формуле (66.07), они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} c^2 T^{00} &= \rho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\}, \\ c^2 T^{0i} &= \rho v_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\} - \frac{1}{c^2}p_{ik}v_k, \\ c^2 T^{ik} &= \rho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \quad (70.26)$$

Если ограничиться главными членами, то результаты подстановки (70.26) в (70.23) будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U}{\partial x_i}(dx)^3. \quad (70.27)$$

Отсюда ясно, что уравнения (70.21) представляют уравнения движения центров инерции каждой из масс. Если число отдельных масс есть n, то таких уравнений будет $3n$. Таково будет число степеней свободы нашей механической системы, если рассматривать массы как материальные точки.

Переходя к рассмотрению других условий вида (70.18), мы можем потребовать равенства нулю следующих комбинаций моментов первого порядка:

$$\mu^{ik\,(a)} \equiv -\int g\,(x_i \nabla_\alpha T^{\alpha k} - x_k \nabla_\alpha T^{\alpha i})(dx)^3 = 0. \quad (70.28)$$

Если и здесь ограничиться главными членами, то уравнения (70.28) примут вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\,(x_i v_k - x_k v_i)(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho\left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)(dx)^3. \quad (70.29)$$

Они представляют, очевидно, закон изменения момента количества движения каждого из тел. В момент количества движения здесь включен как орбитальный момент, происходящий от движения по орбите, так и собственный момент, происходящий от вращения тела. Орбитальный момент может быть выделен путем составления комбинаций уравнений (70.27) и (70.29). Число уравнений вида (70.28) есть также $3n$, поэтому, если мы будем считать, что массы вращаются наподобие твердых тел, то число уравнений будет равно числу вращательных степеней свободы.

§ 71. Внутренняя и внешняя задачи механики системы тел. Ньютоновы уравнения для поступательного движения

В дальнейшем мы будем различать внутреннюю и внешнюю задачи механики. Уравнения движения внутри тела мы будем относить к внутренней, а уравнения движения тела как целого — к внешней задаче.

Рассмотрим влияние, в различных приближениях, внутренней структуры тела на его движение как целого.

Для получения ньютоновых уравнений движения в интегральной форме (70.27) и (70.29) достаточно было, как мы видели, использовать во внутренней задаче уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (71.01)$$

позволяющее написать нулевое приближение для некоторых компонент тензора массы

$$c^2 T^{00} = \rho; \quad c^2 T^{0i} = \rho v_i. \quad (71.02)$$

Таким образом, о внутренней структуре тела не приходилось делать, в этом приближении, почти никаких предположений. Впрочем, более детальное рассмотрение внутренней структуры тела и невозможно без знания метрики с соответствующей точностью. Если называть нулевым приближением евклидову метрику, то первое приближение (следующее после евклидова) требует уже введения ньютонова потенциала тяготения U, а также вектор-потенциала U_i. Это и было сделано в § 55 на основе использованных там выражений (71.02) для тензора массы. Физически первое приближение для метрики соответствует, при рассмотрении внутренней структуры тела, учету сил тяготения.

При выводе, в § 66, приведенного выше [формула (70.26)] тензора массы уже потребовались, помимо первого приближения для метрики, определенные предположения о внутренней структуре тела, а именно тело было предположено упругим. Помимо уравнения неразрывности (71.01), внутри тела предполагались выполненными ньютоновы уравнения движения

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \tag{71.03}$$

Уравнение неразрывности для внутренней задачи позволяет получить ньютоновы уравнения движения (70.27) для внешней задачи. Уравнения же (71.03) для внутренней задачи и построенный на их основе тензор массы (70.26) позволяют получить, для внешней задачи, второе (релятивистское) приближение к уравнениям движения тела как целого. Это достигается при помощи формул (70.23).

Дальнейшая наша задача — получение, в явной форме, уравнений движения, вытекающих из установленных в конце предыдущего параграфа интегральных соотношений.

Для составления этих уравнений необходимо прежде всего указать, какие степени свободы мы имеем в виду рассматривать, иначе говоря, какими параметрами мы будем характеризовать нашу механическую систему. Соображения, определяющие выбор параметров, уже были приведены в начале предыдущего параграфа. На основании этих соображений мы будем рассматривать степени свободы, соответствующие, во-первых, поступательному движению каждого из тел и, во-вторых, вращению каждого тела вокруг его центра тяжести. При этом *мы будем предполагать, что тела вращаются наподобие твердых тел* (это, конечно, не означает, что тела предполагаются твердыми: таким движением могут обладать и жидкие тела) *).

В силу уравнения неразрывности масса тела

$$M_a=\int\limits_{(a)}\rho\,(dx)^3 \tag{71.04}$$

есть величина постоянная; поэтому она в число переменных параметров не входит. Поступательное движение тела определяется изменением координат a_i его центра тяжести. Эти величины вводятся при помощи соотношений

$$M_a a_i=\int\limits_{(a)}\rho x_i\,(dx)^3, \tag{71.05}$$

которые могут быть написаны в виде

$$\int\limits_{(a)}\rho\,(x_i-a_i)\,(dx)^3=0. \tag{71.06}$$

*) Напомним, что наши вычисления имеют приближенный характер. Затруднения, связанные с определением, в теории относительности, понятия твердого тела, в данном приближении еще не возникают.

Дифференцируя интеграл (71.05) по времени и пользуясь уравнением неразрывности, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int \rho x_i (dx)^3 = \int \frac{\partial\rho}{\partial t} x_i (dx)^3 = -\int \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} x_i (dx)^3 = \int \rho v_i (dx)^3, \qquad (71.07)$$

откуда

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 = M_a \dot{a}_i. \qquad (71.08)$$

Из соотношения (71.08) следует, что, независимо от распределения скоростей внутри тела, левая часть уравнения (70.27) равна произведению массы тела на ускорение центра тяжести

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 = M_a \ddot{a}_i. \qquad (71.09)$$

Вычислим интеграл в правой части (70.27). Ньютонов потенциал U можно разбить на два слагаемых

$$U(\mathbf{r}) = u_a(\mathbf{r}) + U^{(a)}(\mathbf{r}), \qquad (71.10)$$

где u_a происходит от массы M_a, а $U^{(a)}$ — от остальных масс. Сообразно такому разложению, мы будем иметь:

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 + \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3. \qquad (71.11)$$

Внутри массы M_a потенциал u_a удовлетворяет уравнению

$$\Delta u_a = -4\pi\gamma\rho_a, \qquad (71.12)$$

где ρ_a есть плотность, принадлежащая данной массе. Он может быть представлен в виде интеграла

$$u_a = \gamma \int\limits_{(a)} \frac{\rho' (dx')^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \qquad (71.13)$$

Потенциал же $U^{(a)}$, происходящий от других масс, будет, внутри данной массы, медленно меняющейся функцией от координат, которую можно разложить в ряд Тейлора по степеням $(x_j - a_j)$. Это позволяет приближенно вычислить второй интеграл, входящий в (71.11).

Подставляя выражение (71.13) для u_a в первый из этих интегралов, будем иметь

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 = -\gamma \int\limits_{(a)}\int\limits_{(a)} \frac{\rho\rho'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (x_i - x'_i)(dx)^3 (dx')^3. \qquad (71.14)$$

Но двойной интеграл справа равен нулю, так как подинтегральная функция в нем антисимметрична в координатах обеих точек. Таким образом,

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 = 0. \tag{71.15}$$

Это соотношение может быть истолковано, как равенство нулю равнодействующей внутренних гравитационных сил.

Приведем еще одно доказательство этого соотношения. Положим

$$q_{ik}^{(a)} = \frac{1}{2} \delta_{ik} (\operatorname{grad} u_a)^2 - \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_k}. \tag{71.16}$$

Тогда

$$\frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} = -\frac{\partial u_a}{\partial x_i} \Delta u_a. \tag{71.17}$$

или

$$\frac{1}{4\pi\gamma} \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} = \rho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \tag{71.18}$$

в силу уравнения (71.12). Если мы в интеграле (71.15) будем разуметь под ρ плотность ρ_a, принадлежащую данной массе, мы можем распространить интеграл на весь бесконечный объем, после чего получим

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 = \int\limits_{(\infty)} \rho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} (dx)^3 = 0, \tag{71.19}$$

так как на бесконечности величины $q_{ik}^{(a)}$ обращаются в нуль.

Обратимся к вычислению второго интеграла в (71.11). Разлагая потенциал $U^{(a)}$ внешних масс в ряд Тейлора, будем иметь

$$\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k}\right)_a (x_k - a_k) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\right)_a (x_k - a_k)(x_l - a_l) + \ldots \tag{71.20}$$

Умножая это выражение на ρ, интегрируя по объему массы (a) и используя (71.06), будем иметь

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 = M_a \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a + \frac{1}{2} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^3 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\right)_a + \ldots, \tag{71.21}$$

где через $I_{kl}^{(a)}$ мы обозначили величины

$$I_{kl}^{(a)} = \int \rho \cdot (x_k - a_k)(x_l - a_l)(dx)^3, \tag{71.22}$$

которые мы будем называть моментами инерции массы (a) (в механике это название носят несколько другие величины). Нам надлежит вычислить теперь значение потенциала $U^{(a)}$. Мы имеем

$$U^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \gamma \int\limits_{(b)} \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(dx')^3, \tag{71.23}$$

где штрих у знака суммы означает, что масса (a) исключена из суммирования. Каждый член суммы представляет потенциал соответствующей массы. Рассмотрим один из них, например

$$u_b(\mathbf{r}) = \gamma \int\limits_{(b)} \frac{\rho'(dx')^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{71.24}$$

Подставляя сюда разложение

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} - (x'_k - b_k)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \\ + \frac{1}{2}(x'_k - b_k)(x'_l - b_l)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \ldots, \tag{71.25}$$

интегрируя почленно и используя формулу (71.06), а также обозначение (71.22), мы получим:

$$u_b(\mathbf{r}) = \frac{\gamma M_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \frac{1}{2}\gamma I_{kl}^{(b)}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \ldots \tag{71.26}$$

Следовательно, будет

$$U^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \frac{\gamma M_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma I_{kl}^{(b)}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} + \ldots \tag{71.27}$$

Оценим порядок величины первой и второй суммы в этом выражении. Пусть L есть длина, характеризующая линейные размеры тел, а R — величина порядка расстояния между ними (см. § 64). Пусть q характеризует порядок величины скорости тел. Мы будем считать, что по порядку величины

$$q^2 \sim \frac{\gamma M}{R}. \tag{71.28}$$

Порядок величины моментов инерции будет, очевидно,

$$I_{kl} \sim ML^2. \tag{71.29}$$

Поэтому первая сумма в (71.27) будет порядка q^2, а вторая — порядка $q^2\dfrac{L^2}{R^2}$. Обозначенные многоточием невыписанные члены будут более высокого порядка относительно малой величины L/R и мы их отбросим. С другой стороны, нетрудно видеть, что в формуле (71.27) второй член будет порядка L^2/R^2 по отношению к первому. Поэтому при вычислении второго члена мы можем отбросить в потенциале $U^{(a)}$ величины порядка $q^2\frac{L^2}{R^2}$, тогда как при вычислении первого члена мы должны их сохранить. Производя выкладки, получим:

$$\int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\,(dx)^3 = \frac{\partial}{\partial a_i}\sum_b{}' \left\{\frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma}{2}\left(M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}\right)\frac{\partial^2}{\partial a_k\,\partial a_l}\,\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}\right\}. \qquad (71.30)$$

Ввиду того, что величина

$$\frac{\partial^2}{\partial a_k\,\partial a_l}\,\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} = -\frac{\delta_{kl}}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} + \frac{3(a_k-b_k)(a_l-b_l)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^5} \qquad (71.31)$$

симметрична относительно $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, выражение в фигурных скобках в (71.30) также будет симметрично. Вводя двойную сумму

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\left\{\frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \frac{\gamma}{2}\left(M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}\right)\frac{\partial^2}{\partial a_k\,\partial a_l}\,\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}\right\}, \qquad (71.32)$$

мы можем поэтому написать

$$\int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial U}{\partial x_i}(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\,(dx)^3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \qquad (71.33)$$

Уравнение (70.27), которое мы выпишем еще раз,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho v_i\,(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\,(dx)^3 \qquad (71.34)$$

примет теперь вид

$$M_a\ddot{a}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \qquad (71.35)$$

Величина Φ есть, очевидно, ньютонова потенциальная энергия нашей механической системы, выраженная через координаты и моменты инерции. Заметим, что при выводе этих уравнений мы еще не делали, помимо (71.01), никаких предположений о распределении скоростей внутри тела.

Если все рассматриваемые тела обладают сферической симметрией, то для каждого тела тензор моментов инерции I_{kl} будет пропорционален единичному тензору

$$I_{kl} = I\delta_{kl}. \qquad (71.36)$$

В этом случае потенциальная энергия Φ совсем не будет содержать моментов инерции, а будет зависеть только от координат a_i

(и, конечно, от масс M_a, которые постоянны). Тогда система уравнений (71.35) будет полной: она будет содержать столько уравнений, сколько неизвестных координат центров тяжести масс. Это будут обычные уравнения движения системы материальных точек, притягивающихся по закону Ньютона.

В общем же случае, когда тела сферической симметрией не обладают, в уравнения движения войдут, помимо координат центров тяжести масс, их моменты инерции, и система уравнений (71.35) не будет тогда полной. В этом случае можно получить полную систему, если ввести предположение, что тела вращаются вокруг своих центров тяжести наподобие твердых тел. Это значит, что распределение скоростей внутри каждого тела имеет вид

$$v_i = \dot{a}_i + \omega_{ji}^{(a)}(x_j - a_j), \tag{71.37}$$

где $\omega_{ji}^{(a)}$ есть трехмерный антисимметричный тензор угловой скорости тела (a). Опуская значок (a), мы можем также писать для его составляющих

$$\omega_{23} = \omega_1; \qquad \omega_{31} = \omega_2; \qquad \omega_{12} = \omega_3. \tag{71.38}$$

При таком предположении полная система уравнений получится, если присоединить к (71.35) уравнения, выражающие закон изменения количества движения каждого из тел. Вывод этих уравнений из соотношений (70.29) будет дан в следующем параграфе.

§ 72. Ньютоновы уравнения вращательного движения

Положим

$$M_{ik}^{(a)} = \int\limits_{(a)} \rho\,[(x_i - a_i)\,v_k - (x_k - a_k)\,v_i]\,(dx)^3. \tag{72.01}$$

Это есть, очевидно, момент количества движения тела (a) относительно его центра тяжести. Закон изменения этой величины получается из (70.29) после выделения членов, относящихся к орбитальному моменту количества движения. Эта операция сводится к применению соотношения

$$\frac{d}{dt}\left\{a_i \int\limits_{(a)} \rho v_k\,(dx)^3 - a_k \int\limits_{(a)} \rho v_i\,(dx)^3\right\} = \\ = a_i \int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial U}{\partial x_k}\,(dx)^3 - a_k \int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\,(dx)^3, \tag{72.02}$$

которое вытекает из уравнений движения (71.34) и из формулы (71.08), в силу которой

$$\dot{a}_i \int\limits_{(a)} \rho v_k\,(dx)^3 - \dot{a}_k \int\limits_{(a)} \rho v_i\,(dx)^3 = 0. \tag{72.03}$$

Выпишем уравнения (70.29) еще раз

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\rho(x_i v_k - x_k v_i)(dx)^3 = \int\limits_{(a)}\rho\left(x_i\frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)(dx)^3. \qquad (72.04)$$

Вычитая из них соотношения (72.02), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\rho\,[(x_i - a_i)v_k - (x_k - a_k)v_i]\,(dx)^3 =$$

$$= \int\limits_{(a)}\rho\left[(x_i - a_i)\frac{\partial U}{\partial x_k} - (x_k - a_k)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right](dx)^3, \qquad (72.05)$$

или, пользуясь обозначением (72.01):

$$\frac{d}{dt}M_{ik}^{(a)} = \int\limits_{(a)}\rho\left[(x_i - a_i)\frac{\partial U}{\partial x_k} - (x_k - a_k)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right](dx)^3. \qquad (72.06)$$

Вычислим величину $M_{ik}^{(a)}$. Подставляя в (72.01) выражение (71.37) для скорости и пользуясь обозначениями (71.22) для трехмерного тензора моментов инерции, мы получим

$$M_{ik}^{(a)} = \omega_{jk}^{(a)}I_{ji}^{(a)} - \omega_{ji}^{(a)}I_{jk}^{(a)}. \qquad (72.07)$$

В более подробной записи эти соотношения будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} M_{23} &= (I_{22} + I_{33})\,\omega_{23} - I_{12}\omega_{31} - I_{13}\omega_{12},\\ M_{31} &= -I_{12}\omega_{23} + (I_{33} + I_{11})\,\omega_{31} - I_{23}\omega_{12},\\ M_{12} &= -I_{13}\omega_{23} - I_{23}\omega_{31} + (I_{11} + I_{22})\,\omega_{12}. \end{aligned}\right\} \qquad (72.08)$$

Верхний значок (a) здесь для краткости опущен. Это — известные из механики твердого тела формулы, связывающие момент количества движения с угловой скоростью.

Вычислим теперь правую часть уравнения (72.06), которая, очевидно, представляет момент сил, действующих на тело. Сообразно разделению (71.10) потенциала на внутренний и внешний, рассмотрим сперва момент внутренних сил. При помощи соотношения (71.18) легко проверить, что момент внутренних сил равен нулю. Действительно, рассуждая, как при выводе (71.19), мы приходим к равенству

$$\int\limits_{(a)}\rho\left\{(x_i - a_i)\frac{\partial u_a}{\partial x_k} - (x_k - a_k)\frac{\partial u_a}{\partial x_i}\right\}(dx)^3 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(x_i - a_i)\,q_{kj}^{(a)} - (x_k - a_k)\,q_{ij}^{(a)}\right\}(dx)^3 = 0. \qquad (72.09)$$

Остается вычислить момент внешних сил. Пользуясь разложением (71.20), в котором, однако, мы удержим только постоянный и линейный члены, мы получим

$$\int\limits_{(a)} \rho \left[(x_i - a_i) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k} - (x_k - a_k) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \right] (dx)^3 = \\ = I_{ij}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_k \partial x_j} \right)_a - I_{kj}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_a . \tag{72.10}$$

Подставляя сюда выражение (71.27) для $U^{(a)}$, мы можем ограничиться в нем первой суммой. Это дает

$$\int\limits_{(a)} \rho \left[(x_i - a_i) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k} - (x_k - a_k) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \right] (dx)^3 = \\ = \sum_b{}' \gamma M_b \left\{ I_{ij}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_j} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} - I_{kj}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \right\} . \tag{72.11}$$

Поскольку, согласно (72.09), момент внешних сил равен полному моменту сил, мы можем заменить здесь $U^{(a)}$ на U. Выражение (72.11) даст тогда правую часть уравнения (72.06), и мы можем написать закон изменения момента количества движения тела (a) в виде *)

$$\frac{d}{dt} M_{ik}^{(a)} = \sum_b \gamma M_b \left\{ I_{ij}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_j} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} - I_{kj}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \right\} . \tag{72.12}$$

Вводя явные выражения (71.31) для вторых производных, мы можем также написать

$$\frac{d}{dt} M_{ik}^{(a)} = \sum_b \frac{3\gamma Mb\,(a_j - b_j)}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^5} \left[(a_k - b_k) I_{ij}^{(a)} - (a_i - b_i) I_{kj}^{(a)} \right] . \tag{72.13}$$

Эти уравнения дополняют выведенные ранее уравнения движения центров тяжести

$$M_a \ddot{a}_i = - \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \tag{72.14}$$

до полной системы. В этом можно убедиться различными путями. Мы можем рассматривать в качестве неизвестных, характеризующих движение каждой массы, величины

$$a_i, \qquad I_{ij}^{(a)}, \qquad \omega_{ij}^{(a)}; \tag{72.15}$$

всего двенадцать величин [составляющие момента количества движения выражаются через них по формулам (72.07)]. Для этих вели-

*) Из уравнений Эйнштейна это уравнение было впервые выведено (другим способом) В. П. Кашкаровым [39].

чин мы имеем: три уравнения (72.14) (движение центра инерции), три уравнения (72.13) (закон изменения количества движения) и еще шесть уравнений

$$\frac{dI_{ik}^{(a)}}{dt} = \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} + \omega_{jk}^{(a)} I_{ij}^{(a)}, \tag{72.16}$$

справедливых для всякого тензора, компоненты которого в системе координат, связанной с телом, постоянны (вывод мы приведем ниже). Таким образом, для двенадцати неизвестных (72.15) мы имеем двенадцать уравнений, и система уравнений будет полной.

Мы могли бы вести рассуждение и иначе, введя в рассмотрение, для каждого тела, координатную систему x_1^*, x_2^*, x_3^*, вращающуюся вместе с телом (верхний значок (a) мы для краткости опускаем). Обозначая через α_{ri} косинусы углов, удовлетворяющие соотношениям

$$\alpha_{ri}\alpha_{rj} = \delta_{ij}; \qquad \alpha_{ri}\alpha_{si} = \delta_{rs}, \tag{72.17}$$

мы можем положить

$$x_r^* = \alpha_{ri}(x_i - a_i); \qquad x_i - a_i = \alpha_{ri} x_r^*. \tag{72.18}$$

Производные от косинусов связаны с составляющими угловой скорости соотношениями

$$\dot{\alpha}_{ri} = \alpha_{rj}\omega_{ji}; \qquad \omega_{ji} = \alpha_{rj}\dot{\alpha}_{ri}. \tag{72.19}$$

По известным формулам кинематики твердого тела девять косинусов α_{ri} выражаются через три эйлеровых угла ϑ, φ, ψ. Для каждой массы мы могли бы, вместо (72.15), взять в качестве неизвестных функций шесть величин

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \vartheta^{(a)}, \ \varphi^{(a)}, \ \psi^{(a)} \tag{72.20}$$

и выразить через них все остальные, в частности величины (72.15). Так, угловая скорость уже выражена в (72.19) через косинусы и их производные. Что касается моментов инерции, то они выражаются по формулам

$$I_{ij} = \alpha_{ri}\alpha_{sj} I_{ij}^*, \tag{72.21}$$

где I_{ij}^* — постоянные значения составляющих этого тензора в системе, связанной с телом. Для шести величин (72.20), относящихся к каждой массе, мы имели бы шесть уравнений (72.13) и (72.14), т. е. надлежащее число уравнений для того, чтобы система уравнений была полной.

Приведенные здесь вычисления уравнений движения в ньютоновом приближении предполагают возможность отбрасывать (помимо релятивистских поправок) члены более высокого порядка относительно малой величины L/R. Если бы мы пожелали сохранить эти члены, нам пришлось бы рассматривать моменты инерции третьего и более высокого порядка, например

$$I_{ikl}^{(a)} = \int_{(a)} \rho\,(x_i - a_i)(x_k - a_k)(x_l - a_l)\,(dx)^3. \tag{72.22}$$

Но это не нарушило бы полноту системы уравнений. В самом деле, мы могли бы рассматривать вновь введенные величины как функции эйлеровых углов, например

$$I_{ikl} = \alpha_{ri}\alpha_{sk}\alpha_{ul}\overset{*}{I}_{rsu}, \tag{72.23}$$

где $\overset{*}{I}_{rsu}$ — постоянные. Тогда неизвестными функциями остались бы попрежнему величины (72.20), так что число неизвестных функций не увеличилось бы. При другом способе рассмотрения мы могли бы включить вновь введенные величины в число неизвестных функций и соответственно дополнить систему уравнений, например написать для величин (72.22) уравнения:

$$\frac{d}{dt} I_{ikl}^{(a)} = \omega_{ji}^{(a)} I_{jkl}^{(a)} + \omega_{jk}^{(a)} I_{ijl}^{(a)} + \omega_{jl}^{(a)} I_{ikj}^{(a)}. \tag{72.24}$$

В общем случае произвольного трехмерного тензора $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, составляющие которого $\overset{*}{A}_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ в системе, связанной с телом, постоянны, мы имели бы

$$\frac{d}{dt} A_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \omega_{ji_1} A_{j, i_2 \ldots i_n} + \omega_{ji_k} A_{i_1, \ldots i_{k-1}, j, i_k, \ldots i_n} + \\ + \omega_{ji_n} A_{i_1, i_2, \ldots i_{n-1}, j}. \tag{72.25}$$

Эти уравнения непосредственно следуют из формул преобразования

$$A_{i_1, i_2 \ldots i_n} = \alpha_{r_1 i_1}\alpha_{r_2 i_2} \ldots, \alpha_{r_n i_n} \overset{*}{A}_{r_1 r_2 \ldots r_n} \tag{72.26}$$

в соединении с формулами (72.19).

В заключение проверим выполнение закона сохранения энергии для системы уравнений (72.13) и (72.14). Введем кинетическую энергию вращения тела вокруг своего центра тяжести

$$T_a = \frac{1}{2}\,\omega_{kj}^{(a)}\omega_{lj}^{(a)} I_{kl}^{(a)} = \frac{1}{4}\, M_{ik}^{(a)}\omega_{ik}^{(a)}. \tag{72.27}$$

При составлении производной от T_a по времени нужно иметь в виду, что в силу уравнений (72.16) будет

$$\omega_{kj}^{(a)}\omega_{lj}^{(a)} \frac{dI_{kl}^{(a)}}{dt} = 0, \tag{72.28}$$

так что при дифференцировании T_a величины $I_{kl}^{(a)}$ могут рассматриваться как постоянные. Имея это в виду, легко получаем

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{2}\,\omega_{ik}^{(a)} \frac{dM_{ik}^{(a)}}{dt}. \tag{72.29}$$

Подставляя сюда выражение (72.12) для производной от $M_{ik}^{(a)}$ и пользуясь антисимметрией $\omega_{ik}^{(a)}$, будем иметь

$$\frac{dT_a}{dt} = \omega_{ik}^{(a)} \sum_b{}' \gamma M_b I_{ij}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} \tag{72.30}$$

или, после симметризации относительно j и k и последующего переименования значков,

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{2} \sum_b{}' \gamma M_b \left(\omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} + \omega_{jk}^{(a)} I_{ij}^{(a)}\right) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}, \tag{72.31}$$

или, наконец, в силу (72.16):

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{2} \sum_b{}' \gamma M_b \frac{dI_{ik}^{(a)}}{dt} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{72.32}$$

Припомним выражение (71.32) для потенциальной энергии

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,\ b \\ (a \neq b)}} \left\{ \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \frac{\gamma}{2} \left(M_a I_{ik}^{(b)} + M_b I_{ik}^{(a)}\right) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} \right\}. \tag{72.33}$$

Величина Φ зависит от времени через посредство координат a_i и через посредство моментов инерции $I_{ik}^{(a)}$. Эта последняя зависимость дает в выражении для полной производной от Φ по времени члены, которые равны

$$\frac{d\Phi}{dt} - \sum_a \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \dot{a}_i = -\sum_a \frac{dT_a}{dt}, \tag{72.34}$$

как это видно из сравнения (72.33) с (72.32). В силу уравнений движения для центров тяжести масс мы получаем отсюда

$$\frac{d}{dt}\left\{ \sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_i^2 + T_a\right) + \Phi \right\} = 0 \tag{72.35}$$

и закон сохранения энергии в форме

$$\sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_i^2 + T_a\right) + \Phi = E, \tag{72.36}$$

где E — постоянная энергии. Заметим, что даже при очень быстром вращении тел, когда линейные скорости поступательного и вращательного движения — одного порядка, в балансе энергии (72.34) вращательные члены будут малы $\left(\text{порядка } \frac{L}{R} \text{ по отношению к главным}\right)$.

§ 73. Внутренняя структура тела. Уравнение Ляпунова

Уравнения поступательного движения в интегральной форме были найдены, во втором приближении, в конце § 70. Выпишем их в развернутом виде. Подставляя значения составляющих тензора массы упругого тела из (70.26) в уравнения движения (70.23), получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\left\{\rho v_i\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi+3U\right)-\frac{1}{c^2}p_{ik}v_k\right\}(dx)^3\right.=$$
$$=\int\limits_{(a)}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left\{\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U\right)-\frac{p_{kk}}{c^2}\right\}(dx)^3+$$
$$+\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)\rho v_k\,(dx)^3. \qquad (73.01)$$

Здесь величина U^* удовлетворяет, согласно (68.30), уравнению

$$\Delta U^*-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2}=-4\pi\gamma\left\{\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U\right)-\frac{p_{kk}}{c^2}\right\}. \qquad (73.02)$$

В первом приближении U^* совпадает с ньютоновым потенциалом U, но нам нужно знать U^* во втором приближении, с поправками на запаздывание и с учетом дополнительных членов в правой части (73.02). Величины же U_i, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta U_i=-4\pi\gamma\rho v_i, \qquad (73.03)$$

достаточно знать в первом приближении.

Как мы указывали в § 71, для того чтобы получить из (73.01) релятивистские уравнения движения в явной форме, необходимо рассмотреть в ньютоновом приближении внутреннюю структуру тела и соответствующие уравнения (71.03):

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \qquad (73.04)$$

Мы ограничимся рассмотрением тех случаев, когда тело вращается как целое, наподобие твердого тела. Тогда распределение скоростей внутри тела имеет вид (см. 71.37):

$$v_i=\dot a_i+\omega_{ji}(x_j-a_j) \qquad (73.05)$$

[значок (a) при ω_{ji} подразумевается]. Отсюда ускорение частицы внутри тела

$$w_i=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \qquad (73.06)$$

равно

$$w_i=\ddot a_i+(\dot\omega_{ji}-\omega_{ik}\omega_{jk})(x_j-a_j). \qquad (73.07)$$

Разложим входящий в (73.04) ньютонов потенциал U на внутренний (u_a) и внешний ($U^{(a)}$), причем внешний потенциал заменим первыми членами разложения в ряд Тейлора вблизи точки $x_j = a_j$. Вместо ускорения частицы w_i подставим его выражение (73.07). Мы получим тогда

$$\rho \ddot{a}_i - \rho \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a - \rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} +$$
$$+ \rho \left[\dot{\omega}_{ji} - \omega_{ik}\omega_{jk} - \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a\right](x_j - a_j) = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \qquad (73.08)$$

Оценим здесь порядок величины различных членов и сохраним только главные. Из ньютоновых уравнений движения (71.35) нетрудно заключить, что

$$\ddot{a}_i \sim \frac{q^2}{R}. \qquad (73.09)$$

Того же порядка будет входящая во второй член (73.08) величина $\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a$. Но разность этих величин будет мала. Из сопоставления (71.21) с (71.33) следует, что будет

$$\ddot{a}_i - \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a \sim \frac{q^2}{R} \cdot \frac{L^2}{R^2}. \qquad (73.10)$$

(Для почти шаровидных масс эта разность будет еще меньше, так как значение ее обусловлено неравенством моментов инерции, а не самыми моментами инерции.) Поэтому мы можем считать, что первые два члена в (73.08) сокращаются.

Переходим к оценке членов в квадратных скобках. Здесь главный член есть $\omega_{ik}\omega_{jk}$; он имеет порядок величины квадрата угловой скорости. Мы примем, что угловая скорость будет порядка

$$\omega \sim \frac{q}{L}. \qquad (73.11)$$

Порядок величины, производной от угловой скорости по времени, определится из закона изменения момента количества движения. Нетрудно получить оценку

$$\dot{\omega} \sim \frac{q^2}{R^2}. \qquad (73.12)$$

Сопоставляя ее с оценкой для ω, получаем

$$\dot{\omega} \sim \omega^2 \frac{L^2}{R^2}. \qquad (73.13)$$

Далее, вторая производная от внешнего потенциала по координатам будет порядка

$$\left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a \sim \frac{q^2}{R^2}. \qquad (73.14)$$

т. е. того же порядка, как $\dot{\omega}$. Пренебрегая величинами такого порядка*), мы сохраним в квадратных скобках только член $\omega_{ik}\omega_{jk}$. После этих упрощений мы можем написать „внутренние“ уравнения движения (73.08) в виде

$$\rho\left\{\frac{\partial u_a}{\partial x_i}+\omega_{ik}\omega_{jk}(x_j-a_j)\right\}+\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{73.15}$$

Положим

$$u_a+\frac{1}{2}\omega_{ik}\omega_{jk}(x_i-a_i)(x_j-a_j)=V_a. \tag{73.16}$$

Это есть потенциал тяготения, сложенный с потенциалом центробежной силы. Уравнение (73.15) может быть написано в виде

$$\rho\frac{\partial V_a}{\partial x_i}+\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{73.17}$$

Этому уравнению можно удовлетворить, предположив, что тензор напряжений внутри тела p_{ik} сводится к изотропному давлению p

$$p_{ik}=-p\delta_{ik} \tag{73.18}$$

(такому условию всегда удовлетворяет жидкость). Если бы мы не пренебрегали в (73.08) величинами $\dot{\omega}_{ji}$, мы должны были бы рассматривать и не-диагональные элементы тензора напряжений p_{ik}. В самом деле, очевидно, что изменение угловой скорости вращения упругого тела должно вызывать в нем напряжения, которые не сводятся к изотропному давлению.

При условии (73.18) уравнение (73.17) приводится к следующему:

$$\rho\frac{\partial V_a}{\partial x_i}=\frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{73.19}$$

Вытекающее из него соотношение

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\frac{\partial V_a}{\partial x_i}-\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial V_a}{\partial x_k}=0 \tag{73.20}$$

показывает, что V_a и ρ должны быть связаны зависимостью, не содержащей координат, так что если ρ есть функция от одного параметра α, то и V_a должно быть функцией от того же параметра

$$\rho=\rho(\alpha); \qquad V_a=V_a(\alpha). \tag{73.21}$$

Внутренний потенциал u_a есть функционал от ρ; подставляя в (73.16) его явное выражение, получим

$$\gamma\int\limits_{(a)}\frac{\rho'(dx')^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\frac{1}{2}\omega_{ik}\omega_{jk}(x_i-a_i)(x_k-a_k)=V_a. \tag{73.22}$$

---

*) Такое пренебрежение делается только в уравнениях внутренней задачи [см. (80.13)].

Задача состоит в том, чтобы при заданной плотности ρ найти форму тела, т. е. форму области интегрирования (a). Эта форма должна быть такова, чтобы в любой точке внутри тела выполнялось условие (73.21), т. е. чтобы значение левой части (73.22) само зависело только от плотности (или от того параметра, от которого зависит плотность). В частности, на поверхности тела должно быть $\alpha = \mathrm{const}$ и $V_a = \mathrm{const}$.

Если тело не вращается ($\omega_{ik} = 0$), то всем условиям, очевидно, удовлетворяет сферически-симметричное распределение плотности при сферической форме тела. В случае вращения ($\omega_{ik} \neq 0$) нахождение формы тела представляет чрезвычайно трудную математическую задачу, которой занимались многие математики. Наиболее полные результаты были получены А. И. Ляпуновым, который, для вращающейся неоднородной жидкости, исследовал фигуры равновесия, близкие к эллипсоидам, причем рассматривал также вопрос о их устойчивости [21, 22]. Мы будем поэтому называть уравнение (73.22) уравнением Ляпунова.

Если условие (73.20) или (73.21) выполнено, то давление p может быть найдено из уравнения

$$dp = \rho\, dV_a \tag{73.23}$$

или

$$p = \int^{\alpha} \rho(\alpha) \frac{dV_a}{d\alpha}\, d\alpha. \tag{73.24}$$

Аддитивную постоянную мы определим из условия, чтобы на поверхности тела давление p обращалось в нуль.

В выражения для тензора массы, а также в уравнения (73.01) и (73.02) входит упругая энергия Π единицы массы, определяемая, согласно (30.11), по формуле

$$\Pi = \int^{p} \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho}. \tag{73.25}$$

Вследствие (73.23), входящий сюда интеграл есть как раз V_a или величина, отличающаяся от V_a на постоянную. Эту постоянную можно определить так, чтобы было

$$p = \rho\,(V_a - \Pi). \tag{73.26}$$

Это выражение будет использовано при выводе уравнений движения из интегральных соотношений (73.01).

§ 74. Вычисление некоторых интегралов, характеризующих внутреннюю структуру тела

Для вывода уравнений движения из интегральных соотношений (73.01) необходимо вычислить ряд интегралов, значение которых зависит от распределения плотности внутри тела и вообще от его внутренней структуры. Чтобы не прерывать в дальнейшем изложения, мы сосредоточим вычисление таких интегралов в этом параграфе.

Начнем с интегралов, зависящих от моментов инерции тела и от его угловой скорости. Обозначим через Ω_a потенциал центробежных сил

$$\Omega_a = \frac{1}{2}\omega_{ik}^{(a)}\omega_{jk}^{(a)}(x_i - a_i)(x_j - a_j). \tag{74.01}$$

Уравнение Ляпунова (73.16) примет вид

$$u_a + \Omega_a = V_a. \tag{74.02}$$

Рассмотрим интеграл

$$T_a = \int \rho\Omega_a (dx)^3. \tag{74.03}$$

Мы имеем, очевидно,

$$T_a = \frac{1}{2}\omega_{ik}^{(a)}\omega_{jk}^{(a)} I_{ij}^{(a)}, \tag{74.04}$$

так что T_a есть кинетическая энергия вращения тела (a). Рассмотрим также моменты первого порядка с весовой функцией $\rho\Omega_a$, т. е. величины

$$T_{ai} = \int \rho\Omega_a (x_i - a_i)(dx)^3. \tag{74.05}$$

При помощи обозначений (72.22) мы можем написать

$$T_{ai} = \frac{1}{2}\omega_{kj}^{(a)}\omega_{lj}^{(a)} I_{ikl}^{(a)}. \tag{74.06}$$

Эти величины равны нулю, если тело имеет три плоскости симметрии.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\int \rho u_a (dx)^3, \tag{74.07}$$

который представляет энергию взаимного притяжения частиц, составляющих тело (взятую с обратным знаком), а также моменты первого порядка

$$\varepsilon_{ai} = \frac{1}{2}\int \rho u_a (x_i - a_i)(dx)^3, \tag{74.08}$$

Используя уравнение Пуассона (71.12), можно представить величину ε_a в виде:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{8\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} (\operatorname{grad} u_a)^2 (dx)^3. \tag{74.09}$$

Аналогично могут быть преобразованы и моменты ε_{ai}, а именно:

$$\varepsilon_{ai} = \frac{1}{8\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} (\operatorname{grad} u_a)^2 (x_i - a_i)(dx)^3. \tag{74.10}$$

Припоминая определение (71.16) величин $q_{ik}^{(a)}$

$$q_{ik}^{(a)} = \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} u_a)^2 - \frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_a}{\partial x_k}, \tag{74.11}$$

причем

$$q_{kk}^{(a)} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u_a)^2, \tag{74.12}$$

мы можем вместо (74.09) и (74.10) написать:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} q_{kk}^{(a)}(dx)^3, \tag{74.13}$$

$$\varepsilon_{ai} = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} q_{kk}^{(a)}(x_i - a_i)(dx)^3. \tag{74.14}$$

Эти интегралы представляют частные случаи более общих

$$B_{kl}^{(a)} = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} q_{kl}^{(a)}(dx)^3, \tag{74.15}$$

$$B_{i,\,kl}^{(a)} = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_{(\infty)} q_{kl}^{(a)}(x_i - a_i)(dx)^3. \tag{74.16}$$

Помимо рассмотренных выше интегралов

$$\varepsilon_a = B_{kk}^{(a)}; \qquad \varepsilon_{ai} = B_{i,\,kk}^{(a)}, \tag{74.17}$$

через величины (74.15), (74.16) могут быть выражены и другие нужные нам интегралы.

Рассмотрим интеграл по объему от давления p:

$$I = \int\limits_{(a)} p\,(dx)^3. \tag{74.18}$$

Так как давление p обращается в нуль вне массы, то, интегрируя по частям, мы получаем:

$$3I = -\int\limits_{(a)} (x_i - a_i)\frac{\partial p}{\partial x_i}(dx)^3. \tag{74.19}$$

Воспользовавшись соотношением (73.19), мы можем также написать

$$3I = -\int\limits_{(a)} (x_i - a_i)\,\rho\,\frac{\partial V_a}{\partial x_i}(dx)^3. \tag{74.20}$$

Но из уравнения Ляпунова следует, в силу того, что Ω_a есть однородная квадратичная функция от разностей $x_i - a_i$,

$$(x_i - a_i)\frac{\partial V_a}{\partial x_i} = (x_i - a_i)\frac{\partial u_a}{\partial x_i} + 2\Omega_a. \tag{74.21}$$

С другой стороны, согласно (71.18), мы имеем

$$\rho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi\gamma} \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k}. \tag{74.22}$$

Подставляя (74.21) в (74.20) и пользуясь (74.22), будем иметь:

$$3I = -\frac{1}{4\pi\gamma} \int (x_i - a_i) \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} (dx)^3 - 2 \int \rho \Omega_a (dx)^3. \tag{74.23}$$

Интегрируя по частям и пользуясь выражениями (74.03) и (74.13) для T_a и ε_a, получим окончательно

$$3 \int\limits_{(a)} p (dx)^3 = \varepsilon_a - 2T_a. \tag{74.24}$$

Эта формула показывает, что, когда тело вращается, среднее давление внутри него будет меньше, чем при отсутствии вращения, что и следовало ожидать.

Аналогично получается соотношение

$$2 \int\limits_{(a)} p \cdot (x_i - a_i) (dx)^3 = \eta_{ai} - T_{ai}, \tag{74.25}$$

где

$$\eta_{ai} = \frac{1}{8\pi\gamma} \int\limits_{\infty} \left\{ (x_k - a_k) q_{ik}^{(a)} + (x_i - a_i) q_{kk}^{(a)} \right\} (dx)^3, \tag{74.26}$$

или, в обозначениях (74.16):

$$\eta_{ai} = \frac{1}{2} (B_{k,\,ik}^{(a)} + B_{i,\,kk}^{(a)}). \tag{74.27}$$

Формулы (74.15) и (74.16) дают представление величин $B_{kl}^{(a)}$ и $B_{i,\,kl}^{(a)}$ в виде интегралов по всему бесконечному объему, но их можно также представить в виде интегралов по объему, занятому массой (a). Чтобы произвести это преобразование, введем функцию w_a, определяемую равенством

$$w_a = \frac{\gamma}{2} \int\limits_{(a)} \rho' \, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \, (dx')^3, \tag{74.28}$$

в силу которого

$$\Delta w_a = u_a. \tag{74.29}$$

Тогда нетрудно доказать равенство

$$\frac{1}{4\pi\gamma} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_k} (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k} (dx)^3, \tag{74.30}$$

откуда вследствие (74.11)

$$B_{ik}^{(a)} = \int\limits_{(a)} \rho \left(\frac{1}{2}\delta_{ik}\Delta w_a - \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k}\right)(dx)^3. \tag{74.31}$$

Здесь интеграл распространен уже только по объему массы (a).

Подставляя в (74.31) выражение (74.28) для w_a в виде интеграла и выполняя дифференцирование, можем также написать:

$$B_{ik}^{(a)} = \frac{\gamma}{2} \int\limits_{(a)}\int \rho\rho' \frac{(x_i - x_i')(x_k - x_k')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (dx)^3 (dx')^3. \tag{74.32}$$

Аналогично формуле (74.31), которую можно написать в виде

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k} (dx)^3 = \varepsilon_a \delta_{ik} - B_{ik}^{(a)}, \tag{74.33}$$

доказывается и формула

$$\int\limits_{(a)} \rho \cdot \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k} (x_j - a_j)(dx)^3 = \varepsilon_{aj}\delta_{ik} - B_{j,ik}^{(a)}. \tag{74.34}$$

Эти соотношения также будут нужны в дальнейшем.

В заключение заметим, что вследствие соотношения (74.22) и уравнений движения (73.04) деленную на $4\pi\gamma$ величину $q_{ik}^{(a)}$ можно толковать, в рамках ньютоновой теории, как тензор напряжений гравитационного поля массы (a).

§ 75. Преобразование уравнений движения, написанных в интегральной форме

Мы будем исходить из уравнений движения в интегральной форме, приведенных в начале § 73. Выпишем эти уравнения еще раз, учитывая, что, согласно (73.18), напряжения сводятся к изотропному давлению p. Мы имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \left\{\rho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi + 3U\right)\right] + \frac{1}{c^2} p v_i\right\}(dx)^3 =$$
$$= \int\limits_{(a)} \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left[\rho + \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right) + \frac{3p}{c^2}\right](dx)^3 +$$
$$+ \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)\rho v_k (dx)^3, \tag{75.01}$$

причем

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left[\rho + \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right) + \frac{3p}{c^2}\right], \tag{75.02}$$

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i \tag{75.03}$$

Положим здесь для краткости

$$\sigma = \rho + \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right) + \frac{3p}{c^2}, \tag{75.04}$$

так что вместо (75.02) можно писать

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma. \tag{75.05}$$

Пренебрегая малыми величинами, мы получим из (75.01):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\left\{\rho v_i\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi + 3U\right)\right] + \frac{1}{c^2}pv_i\right\}(dx)^3 =$$
$$= \int\limits_{(a)}\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 + \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)(dx)^3 -$$
$$- \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho v_k\frac{\partial U_k}{\partial x_i}(dx)^3. \tag{75.06}$$

Заметим прежде всего, что

$$\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)(dx)^3 = \frac{4}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\rho U_i(dx)^3 \tag{75.07}$$

так что этот член может быть перенесен в левую часть и внесен под знак производной по времени.

Рассмотрим теперь первый член правой части (75.06); он является обобщением вычисленного в § 71 выражения (71.11), соответствующего ньютонову приближению. Разлагая, подобно (71.10), потенциал U^* на внутренний и внешний

$$U^* = \overset{*}{u}_a + U^{*(a)}, \tag{75.08}$$

мы будем иметь

$$\int\limits_{(a)}\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 = \int\limits_{(a)}\frac{\partial \overset{*}{u}_a}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 + \int\limits_{(a)}\frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i}\sigma(dx)^3. \tag{75.09}$$

В ньютоновом приближении первый член справа равнялся бы, согласно (71.19), нулю, как равнодействующая внутренних гравитационных сил. В релятивистском же приближении, когда уравнение Пуассона заменяется уравнением (75.03), это уже будет не так, вследствие запаздывания. Подставляя в рассматриваемый интеграл величину σ из уравнения

$$\Delta\overset{*}{u}_a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overset{*}{u}_a}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma. \tag{75.10}$$

справедливого внутри массы (a), и учитывая, что интеграл от члена, содержащего оператор Лапласа, равен нулю, получим

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma c^2} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_a^*}{\partial t^2} (dx)^3 \tag{75.11}$$

или

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \frac{\partial u_a^*}{\partial t} (dx)^3, \tag{75.12}$$

так как

$$\int\limits_{(\infty)} \frac{\partial^2 u_a^*}{\partial x_i \partial t} \cdot \frac{\partial u_a^*}{\partial t} (dx)^3 = 0. \tag{75.13}$$

Вследствие малого множителя перед интегралом, мы можем в правой части (75.12) заменить величину u_a^* ньютоновым потенциалом u_a, после чего формула (75.12) напишется

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial t} (dx)^3. \tag{75.14}$$

Вводя, согласно (74.28), величину w_a, связанную с u_a соотношением

$$\Delta w_a = u_a, \tag{75.15}$$

можно преобразовать интеграл в правой части уравнения (75.14) и написать это уравнение в виде

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} (dx)^3. \tag{75.16}$$

Последнюю формулу можно было бы вывести и более прямым путем. подставив в интеграл слева приближенное решение уравнения (75.10).

Таким образом, первый член правой части (75.06) можно представить в виде

$$\int\limits_{a} \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} (dx)^3. \tag{75.17}$$

Сделаем здесь еще одно преобразование. Введем функцию

$$W = \frac{1}{2} \gamma \int\limits_{(\infty)} \rho' \,|\, \mathbf{r} - \mathbf{r}' \,|\, (dx')^3, \tag{75.18}$$

представляющую решение уравнения

$$\Delta W = U, \tag{75.19}$$

где U есть ньютонов потенциал. Из сравнения (74.28) с (75.18) очевидно, что

$$W = \sum_a w_a, \tag{75.20}$$

подобно тому как ньютонов потенциал есть сумма потенциалов отдельных масс

$$U = \sum_a u_a. \tag{75.21}$$

Разложению (71.10) ньютонова потенциала на внутренний и внешний соответствует разложение

$$W = w_a + W^{(a)}. \tag{75.22}$$

Применяя это разложение, можем написать вместо (75.17):

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3. \tag{75.23}$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас к формуле (75.16), по отношению к совокупности всех рассматриваемых масс, мы приходим к формуле

$$\int\limits_{(\infty)} \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(\infty)} \rho\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3, \tag{75.24}$$

откуда следует, что

$$\sum_a \left\{ \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\,\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3 \right\} = 0. \tag{75.25}$$

Рассмотрим теперь последний член уравнения 75.06). Разделяя „вектор-потенциал“ U_k на внутренний и внешний

$$U_k = u_{ak} + U_k^{(a)}, \tag{75.26}$$

заключаем, аналогично предыдущему (см. § 71), что в силу уравнения Пуассона (75.03) будет:

$$\int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial u_{ak}}{\partial x_i}(dx)^3 = 0 \tag{75.27}$$

и, следовательно, последний член в (75.06) будет равен

$$-\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i}(dx)^3 = -\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i}(dx)^3. \tag{75.28}$$

При этом будет

$$\int\limits_{(\infty)} \rho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i} (dx)^3 = 0. \tag{75.29}$$

Мы рассмотрели все члены правой части (75.06). Из них выражение (75.07) и последний член правой части (75.23), имеющие вид производной по времени, мы перенесем налево, после чего уравнения движения (75.06) примут вид

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai}, \tag{75.30}$$

где

$$P_{ai} = \int\limits_{(a)} \left\{\rho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U\right)\right] + \frac{1}{c^2} p v_i - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{c^2} \rho U_i - \frac{1}{c^2} \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}\right\} (dx)^3 \tag{75.31}$$

и

$$F_{ai} = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \rho (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 - \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3. \tag{75.32}$$

В силу уравнений (75.25) — (75.29) будет

$$\sum_a F_{ai} = 0 \tag{75.33}$$

и, следовательно,

$$\sum_a P_{ai} \equiv P_i = \mathrm{const}. \tag{75.34}$$

Величину P_{ai} можно, по аналогии с ньютоновой механикой, толковать как составляющую количества движения массы (a). Тогда величина F_{ai} будет составляющей силы, действующей на эту массу. Такое толкование, вполне естественное в ньютоновом приближении, является здесь, впрочем, несколько искусственным, поскольку количество движения P_{ai} зависит, согласно (75.31), не только от внутренней структуры тела и его скорости, но и от потенциалов U, U_i и W.

Выделим в выражении (75.31) для P_{ai} члены, зависящие только от внутренней структуры.

Из уравнений

$$\Delta u_a = -4\pi\gamma\rho; \qquad \Delta u_{ai} = -4\pi\gamma\rho v_i, \tag{75.35}$$

которым удовлетворяют внутри массы (a) величины u_a, u_{ai}, вытекает равенство

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i u_a (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho u_{ai} (dx)^3. \tag{75.36}$$

Используя это равенство, мы можем написать выражение для P_{ai} в виде

$$P_{ai} = \int\limits_{(a)} \left\{ \rho v_i + \frac{1}{c^2} \rho v_i \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - u_a \right) + \frac{1}{c^2} p v_i - \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} \right\} (dx)^3 +$$

$$+ \frac{3}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho v_i U^{(a)} (dx)^3 - \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho U_i^{(a)} (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3. \qquad (75.37)$$

Здесь первый интеграл зависит только от движения и от внутренней структуры тела (a), тогда как остальные три зависят также и от потенциалов внешнего поля, т. е. от взаимодействия тела (a) с другими телами. Вычислением этих интегралов мы займемся в следующем параграфе.

§ 76. Вычисление количества движения во втором приближении

В предыдущем параграфе мы привели уравнения движения к виду

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai}, \qquad (76.01)$$

где количество движения P_{ai} и сила F_{ai} выражены в виде интегралов (75.31) и (75.32). Нам надлежит вычислить эти интегралы и выразить их через параметры, характеризующие движение тел как целых.

Для вычисления P_{ai} воспользуемся представлением этой величины в виде (75.37). Сообразно разложению количества движения на собственное и происходящее от взаимодействия, напишем

$$P_{ai} = (P_{ai})_{\text{собств}} + (P_{ai})_{\text{взаим}}, \qquad (76.02)$$

$$(P_{ai})_{\text{собств}} = \int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 + \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} v_i \left(\frac{\rho}{2} v^2 + \rho \Pi - \rho u_a + p \right) (dx)^3 -$$

$$- \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} (dx)^3, \qquad (76.03)$$

$$(P_{ai})_{\text{взаим}} = \frac{3}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho v_i U^{(a)} (dx)^3 - \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho U_i^{(a)} (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3. \qquad (76.04)$$

Вычислим сперва интегралы, входящие в (76.03). Первый из них дает количество движения в ньютоновом приближении; он равен

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i (dx)^3 = M_a \dot{a}_i \qquad (76.05)$$

в согласии с (71.08). При вычислении второго интеграла мы будем иметь в виду вытекающее из (73.26) и (74.02) соотношение

$$\rho\Pi - \rho u_a + p = \rho\Omega_a, \tag{76.06}$$

а также формулу

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\dot{a}_k^2 + \dot{a}_k\omega_{jk}^{(a)}(x_j - a_j) + \Omega_a, \tag{76.07}$$

которая следует из выражения

$$v_i = \dot{a}_i + \omega_{ji}^{(a)}(x_j - a_j) \tag{76.08}$$

для скорости внутри тела (a). Второй интеграл будет равен

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i\left(\frac{1}{2}v^2 + \Omega_a\right)(dx)^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}M_a\dot{a}_k^2\right)\cdot\dot{a}_i + 2T_a\dot{a}_i + \omega_{ri}^{(a)}\omega_{sk}^{(a)}I_{rs}^{(a)}\dot{a}_k + 2\omega_{ji}^{(a)}T_{aj}, \tag{76.09}$$

если воспользоваться обозначениями (74.03) и (74.05). Последний интеграл в (76.03) может быть преобразован к виду

$$-\int\limits_{(a)} \rho\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \rho v_k\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i\,\partial x_k}(dx)^3. \tag{76.10}$$

Применяя затем формулы (74.33) и (74.34), получим

$$-\int\limits_{(a)} \rho\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3 = \varepsilon_a\dot{a}_i - B_{ik}^{(a)}\dot{a}_k + \omega_{ji}^{(a)}\varepsilon_{aj} - \omega_{jk}^{(a)}B_{j,\,ik}^{(a)}. \tag{76.11}$$

Собирая все три интеграла вместе и вводя обозначения

$$Z_{ik}^{(a)} = (2T_a + \varepsilon_a)\,\delta_{ik} + \omega_{ri}^{(a)}\omega_{sk}^{(a)}I_{rs}^{(a)} - B_{ik}^{(a)}, \tag{76.12}$$

$$Z_i^{(a)} = 2\omega_{ji}^{(a)}T_{aj} + \omega_{ji}^{(a)}\varepsilon_{aj} - \omega_{jk}^{(a)}B_{j,\,ik}^{(a)}, \tag{76.13}$$

получим для „собственной“ части количества движения выражение

$$(P_{ai})_{\text{собств}} = M_a\dot{a}_i + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}M_a\dot{a}_k^2\right)\dot{a}_i + \frac{1}{c^2}(Z_{ik}^{(a)}\dot{a}_k + Z_i^{(a)}). \tag{76.14}$$

Здесь первый член представляет, как мы уже отмечали, ньютоново выражение для количества движения. Второй член дает известную из механики материальной точки добавку к нему. Последний член можно толковать на основе понятия о тензоре эффективной массы (матрица коэффициентов при составляющих скорости в выражении для составляющих количества движения).

Если мы положим

$$K = \sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_i^2 + T_a\right) + \\ + \frac{1}{c^2} \sum_a \left[\frac{1}{8} M_a (\dot{a}_k^2)^2 + \frac{1}{2} Z_{ik}^{(a)} \dot{a}_i \dot{a}_k + Z_i^{(a)} \dot{a}_i\right], \tag{76.15}$$

то мы будем, очевидно, иметь

$$(P_{ai})_{\text{соб}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{a}_i}. \tag{76.16}$$

Этим уравнением величина K определяется с точностью до функции, не зависящей от $\dot{a}_i$. Мы добавили в (76.15) члены $\sum T_a$ для того, чтобы в нерелятивистском приближении величина K переходила в обычное выражение для кинетической энергии системы тел.

Заметим, что для невращающихся тел со сферической симметрией мы имеем

$$B_{ik}^{(a)} = \frac{1}{3} \varepsilon_a \delta_{ik}; \quad Z_{ik}^{(a)} = \frac{2}{3} \varepsilon_a \delta_{ik}; \quad Z_i^{(a)} = 0. \tag{76.17}$$

Поэтому, если мы введем эффективную массу

$$m_a = M_a + \frac{2}{3c^2} \varepsilon_a, \tag{76.18}$$

то будет, с точностью до малых величин,

$$K = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{a}_i^2 + \frac{1}{c^2} \sum_a \frac{1}{8} m_a (\dot{a}_k^2)^2, \tag{76.19}$$

как для материальной точки. Формула (76.18) показывает, что тензор эффективной массы приводится, в данном случае, к скаляру.

Переходим к вычислению той части количества движения, которая зависит от взаимодействия. Оценим прежде всего порядок величины этой части. Нетрудно видеть, что все три члена в (76.04) будут иметь один и тот же порядок величины, а именно

$$(P_{ai})_{\text{взаим}} = O\left(M \frac{q^3}{c^2}\right), \tag{76.20}$$

где q — неоднократно использованная нами величина порядка скорости. При вычислении интегралов в (76.04) мы сохраним, помимо главных членов, которые будут только что указанного порядка, также и члены порядка L/R по отношению к главным; члены же более высокого порядка относительно L/R мы будем отбрасывать.

Для вычисления интегралов с требуемой точностью в выражении (71.27) для ньютонова потенциала достаточно сохранить первый член и писать

$$U^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \frac{\gamma M_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|}. \tag{76.21}$$

В выражении

$$U_i^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \gamma \int_{(b)} \rho' v'_i \frac{(dx')^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{76.22}$$

для вектор-потенциала следует сохранить, кроме главного, еще один член. Пользуясь формулой (71.25), получаем

$$U_i^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \frac{\gamma M_b \dot{b}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} - \sum_b{}' \gamma \omega_{ri}^{(b)} I_{rk}^{(b)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}. \tag{76.23}$$

Наконец, функция

$$W^{(a)}(\mathbf{r}) = \sum_b{}' \frac{1}{2} \gamma \int_{(b)} \rho' |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| (dx')^3 \tag{76.24}$$

с требуемой точностью будет равна

$$W^{(a)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_b{}' \gamma M_b |\mathbf{r}-\mathbf{b}| + \frac{1}{4} \sum_b{}' \gamma I_{jk}^{(b)} \frac{\partial^2 |\mathbf{r}-\mathbf{b}|}{\partial x_j \partial x_k}. \tag{76.25}$$

Мы сохранили здесь, помимо главного, еще один член, чтобы обеспечить надлежащую точность в выражении для производной от $W^{(a)}$ по времени.

Подставляя в первый из интегралов (76.04) разложение $U^{(a)}(\mathbf{r})$ в ряд Тейлора вблизи точки $x_k = a_k$

$$U^{(a)}(\mathbf{r}) = U^{(a)}(\mathbf{a}) + (x_k - a_k)\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k}\right)_a + \ldots, \tag{76.26}$$

будем иметь

$$3 \int_{(a)} \rho v_i U^{(a)}(\mathbf{r}) (dx)^3 = 3 M_a \dot{a}_i U^{(a)}(\mathbf{a}) + 3 \omega_{ji}^{(a)} I_{ji}^{(a)} \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k}\right)_a. \tag{76.27}$$

Сюда нужно подставить выражение для ньютонова потенциала внешних масс из (76.21). Тогда получится

$$3 \int \rho v_i U^{(a)}(\mathbf{r}) (dx)^3 =$$

$$= \sum_b{}' \frac{3\gamma M_a M_b \dot{a}_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \sum_b{}' 3\gamma M_b \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{76.28}$$

Аналогично вычисляется второй интеграл в (76.04). Мы имеем

$$-4\int\limits_{(a)}\rho U_i^{(a)}(\mathbf{r})(dx)^3 = -4M_a U_i^{(a)}(\mathbf{a}) \tag{76.29}$$

и после подстановки выражения (76.23) для $U_i^{(a)}$:

$$-4\int\limits_{(a)}\rho U_i^{(a)}(\mathbf{r})(dx)^3 =$$

$$= -\sum_b{}' \frac{4\gamma M_a M_b \dot{b}_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \sum_b{}' 4\gamma M_a \omega_{si}^{(b)} I_{sk}^{(b)} \frac{\partial}{\partial a_k}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{76.30}$$

Наконец, последний интеграл в (76.04) равен

$$-\int\limits_{(a)}\rho\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3 = -M_a\left(\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}\right)_a. \tag{76.31}$$

Дифференцируя (76.25) по времени, получаем

$$\frac{\partial W^{(a)}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma M_b \dot{b}_k \frac{\partial|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}{\partial x_k} + \frac{1}{4}\sum_b{}' \gamma \dot{I}_{jk}^{(b)} \frac{\partial^2|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}{\partial x_j\,\partial x_k}. \tag{76.32}$$

Членами с третьими производными от $|\mathbf{r}-\mathbf{b}|$ мы должны здесь, с принятой точностью, пренебречь. Величина $\dot{I}_{jk}^{(b)}$ имеет, согласно (72.16), значение

$$\dot{I}_{jk}^{(b)} = \omega_{sj}^{(b)} I_{sk}^{(b)} + \omega_{sk}^{(b)} I_{sj}^{(b)}. \tag{76.33}$$

Дифференцируя (76.32), получаем

$$\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t} = -\frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma M_b \dot{b}_k \frac{\partial^2|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}{\partial x_i\,\partial x_k} + \frac{1}{4}\sum_b{}' \gamma \dot{I}_{jk}^{(b)} \frac{\partial^3|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k} \tag{76.34}$$

и, следовательно,

$$-\int\rho\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma M_a M_b \dot{b}_k \frac{\partial^2|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_i\,\partial a_k} - \frac{1}{4}\sum_b{}' \gamma M_a \dot{I}_{jk}^{(b)} \frac{\partial^3|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_i\,\partial a_j\,\partial a_k}. \tag{76.35}$$

Согласно (76.04), деленная на c^2 сумма выражений (76.28), (76.30) и (76.35) дает величину $(P_{ai})_{\text{взаим}}$.

Введем две функции, K_1 и K_2, из коих первая, K_1, однородна и квадратична в скоростях и однородна степени (—1) в координатах, а вторая, K_2, линейна и однородна в скоростях и однородна степени (—2) в координатах.

Положим

$$K_1 = \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,\,b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} (3\dot{a}_i^2 + 3\dot{b}_i^2 - 8\dot{a}_i \dot{b}_i) +$$

$$+ \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,\,b \\ (a \neq b)}} \gamma M_a M_b \dot{a}_i \dot{b}_k \frac{\partial^2}{\partial a_i \, \partial a_k} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|; \qquad (76.36)$$

$$K_2 = \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,\,b \\ (a \neq b)}} \gamma \left[M_b \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} (3\dot{a}_i - 4\dot{b}_i) - \right.$$

$$\left. - M_a \omega_{ji}^{(b)} I_{jk}^{(b)} (3\dot{b}_i - 4\dot{a}_i) \right] \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} +$$

$$+ \frac{1}{8c^2} \sum_{\substack{a,\,b \\ (a \neq b)}} \gamma (M_b \dot{b}_j \dot{I}_{kl}^{(a)} - M_a \dot{a}_j \dot{I}_{kl}^{(b)}) \frac{\partial^3 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_j \, \partial a_k \, \partial a_l}. \qquad (76.37)$$

Тогда нетрудно проверить, что будет

$$(P_{ai})_{\text{взаим}} = \frac{\partial K_1}{\partial \dot{a}_i} + \frac{\partial K_2}{\partial \dot{a}_i}. \qquad (76.38)$$

Имея в виду оценки

$$\omega \sim \frac{q}{L}; \quad I \sim ML^2; \quad \dot{I} \sim MqL, \qquad (76.39)$$

нетрудно заключить, что порядок величины функций K_1 и K_2 будет

$$K_1 \sim M \frac{q^4}{c^2}; \quad K_2 \sim M \frac{q^4}{c^2} \cdot \frac{L}{R}. \qquad (76.40)$$

Таким образом, функция K_2 будет мала по сравнению с K_1.

Сопоставляя формулы (76.16) и (76.38), мы можем написать для полного количества движения выражение

$$P_{ai} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}_i} (K + K_1 + K_2), \qquad (76.41)$$

где K, K_1 и K_2 имеют значения (76.15), (76.36) и (76.37).

§ 77. Вычисление силы

Для вычисления интегралов, входящих, согласно (75.32), в выражение для силы

$$F_{ai} = \int_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \rho \, (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \, \partial t} (dx)^3 -$$

$$- \frac{4}{c^2} \int_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3, \qquad (77.01)$$

нужно, прежде всего, найти с достаточной точностью потенциал U^*; что касается потенциалов W и U_k, то для них достаточно уже найденного первого приближения [формулы (76.23) и (76.24)].

Согласно (75.05), потенциал U^* удовлетворяет уравнению

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma, \tag{77.02}$$

где величина σ имеет значение

$$\sigma = \rho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{2}\rho v^2 + \rho\Pi - \rho U + 3p\right) \tag{77.03}$$

и мало отличается от ρ. Если известен ньютонов потенциал U, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho, \tag{77.04}$$

то обобщенный ньютонов потенциал U^* получается из U введением двух поправок: поправки на запаздывание и поправки от замены ρ на σ. Последняя равна

$$U_{\text{доб}} = \gamma \int\limits_{(\infty)} \frac{(\sigma' - \rho')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (dx')^3. \tag{77.05}$$

Что касается поправки на запаздывание, то она выражается через введенную ранее [формула (75.18)] функцию

$$W = \frac{1}{2}\gamma \int\limits_{(\infty)} \rho' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| (dx')^3. \tag{77.06}$$

Таким образом, мы имеем

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + U_{\text{доб}}. \tag{77.07}$$

Займемся вычислением $U_{\text{доб}}$. Разность $\sigma - \rho$ мы напишем в виде

$$\sigma - \rho = \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{2}\rho v^2 + \rho\Pi - \rho u_a + 3p\right) - \frac{1}{c^2}\rho U^{(a)}. \tag{77.08}$$

Первый член здесь зависит только от внутренней структуры тела (a) и от его скорости, а второй — также и от внешнего потенциала. Используя равенства (76.06) и (76.07), мы будет иметь

$$\int\limits_{(a)} \left(\frac{3}{2}\rho v^2 + \rho\Pi - \rho u_a + 3p\right)(dx)^3 = \frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + \xi_a, \tag{77.09}$$

где

$$\xi_a = \int\limits_{(a)} (4\rho\Omega_a + 2p)(dx)^3, \tag{77.10}$$

и для момента первого порядка

$$\int\limits_{(a)} \left(\frac{3}{2}\rho v^2 + \rho\Pi - \rho u_a + 3p\right)(x_i - a_i)(dx)^3 = 3\dot{a}_k \omega_{jk}^{(a)} I_{ji}^{(a)} + \xi_{ai}, \tag{77.11}$$

где

$$\xi_{ai} = \int\limits_{(a)} (4\rho\Omega_a + 2p)(x_i - a_i)(dx)^3. \tag{77.12}$$

Входящие сюда интегралы вычислены в § 74, а именно

$$\xi_a = \frac{2}{3}\varepsilon_a + \frac{8}{3}T_a, \tag{77.13}$$

$$\xi_{ai} = \eta_{ai} + 3T_{ai}. \tag{77.14}$$

Отсюда получаем приближенно:

$$\int\limits_{(a)} \left(\frac{3}{2}\rho v^2 - \rho\Pi - \rho u_a + 3p\right)' \frac{(dx')^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + \xi_a\right) \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + (3\dot{a}_k \omega_{jk}^{(a)} I_{ji}^{(a)} + \xi_{ai}) \frac{x_i - a_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}. \tag{77.15}$$

Далее, с требуемой точностью будем иметь

$$\int\limits_{(a)} \frac{\rho' U^{(a)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}(dx')^3 = \frac{M_a U^{(a)}(\mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}. \tag{77.16}$$

Сопоставляя найденные формулы, получим для величины (77.07) выражение

$$U_{\text{доб}} = \frac{\gamma}{c^2} \sum_a \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 - M_a U^{(a)}(\mathbf{a}) + \xi_a\right) \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} +$$

$$+ \frac{\gamma}{c^2} \sum_a (3\dot{a}_k \omega_{jk}^{(a)} I_{ji}^{(a)} + \xi_{ai}) \frac{x_i - a_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}. \tag{77.17}$$

В формулу (77.01) для силы, действующей на массу (a), входит не весь потенциал U^*, а лишь та его часть, которая происходит от внешних масс.

Эта часть равна

$$U^{*(a)} = U^{(a)} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial t^2} + U_{\text{доб}}^{(a)}, \tag{77.18}$$

где величины $U^{(a)}(\mathbf{r})$ и $W^{(a)}(\mathbf{r})$ были определены раньше (§ 75), а добавка $U^{(a)}_{\text{доб}}$ равна

$$U^{(a)}_{\text{доб}} = \frac{\gamma}{c^2} \sum_b{}' \left(\frac{3}{2} M_b \dot{b}_k^2 - M_b U^{(b)}(\mathbf{b}) + \xi_b \right) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} +$$
$$+ \frac{\gamma}{c^2} \sum_b{}' (3\dot{b}_k \omega^{(b)}_{jk} I^{(b)}_{ji} + \xi_{bi}) \frac{x_i - b_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3}. \qquad (77.19)$$

Найденные значения потенциалов необходимо теперь подставить в выражение (77.01) для силы. Мы получим:

$$F_{ai} = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \rho (dx)^3 + \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}_{\text{доб}}}{\partial x_i} \rho (dx)^3 + \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (\sigma - \rho)(dx)^3 +$$
$$+ \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t^2} (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 -$$
$$- \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U^{(a)}_k}{\partial x_i} (dx)^3. \qquad (77.20)$$

Здесь первый интеграл есть ньютоново выражение для силы; он уже вычислен нами в § 71. Мы имеем, согласно (71.33),

$$\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 = - \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \qquad (77.21)$$

где Φ есть ньютонова потенциальная энергия системы тел [формула (71.32)]. Второй интеграл, с требуемой точностью, будет равен

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}_{\text{доб}}}{\partial x_i} \rho (dx)^3 = M_a \left(\frac{\partial U^{(a)}_{\text{доб}}}{\partial x_i} \right)_a, \qquad (77.22)$$

где под $U^{(a)}_{\text{доб}}$ можно разуметь выражение (77.19). Третий интеграл может быть вычислен при помощи формул (77.08)—(77.14). Мы получим:

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (\sigma - \rho)(dx)^3 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \right)_a \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + \xi_a \right) +$$
$$+ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_a (3\dot{a}_k \omega^{(a)}_{sk} I^{(a)}_{sj} + \xi_{aj}) - \frac{1}{c^2} M_a \left(U^{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \right)_a, \quad (77.23)$$

где в качестве $U^{(a)}$ достаточно взять выражение (76.21).

Составим сумму выражений (77.22) и (77.23) и представим ее в виде производной по a_i. В формулу (77.23) мы можем подставить $x_i = a_i$ до дифференцирования. В формуле же (77.22) мы должны учесть, что один из членов в $U^{(b)}(\mathbf{b})$ сам зависит от a_i, а именно

$$U^{(b)}(\mathbf{b}) = \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \ldots, \tag{77.24}$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие a_i. Вследствие (77.24) мы имеем

$$U^{(b)}(\mathbf{b}) \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ U^{(b)}(\mathbf{b}) \cdot \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} - \frac{1}{2} \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2} \right\}. \tag{77.25}$$

Используя это соотношение, мы получим

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}_{\text{доб}}}{\partial x_i} \rho\,(dx)^3 + \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (\sigma - \rho)\,(dx)^3 = \frac{\partial}{\partial a_i}(L_1 + L_2) - \frac{\partial \Psi}{\partial a_i}, \tag{77.26}$$

где мы положили

$$L_1 = \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,\,b \\ (a \neq b)}} [3\gamma M_a M_b (\dot{a}_k^2 + \dot{b}_k^2) + 2\gamma(\xi_b M_a + \xi_a M_b)] \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}, \tag{77.27}$$

$$L_2 = \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,\,b \\ (a \neq b)}} [3\gamma M_a \omega^{(b)}_{sk} I^{(b)}_{sj} \dot{b}_k - 3\gamma M_b \omega^{(a)}_{sk} I^{(a)}_{sj} \dot{a}_k +$$
$$+ \gamma(M_a \xi_{bj} - M_b \xi_{aj})] \frac{a_j - b_j}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3}, \tag{77.28}$$

а функция Ψ равна

$$\Psi = \frac{1}{c^2} \sum_b \left(\gamma M_a M_b U^{(b)}(\mathbf{b}) \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} - \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{M_a^2 M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2} \right) +$$
$$+ \frac{1}{2c^2} M_a U^{(a)}(\mathbf{a})^2 + \ldots, \tag{77.29}$$

где многоточием обозначены члены, не зависящие от a_i. Эти члены мы подберем так, чтобы функция Ψ была симметрична относительно всех масс и соответствующих радиусов-векторов. Положим

$$\Psi(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \frac{\gamma^2}{2c_0^2} \cdot \frac{M_a M_b (M_a + M_b)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2}, \tag{77.30}$$

$$\Psi(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = \frac{\gamma^2}{c_0^2} M_a M_b M_c \left(\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}-\mathbf{c}|} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{|\mathbf{b}-\mathbf{c}|\,|\mathbf{b}-\mathbf{a}|} + \frac{1}{|\mathbf{c}-\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}-\mathbf{b}|} \right) \tag{77.31}$$

(где c_0 есть временное обозначение для скорости света, которое мы ввели во избежание смешения с индексом при массе M_c). Тогда нетрудно видеть, что в функции

$$\Psi = \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\Psi(\mathbf{a},\,\mathbf{b}) + \frac{1}{6}\sum_{\substack{a,\,b,\,c\\(a\neq b,\; b\neq c,\; c\neq a)}}\Psi(\mathbf{a},\,\mathbf{b},\,\mathbf{c}), \tag{77.32}$$

члены, зависящие от a_i, будут те же, что в (77.29). Таким образом, в формуле (77.26) для суммы двух интегралов можно понимать под Ψ выражение (77.32). Члены $\Psi(\mathbf{a},\,\mathbf{b},\,\mathbf{c})$ дают своеобразное „тройное взаимодействие“ масс.

Рассмотрим теперь в выражении (77.20) те интегралы, которые содержат функцию $W^{(a)}$. Мы имеем, очевидно,

$$\frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho\,\frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t^2}(dx)^3 - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\rho\,\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3 =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3 = -\frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho v_j\,\frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial t}(dx)^3. \tag{77.33}$$

Последнее выражение вычисляется при помощи формулы (76.34) для производной от $W^{(a)}$. Мы получим

$$-\frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho v_j\,\frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial t}(dx)^3 = \frac{\partial L_3}{\partial a_i} + \frac{\partial L_4}{\partial a_i}, \tag{77.34}$$

где

$$L_3 = \frac{1}{4c^2}\sum_{\substack{a,\,b\\a\neq b}}\gamma M_a M_b \dot a_j \dot b_k\,\frac{\partial^2|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_j\,\partial a_k} \tag{77.35}$$

и

$$L_4 = \frac{1}{8c^2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\gamma\left(M_b \dot b_j \dot I^{(a)}_{kl} - M_a \dot a_j \dot I^{(b)}_{kl}\right)\frac{\partial^3|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_j\,\partial a_k\,\partial a_l}. \tag{77.36}$$

Нам остается рассмотреть последний интеграл в (77.20). Вычисление его никаких трудностей не представляет, и мы получаем

$$-\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\rho v_k\,\frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i}(dx)^3 = \frac{\partial L_5}{\partial a_i} + \frac{\partial L_6}{\partial a_i}, \tag{77.37}$$

где

$$L_5 = -\frac{2}{c^2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\frac{\gamma M_a M_b(\dot a_k \dot b_k)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}, \tag{77.38}$$

$$L_6 = \frac{2}{c^2}\sum_{\substack{a,\,b\\(a\neq b)}}\gamma\left(M_b \dot b_k \omega^{(a)}_{sk} I^{(a)}_{sj} - M_a \dot a_k \omega^{(b)}_{sk} I^{(b)}_{sj}\right)\frac{a_j - b_j}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3}. \tag{77.39}$$

Собирая все интегралы вместе, получаем следующее выражение для силы:

$$F_{ai} = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial a_i} + \frac{\partial}{\partial a_i}(L_1 + L_3 + L_5) + \frac{\partial}{\partial a_i}(L_2 + L_4 + L_6). \quad (77.40)$$

Сравним это выражение для силы с полученным ранее выражением (76.41) для количества движения. Положим

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} \gamma(\xi_b M_a + \xi_a M_b) \cdot \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}, \quad (77.41)$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} \gamma(\xi_{bj} M_a - \xi_{aj} M_b) \cdot \frac{a_j - b_j}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3}. \quad (77.42)$$

Эти величины входят (со знаком минус) в состав выражений (77.27) и (77.28) для L_1 и L_2.

Нетрудно проверить, что мы имеем

$$L_1 + L_3 + L_5 = K_1 - \Phi_1 \quad (77.43)$$

и аналогично

$$L_2 + L_4 + L_6 = K_2 - \Phi_2, \quad (77.44)$$

где K_1 и K_2 имеют значения (76.30) и (76.31). Поэтому

$$F_{ai} = \frac{\partial}{\partial a_i}(K_1 + K_2 - \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \Psi). \quad (77.45)$$

С другой стороны, согласно (76.41),

$$P_{ai} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}_i}(K + K_1 + K_2), \quad (77.46)$$

где K есть выражение (76.15).

В этих формулах величина K не зависит от координат a_i, величины же Φ, Φ_1, Φ_2, Ψ не зависят от скоростей $\dot{a}_i$. Положив

$$L = K + K_1 + K_2 - \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \Psi, \quad (77.47)$$

мы можем поэтому написать

$$P_{ai} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i}; \qquad F_{ai} = \frac{\partial L}{\partial a_i}, \quad (77.48)$$

и уравнения движения

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai} \quad (77.49)$$

принимают лагранжеву форму

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0. \quad (77.50)$$

§ 78. Уравнения поступательного движения в лагранжевой форме

В предыдущих параграфах были выведены уравнения движения центров тяжести масс, вытекающие из условий

$$\int_{(a)} g\nabla_\alpha T^{\alpha i}(dx)^3 = 0, \tag{78.01}$$

которые, в свою очередь, получаются из условий гармоничности (см. § 70) Уравнения были выведены в предположении, что каждая масса вращается вокруг своего центра тяжести наподобие твердого тела.

Уравнения движения приводятся, как мы видели, к лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0, \tag{78.02}$$

где функция Лагранжа получается подстановкой в (77.47) найденных выше выражений для K, K_1, K_2, Φ, Φ_1, Φ_2, Ψ [формулы (76.15), (76.36), (76.37), (71.32), (77.41), (77.42), (77.32)] *).

Выпишем эти формулы еще раз. Мы имеем

$$L = K + K_1 + K_2 - \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \Psi, \tag{78.03}$$

где отдельные слагаемые имеют следующие значения:

$$K = \sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_i^2 + T_a\right) + \\ + \frac{1}{c^2} \sum_a \left(\frac{1}{8} M_a (\dot{a}_k^2)^2 + \frac{1}{2} Z_{ik}^{(a)} \dot{a}_i \dot{a}_k + Z_i^{(a)} \dot{a}_i\right). \tag{78.04}$$

Здесь первая сумма представляет обычную, ньютонову, кинетическую энергию поступательного и вращательного движения системы тел. (При составлении левой части уравнений Лагранжа член T_a, впрочем, не существен). Вторая сумма дает поправку к „кинетической" (т. е. зависящей от скорости) части функции Лагранжа. При отсутствии вращения эта поправка сводится, согласно (76.19), к обычному поправочному члену, известному из механики материальной точки; при наличии же вращения эта поправка содержит также „смешанные" члены, зависящие как от скорости поступательного движения, так и от угловой скорости вращения тела. От положения центров тяжести тел величина K не зависит.

*) Для не-вращающихся масс приведение к лагранжевой форме было впервые выполнено И. Фихтенгольцем [40].

Выпишем теперь значения K_1 и K_2. Согласно (76.36) и (76.37) мы имеем

$$K_1 = \frac{1}{4c^2}\sum_{a,b}\frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}(3\dot{a}_i^2+3\dot{b}_i^2-8\dot{a}_i\dot{b}_i)+$$

$$+\frac{1}{4c^2}\sum_{a,b}\gamma M_a M_b \dot{a}_i\dot{b}_k\frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial a_k}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|, \qquad (78.05)$$

$$K_2=\frac{1}{2c^2}\sum_{a,b}[\gamma M_a\omega_{si}^{(b)}I_{sj}^{(b)}(3\dot{b}_i-4\dot{a}_i)-$$

$$-\gamma M_b\omega_{si}^{(a)}I_{sj}^{(a)}(3\dot{a}_i-4\dot{b}_i]\frac{a_j-b_j}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2}+$$

$$+\frac{1}{8c^2}\sum_{a,b}(\gamma M_b\dot{b}_i\dot{I}_{kl}^{(a)}-\gamma M_a\dot{a}_i\dot{I}_{kl}^{(b)})\cdot\frac{\partial^3|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{\partial a_i\,\partial a_k\,\partial a_l}. \qquad (78.06)$$

Эти члены зависят как от координат, так и от скоростей и представляют как бы результат взаимодействия кинетической и потенциальной энергии. При этом, как мы уже заметили в § 76, величина K_1 однородна и квадратична в скоростях $\dot{a}_i$ поступательного движения, а величина K_2 билинейна в скоростях поступательного движения и в угловых скоростях.

Следующий член в функции Лагранжа

$$-\Phi=\frac{1}{2}\sum_{a,b}\frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}+\frac{1}{4}\sum_{a,b}(M_a I_{ik}^{(b)}+M_b I_{ik}^{(a)})\frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial a_k}\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} \qquad (78.07)$$

представляет ньютонову потенциальную энергию системы тел. К нему присоединяются две поправки, Φ_1 и Φ_2, где, согласно (77.41) и (77.42),

$$-\Phi_1=\frac{1}{2c^2}\sum_{a,b}\gamma(\xi_b M_a+\xi_a M_b)\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}, \qquad (78.08)$$

$$-\Phi_2=\frac{1}{2c^2}\sum_{a,b}\gamma(\xi_{bj}M_a-\xi_{aj}M_b)\frac{a_j-b_j}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3}. \qquad (78.09)$$

Величина Φ_1 может быть истолкована как результат замены в ньютоновой потенциальной энергии Φ или, точнее, в ее главном члене *)

$$\Phi_0=-\frac{1}{2}\sum_{a,b}\frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} \qquad (78.10)$$

*) В формуле (78.07) для Φ поправочный член — порядка L^2/R^2 по отношению к главному, вследствие чего релятивистские поправки в поправочном члене будут такого порядка, каким мы уже пренебрегаем. Поэтому безразлично, вводить ли их в полное выражение для Φ или только в главный член Φ_0.

массы M_a на эффективную массу $M_a + \delta M_a$, где

$$\delta M_a = \frac{1}{c^2}\xi_a. \tag{78.11}$$

Величина же Φ_2 может быть истолкована как результат смещения центра тяжести массы (a), а именно замены a_i на $a_i + \delta a_i$, где

$$\delta a_i = \frac{1}{c^2 M_a}\xi_{ai}. \tag{78.12}$$

Действительно, мы имеем, с точностью до малых величин,

$$-\frac{1}{2}\sum_{a,\,b}\frac{\gamma(M_a+\delta M_a)(M_b+\delta M_b)}{|\mathbf{a}+\delta\mathbf{a}-\mathbf{b}-\delta\mathbf{b}|} = \Phi_0+\Phi_1+\Phi_2. \tag{78.13}$$

Заметим, что входящая в формулу для эффективной массы величина ξ_a равна собственной энергии тела (a), которая слагается из кинетической энергии вращения вокруг его центра тяжести, из упругой энергии тела и из гравитационной энергии составляющих его частиц. В самом деле, можно показать, что выражение

$$\xi_a = T_a + \int\limits_{(a)}\rho\Pi(dx)^3 - \frac{1}{2}\int\limits_{(a)}\rho u_a(dx)^3 \tag{78.14}$$

для собственной энергии переходит, при использовании уравнения Ляпунова и соотношения (73.26), в формулу (77.10) для ξ_a.

Следует ожидать, что весомость собственной энергии тела влечет за собой не только изменение его эффективной массы, но и смещение его центра тяжести. Однако, ввиду того, что кинетическая энергия вращения тела вокруг его центра тяжести относится ко всему телу в целом и не связана с отдельными его частицами, для величины смещения центра тяжести трудно указать априори надлежащее выражение. Вычисление же дает для него величину (78.12), где ξ_{ai} имеет значение (77.12).

Нам остается выписать последний член в функции Лагранжа. Входящие в него три (различных) радиуса-вектора удобно обозначать буквами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; поэтому для скорости света мы примем использованное в § 77 обозначение c_0. Согласно формулам (77.30), (77.31) и (77.32), мы имеем

$$-\Psi = -\frac{\gamma^2}{4c_0^2}\sum_{a,\,b}\frac{M_a M_b(M_a+M_b)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2} - \frac{\gamma^2}{6c_0^2}\sum_{a,\,b,\,c} M_a M_b M_c \times$$
$$\times\left(\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}||\mathbf{a}-\mathbf{c}|}+\frac{1}{|\mathbf{b}-\mathbf{c}||\mathbf{b}-\mathbf{a}|}+\frac{1}{|\mathbf{c}-\mathbf{a}||\mathbf{c}-\mathbf{b}|}\right). \tag{78.15}$$

Здесь последняя сумма дает тройное взаимодействие масс.*) Если,

*) В тройной сумме значки удовлетворяют неравенствам $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$; во всех двойных суммах должно быть $a\neq b$.

как мы это делали выше, называть члены K_1+K_2 „кинетически-потенциальной“ частью функции Лагранжа, то можно величину Ψ называть „потенциально-потенциальной“ ее частью. Эти названия подчеркивают то обстоятельство, что во втором приближении теории тяготения Эйнштейна уже не имеет место характерная для ньютоновой теории аддитивность кинетической и потенциальной части функции Лагранжа.

Полная функция Лагранжа, согласно (78.03), равна сумме выписанных здесь выражений (78.04)—(78.09) и (78.15). Она дает, с принятой степенью точности, уравнения поступательного движения с релятивистскими поправками.

Что касается уравнений вращательного движения, то они могут быть получены из соотношений (70.28), которые имеют вид

$$-\int\limits_{(a)} g\,(x_i\nabla_\alpha T^{\alpha k}-x_k\nabla_\alpha T^{\alpha i})(dx)^3=0. \tag{78.16}$$

В ньютоновом приближении эти соотношения дают, как показано в § 72, закон изменения момента количества движения

$$M_{ik}^{(a)}=\omega_{jk}^{(a)}I_{ji}^{(a)}-\omega_{ji}^{(a)}I_{jk}^{(a)} \tag{78.17}$$

каждого тела, а именно

$$\frac{d}{dt}M_{ik}^{(a)}=\sum_b\frac{3\gamma M_b(a_j-b_j)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^5}\left[(a_k-b_k)I_{ij}^{(a)}-(a_i-b_i)I_{kj}^{(a)}\right] \tag{78.18}$$

[формулы (72.07) и (72.13)].

Релятивистские поправки к ньютоновым уравнениям вращательного движения могут быть получены путем более точного вычисления левой части соотношений (78.16). Эти вычисления могут быть проведены по образцу тех, какие были проделаны в предыдущих параграфах для поступательного движения, и не представляют иных затруднений, кроме сложности выкладок. Но так как релятивистские поправки к вращательному движению небесных тел играют совершенно незначительную роль и еще труднее наблюдаемы, чем поправки к их поступательному движению, мы их здесь вычислять не будем.

§ 79. Интегралы уравнений движения системы тел

Подобно системе частиц, взаимодействующих через посредство электромагнитного поля (§§ 26—28), система тяжелых тел обладает тем свойством, что ее уравнения движения допускают десять классических интегралов (констант движения), а именно: интегралы количества движения и энергии и затем интегралы момента количества движения и движения центра инерции.

Мы выведем здесь общие выражения для констант движения в виде определенных интегралов. При этом мы будем здесь (как и в начале § 71) пользоваться, для внутренней задачи, общими уравнениями движения упругого тела в нерелятивистском приближении. Выпишем их здесь еще раз. Мы имеем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}=0, \tag{79.01}$$

собственно уравнения движения

$$\rho w_i-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}, \tag{79.02}$$

где ускорение w_i равно

$$w_i=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \tag{79.03}$$

и, наконец, соотношение для упругой потенциальной энергии П

$$\rho\frac{d\Pi}{dt}=\frac{1}{2}p_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{79.04}$$

Предположения, что каждое тело вращается, как твердое, мы пока вводить не будем.

Для получения констант движения можно исходить из тех соотношений, которые вытекают, как показано в § 70, из условий гармоничности. А именно, соотношение

$$-\int\limits_{(+\infty)} g\nabla_\alpha T^{\alpha i}(dx)^3=0, \tag{79.05}$$

проинтегрированное по времени, дает нам три интеграла количества движения, а соотношение

$$-\int\limits_{(\infty)} g\nabla_\alpha T^{\alpha 0}(dx)^3=0, \tag{79.06}$$

также проинтегрированное по времени, дает интеграл энергии. Аналогично, соотношения

$$-\int\limits_{(\infty)} g(x_i\nabla_\alpha T^{\alpha k}-x_k\nabla_\alpha T^{\alpha i})(dx)^3=0 \tag{79.07}$$

дадут три интеграла момента количества движения, а соотношение

$$-\int\limits_{(\infty)} gx_i\nabla_\alpha T^{\alpha 0}(dx)^3+x_0\int\limits_{(\infty)} g\nabla_\alpha T^{\alpha i}(dx)^3=0 \tag{79.08}$$

[в котором, впрочем, равенство нулю второго члена вытекает уже из (79.05)] приведет к трем интегралам движения центра тяжести системы масс.

Начнем с вычисления количества движения. При выводе закона сохранения из (79.05) мы можем воспользоваться результатами § 75.

Обобщая несколько формулу (75.31), положим

$$P_i = \int\limits_{(\infty)} \left\{ \rho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U \right) \right] - \frac{1}{c^2} p_{ik} v_k - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{c^2} \rho U_i - \frac{1}{c^2} \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} \right\} (dx)^3 \qquad (79.09)$$

и составим производную от этого выражения по времени. На основании (73.01) получим прежде всего

$$\frac{dP_i}{dt} = \int \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 - \frac{4}{c^2} \int \rho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i} (dx)^3, \qquad (79.10)$$

где

$$\sigma = \rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) - \frac{p_{kk}}{c^2}, \qquad (79.11)$$

и функция U^* удовлетворяет уравнению

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma. \qquad (79.12)$$

Но вследствие того, что все интегралы в (79.10) взяты по бесконечному объему, к ним применимы соотношения (75.24) и (75.29), согласно которым

$$\int \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} (dx)^3, \qquad (79.13)$$

$$\int \rho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i} (dx)^3 = 0. \qquad (79.14)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dP_i}{dt} = 0; \quad P_i = \text{const}, \qquad (79.15)$$

так что P_i есть константа движения. Этот результат обобщает формулу (75.34) на общий случай системы упругих тел, взаимодействующих через посредство поля тяготения.

Переходим теперь к формулировке закона сохранения момента количества движения такой системы. Вводя в соотношение (79.07) выражение (70.22) для $g\nabla_\alpha T^{\alpha i}$ и используя формулы (70.26) для составляющих тензора массы, получим:

$$\frac{d}{dt} \int \left\{ \left[\rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U \right) \right] (x_i v_k - x_k v_i) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2} (p_{jk} v_j x_i - p_{ji} v_j x_k) \right\} (dx)^3 =$$

$$= \int \left(x_i \frac{\partial U^*}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \right) \sigma (dx)^3 + \frac{4}{c^2} \int \rho \left(x_i \frac{dU_k}{dt} - x_k \frac{dU_i}{dt} \right) (dx)^3 -$$

$$- \frac{4}{c^2} \int \rho v_j \left(x_i \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) (dx)^3, \qquad (79.16)$$

где мы положили для краткости

$$\frac{dU_i}{dt}=\frac{\partial U_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \tag{79.17}$$

Если распространить в (79.16) все интегралы на область, занятую одной из масс, получится обобщение формулы (72.04), дающей закон изменения момента количества движения в ньютоновом приближении. Нас интересует здесь полный момент количества движения, поэтому интегралы должны быть распространены на все бесконечное пространство.

Введем обозначение

$$G_i=\left[\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi+3U\right)\right]v_i-\frac{1}{c^2}p_{ij}v_j-\frac{4}{c^2}\rho U_i-\frac{1}{c^2}\rho\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}, \tag{79.18}$$

при помощи которого формула (79.09) для полного количества движения напишется

$$P_i=\int G_i\,(dx)^3. \tag{79.19}$$

Тогда соотношение (79.16) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int(x_iG_k-x_kG_i)(dx)^3={}&\int\left(x_i\frac{\partial U^*}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial U^*}{\partial x_k}\right)\sigma\,(dx)^3-\\&-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\rho\left(x_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_k\,\partial t}-x_k\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}\right)(dx)^3-\\&-\frac{4}{c^2}\int\rho v_j\left(x_i\frac{\partial U_j}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)(dx)^3-\frac{4}{c^2}\int\rho\,(v_iU_k-v_kU_i)\,(dx)^3.\end{aligned} \tag{79.20}$$

Докажем, что в правой части первые два интеграла сокращаются, а остальные два равны нулю в отдельности, так что вся правая часть равна нулю.

При вычислении интегралов в правой части мы будем применять следующую лемму:

Если функция ψ выражается через плотность μ по формуле

$$\psi=\int f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,\mu(\mathbf{r}')\,(dx')^3, \tag{79.21}$$

где f есть некоторая функция от расстояния $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, то имеет место соотношение

$$\int\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\mu\,(dx)^3=0. \tag{79.22}$$

При этом предполагается, что формула (79.21) допускает дифференцирование под знаком интеграла. Для доказательства достаточно подставить значение производных от ψ из (79.21) в (79.22) и обратить внимание на то, что в получаемом двойном интеграле подинтегральная функция антисимметрична относительно координат обеих точек $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$.

С аналогичным соотношением мы уже встречались при выводе формулы (71.14).

Припоминая формулу (77.07), мы можем написать

$$U^* = U_\sigma + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{79.23}$$

где $U_\sigma = U + U_{\text{доб}}$ есть решение уравнения

$$\Delta U_\sigma = -4\pi\gamma\sigma, \tag{79.24}$$

а второй член в (79.23), в котором функция W имеет значение

$$W = \frac{1}{2}\gamma\int\limits_{(\infty)}\rho'\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,(dx')^3, \tag{79.25}$$

представляет поправку на запаздывание.

Рассмотрим первый интеграл в правой части (79.20). Согласно только что доказанной лемме,

$$\int\left(x_i\frac{\partial U_\sigma}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial U_\sigma}{\partial x_i}\right)\sigma\,(dx)^3 = 0. \tag{79.26}$$

Поэтому будет

$$\int\left(x_i\frac{\partial U^*}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\right)\sigma\,(dx)^3 = \frac{1}{c^2}\int\left(x_i\frac{\partial^3 W}{\partial t^2\,\partial x_k} - x_k\frac{\partial^3 W}{\partial t^2\,\partial x_i}\right)\rho\,(dx)^3. \tag{79.27}$$

С другой стороны, доказанная лемма дает при

$$f = \frac{1}{2}\gamma\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|;\quad \mu = \frac{\partial\rho}{\partial t};\quad \psi = \frac{\partial W}{\partial t} \tag{79.28}$$

соотношение

$$\int\left(x_i\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_k} - x_k\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_i}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}\,(dx)^3 = 0. \tag{79.29}$$

Используя его, получаем

$$\frac{d}{dt}\int\rho\left(x_i\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_k} - x_k\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_i}\right)(dx)^3 = \\ = \int\rho\left(x_i\frac{\partial^3 W}{\partial t^2\,\partial x_k} - x_k\frac{\partial^3 W}{\partial t^2\,\partial x_i}\right)(dx)^3 \tag{79.30}$$

и, следовательно,

$$\int\left(x_i\frac{\partial U^*}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\right)\sigma\,(dx)^3 = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\rho\left(x_i\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_k} - x_k\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial x_i}\right)(dx)^3, \tag{79.31}$$

так что первые два интеграла в правой части (79.20) действительно сокращаются.

Третий интеграл в правой части (79.20) равен нулю в силу доказанной леммы, в формулах которой нужно положить

$$f = \frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}; \quad \mu = \rho v_j; \quad \psi = U_j. \tag{79.32}$$

Наконец, последний интеграл в (79.20) равен нулю в силу уравнения Пуассона для U_i. Таким образом, вся правая часть (79.20) равна нулю, и мы имеем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{(\infty)} (x_i G_k - x_k G_i)(dx)^3 = 0. \tag{79.33}$$

Если мы введем полный момент количества движения системы

$$M_{ik} = \int\limits_{(\infty)} (x_i G_k - x_k G_i)(dx)^3 \tag{79.34}$$

то мы будем иметь

$$M_{ik} = \text{const}. \tag{79.35}$$

Напомним, что в этих формулах величина G_i имеет значение (79.18) и мало отличается от плотности количества движения ρv_i.

Переходим теперь к формулировке закона сохранения энергии для системы тел. В отличие от других законов сохранения, соотношение (79.06) приводит, с принятой точностью вычислений, к формулировке этого закона лишь в ньютоновом приближении. Более точная форма закона сохранения может быть получена из рассмотрения лагранжевой формы уравнений для системы тел. Это будет сделано, для не-вращающихся масс, в следующем параграфе.

Ввиду того, что главные члены (ρ и ρv_i) в компонентах c^2T^{00} и c^2T^{0i} удовлетворяют уравнению неразрывности (79.01), соотношение (79.06), в данном приближении, дает то же, что и соотношение

$$c^2 \int \nabla_\alpha T^{\alpha 0}(dx)^3 = 0. \tag{79.36}$$

Вводя сюда выражение (65.23) для расходимости, получаем

$$\frac{d}{dt} \int c^2 T^{00}(dx)^3 + \int \frac{\partial U}{\partial t} T^{00}(dx)^3 = 0 \tag{79.37}$$

и, используя значение (70.26) для T^{00},

$$\frac{d}{dt} \int \rho \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\}(dx)^3 + \frac{1}{c^2}\int \rho \frac{\partial U}{\partial t}(dx)^3 = 0. \tag{79.38}$$

Так как в отдельности

$$M^0 = \int \rho (dx)^3 = \text{const}, \tag{79.39}$$

то должно быть

$$\frac{d}{dt}\int \rho\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)(dx)^3+\int \rho\frac{\partial U}{\partial t}(dx)^3=0. \qquad (79.40)$$

Чтобы получить отсюда закон сохранения в узком смысле, нам нужно и второй интеграл в (79.40) представить в виде производной по времени. Это легко сделать, если учесть соотношение

$$\int\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}-U\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)(dx)^3=0, \qquad (79.41)$$

которое вытекает из уравнения Пуассона для U. Вычитая из (79.40) деленное на 2 равенство (79.41) и полагая

$$E=\int \rho\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)(dx)^3, \qquad (79.42)$$

мы получаем

$$\frac{dE}{dt}=0; \quad E=\text{const}. \qquad (79.43)$$

Интегралы от отдельных членов в (79.42) представляют кинетическую, упругую и гравитационную энергию системы тел в ньютоновом приближении.

Если не выделять из (79.38) члена (79.39) и положить

$$M=\int \rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3, \qquad (79.44)$$

мы будем также иметь

$$M=\text{const}. \qquad (79.45)$$

Величина M есть полная масса системы тел. Она равна

$$M=M^0+\frac{E}{c^2}, \qquad (79.46)$$

где M^0 и E имеют значения (79.39) и (79.42).

Нам остается рассмотреть интегралы движения центра инерции системы тел. Их можно получить, исходя из соотношений (79.08) Это сводится к преобразованию выражения

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)\right\}(dx)^3 &=\\ =\int \rho v_i\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right\}(dx)^3\right. &+\\ +\frac{1}{c^2}\int x_i\rho v_j w_j(dx)^3+\frac{1}{c^2}\int x_i\rho\frac{d(\Pi-U)}{dt}(dx)^3 & \qquad (79.47)\end{aligned}$$

при помощи уравнений (79.01)—(79.04). Подставляя в (79.47) значение ρw_j из (79.02), получаем для суммы двух последних интегралов

$$\frac{1}{c^2}\int x_i\rho\left\{v_j w_j+\frac{d\Pi}{dt}-\frac{dU}{dt}\right\}(dx)^3=$$
$$=-\frac{1}{c^2}\int p_{ji}v_j\,(dx)^3-\frac{1}{c^2}\int x_i\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,(dx)^3. \qquad (79.48)$$

Используя обозначение (79.18), мы можем записать результат подстановки (79.48) в (79.47) в виде

$$\frac{d}{dt}\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)\right\}(dx)^3=$$
$$=\int G_i\,(dx)^3-\frac{4}{c^2}\int\rho v_i U\,(dx)^3+\frac{4}{c^2}\int\rho U_i\,(dx)^3+$$
$$+\frac{1}{c^2}\int\rho\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\partial t}(dx)^3-\frac{1}{c^2}\int x_i\rho\frac{\partial U}{\partial t}(dx)^3. \qquad (79.49)$$

Прибавляя сюда очевидное равенство

$$\frac{1}{2c^2}\frac{d}{dt}\int x_i\rho U\,(dx)^3=\frac{1}{2c^2}\int x_i\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)(dx)^3, \qquad (79.50)$$

можем написать вместо (79.49)

$$\frac{d}{dt}\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3=$$
$$=\int G_i\,(dx)^3-\frac{4}{c^2}\int\rho v_i U\,(dx)^3+\frac{4}{c^2}\int\rho U_i\,(dx)^3+$$
$$+\frac{1}{c^2}\int\rho\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}(dx)^3-\frac{1}{2c^2}\int x_i\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}-U\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)(dx)^3. \qquad (79.51)$$

Эта формула справедлива, когда область интегрирования охватывает одну или несколько масс. Если же интегрирование распространено на все бесконечное пространство, то в силу уравнений Пуассона для U и U_i будет

$$\int\rho v_i U\,(dx)^3=\int\rho U_i\,(dx)^3 \qquad (79.52)$$

и, кроме того,

$$\int\rho\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\partial t}(dx)^3=\frac{1}{2}\int x_i\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}-U\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)(dx)^3. \qquad (79.53)$$

Последнее равенство проще всего проверить, заметив, что функция

$$Q_i=x_iU-2\frac{\partial W}{\partial x_i} \qquad (79.54)$$

удовлетворяет уравнению Пуассона вида

$$\Delta Q_i = -4\pi\gamma\rho x_i. \qquad (79.55)$$

Вследствие (79.52) и (79.53), в правой части уравнения все интегралы, кроме первого, сокращаются, и мы получаем

$$\frac{d}{dt}\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3 = \int G_i(dx)^3 = P_i, \qquad (79.56)$$

где, согласно (79.15), P_i есть константа. Поэтому формула (79.56) может быть написана в проинтегрированном виде, а именно:

$$\int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3 - tP_i = K_i, \qquad (79.57)$$

где K_i есть новая константа. Имея в виду постоянство полной массы M, определяемой формулой (79.44), мы можем ввести три величины X_i при помощи соотношений

$$MX_i = \int x_i\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3. \qquad (79.58)$$

Эти величины можно толковать как координаты центра тяжести системы масс, а формулу (79.57), написанную в виде

$$MX_i - tP_i = K_i, \qquad (79.59)$$

— как выражение закона движения центра тяжести. Исходное равенство (79.08) можно рассматривать как результат дифференцирования по времени соотношения (79.59).

§ 80. Дополнительные замечания к задаче о движении системы тел. Явная форма интегралов движения для случая невращающихся масс

В предыдущем параграфе были выведены интегралы движения системы тел в предположении, что внутри каждого тела выполняются нерелятивистские уравнения движения сплошной среды (79.01) — (79.04). Возникает вопрос, остаются ли в силе найденные интегралы движения, если считать уравнения движения сплошной среды выполненными внутри тел лишь приближенно (как в § 73) и взамен них потребовать лишь выполнения уравнений движения для тел, как целых. При этом, разумеется, нужно вернуться к предположению о том, что тела вращаются как твердые.

По отношению к количеству движения поставленный вопрос решается весьма просто. Полученные в §§ 75 и 77 уравнения движения как раз и состояли в том, что величины

$$P_{ai} = \int\limits_{(a)} G_i (dx)^3 \tag{80.01}$$

удовлетворяли соотношению

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai}, \tag{80.02}$$

где, согласно (75.33),

$$\sum_a F_{ai} = 0. \tag{80.03}$$

Поэтому постоянство величины

$$P_i = \int G_i (dx)^3 \tag{80.04}$$

есть следствие уравнений движения тел, как целых.

То же самое можно сказать относительно величин

$$M_{ik} = \int (x_i G_k - x_k G_i)(dx)^3, \tag{80.05}$$

представляющих момент количества движения системы. Уравнения вращательного движения были выписаны нами (в § 72) только в ньютоновом приближении. Но более точные уравнения, написанные для суммы орбитального и собственного момента количества движения, как раз и имеют вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} (x_i G_k - x_k G_i)(dx)^3 = L_{ik}^{(a)}, \tag{80.06}$$

где $L_{ik}^{(a)}$ есть сумма интегралов, стоящих в правой части (79.20), но распространенных не на все бесконечное пространство, а лишь на область массы (a). При этом, как доказано в § 79, имеет место равенство

$$\sum_a L_{ik}^{(a)} = 0, \tag{80.07}$$

в силу которого постоянство величин M_{ik} есть следствие уравнений вращательного движения в форме (80.06).

Проверим теперь выполнение соотношения

$$\int\limits_{(a)} g\nabla_\alpha T^{\alpha 0} (dx)^3 = 0. \tag{80.08}$$

Это соотношение должно быть выполнено для того, чтобы выполнялось соответствующее условие гармоничности. С другой стороны, если оно выполнено, то будет выполнено и соотношение (79.06), связанное с интегралом энергии.

Преобразования, которые привели нас от (79.06) к (79.38), применимы и в том случае, когда все интегралы распространены на область только одной массы. Поэтому мы можем сразу написать

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U\right)\right\}(dx)^3 + \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U}{\partial t}(dx)^3 = 0, \qquad (80.09)$$

а так как в отдельности

$$\int\limits_{(a)} \rho\,(dx)^3 = M_a = \text{const}, \qquad (80.10)$$

то должно быть

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U\right)(dx)^3 + \int\limits_{(a)} \rho \frac{\partial U}{\partial t}(dx)^3 = 0. \qquad (80.11)$$

Это соотношение выполняется в силу уравнений движения (79.01)—(79.04) для сплошной среды. Нам нужно показать, что оно будет приближенно выполнено и в том случае, если уравнения движения сплошной среды удовлетворяются лишь в среднем, и тело предполагается вращающимся наподобие твердого тела, но необязательно с постоянной угловой скоростью (см. § 73). В этом случае дело сводится к проверке соотношения

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i \left(w_i - \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)(dx)^3 = 0, \qquad (80.12)$$

получаемого из (80.11) после дифференцирования, при учете того, что упругая энергия остается постоянной. Здесь w_i есть ускорение, для которого в § 73 дано выражение (73.07); подинтегральная функция в (80.12) есть умноженная на v_i левая часть (73.08). Равенство (80.12) легко проверяется при помощи формулы

$$\int\limits_{(a)} \rho v_i \left[\omega_{ji}^{(a)} - \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a\right](x_j - a_j)(dx)^3 = 0, \qquad (80.13)$$

которая может быть написана в виде

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{2} \dot{I}_{ij}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a. \qquad (80.14)$$

Эта формула совпадает с (72.32) и выполняется в силу уравнений вращательного движения тела. При проверке соотношения (80.11) можно также рассуждать следующим образом. Разделяя потенциал U на внутренний и внешний и используя уравнения (71.19) и (72.09), выражающие равенство нулю равнодействующей внутренних сил и их моментов, мы можем написать

$$\int \rho \frac{\partial u_a}{\partial t}(dx)^3 = -\int \rho v_i \frac{\partial u_a}{\partial x_i}(dx)^3 = 0. \qquad (80.15)$$

Кроме того, очевидно,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho(\Pi - u_a)(dx)^3 = 0. \tag{80.16}$$

Поэтому уравнение (80.11) сводится к такому, в которое входит только внешний потенциал $U^{(a)}$, а именно к следующему:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \rho\left(\frac{1}{2}v^2 - U^{(a)}\right)(dx)^3 + \int\limits_{(a)} \rho\frac{\partial U^{(a)}}{\partial t}(dx)^3 = 0. \tag{80.17}$$

Подставляя сюда значение $U^{(a)}(\mathbf{r})$ из (71.27) и используя уравнения поступательного и вращательного движения (71.35) и (72.32), убеждаемся, что уравнение (80.17) выполняется.

Таким образом, необходимое для выполнения условий гармоничности соотношение (80.08) удовлетворяется уже в силу остальных соотношений вида (70.21), подобно тому, как в механике материальной точки уравнение, выражающее сохранение энергии, удовлетворяется в силу уравнений движения.

Аналогично можно проверить, что уравнений поступательного и вращательного движения достаточно для выполнения соотношения (79.51), а значит и для выполнения закона движения центра инерции.

Как мы уже упоминали в § 79, с принятой точностью вычислений интеграл энергии получается из (79.06) лишь в ньютоновом приближении. Но в случае не-вращающихся тел со сферической симметрией нетрудно написать интеграл энергии и в следующем приближении. Так как в этом случае движение сводится к поступательному, для которого уравнения уже написаны в лагранжевой форме, то для вывода интеграла энергии можно исходить из функции Лагранжа, рассмотренной в § 78. Вводя эффективную массу

$$m_a = M_a + \frac{2}{3}\varepsilon_a, \tag{80.18}$$

мы будем иметь, по формуле (78.03):

$$L = K + K_1 - \Phi - \Psi. \tag{80.19}$$

Здесь, согласно (76.19),

$$K = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{a}_i^2 + \frac{1}{c^2}\sum_a \frac{1}{8} m_a (\dot{a}_i^2)^2. \tag{80.20}$$

K имеет прежнее значение (78.05), в котором можно заменить массы M_a, M_b эффективными массами m_a, m_b:

$$K_1 = \frac{1}{4c^2}\sum_{a,b} \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}(3\dot{a}_i^2 + 3\dot{b}_i^2 - 8\dot{a}_i\dot{b}_i) + \\ + \frac{1}{4c^2}\sum_{a,b}\gamma m_a m_b \dot{a}_i \dot{b}_k \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|. \tag{80.21}$$

Φ есть ньютонова потенциальная энергия (с эффективными массами)

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{a,\,b}\frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{80.22}$$

Вследствие (78.13) это выражение включает в себя члены Φ_1 и Φ_2 (впрочем, ввиду сферической симметрии $\Phi_2 = 0$). Наконец, Ψ имеет прежнее значение (78.15), в котором также можно заменить массы их эффективными значениями:

$$\Psi = \frac{\gamma^2}{4c_0^2}\sum_{a,\,b}\frac{m_a m_b (m_a + m_b)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2} + \frac{\gamma^2}{6c_0^2}\sum_{a,\,b,\,c} m_a m_b m_c \times$$

$$\times\left(\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}-\mathbf{c}|} + \frac{1}{|\mathbf{b}-\mathbf{c}|\,|\mathbf{b}-\mathbf{a}|} + \frac{1}{|\mathbf{c}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{c}-\mathbf{b}|}\right). \tag{80.23}$$

По формуле

$$\sum_a \dot{a}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - L = E \tag{80.24}$$

получаем интеграл энергии (в нерелятивистской нормировке):

$$E = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{a}_i^2 + \frac{1}{c^2}\sum_a \frac{3}{8} m_a (\dot{a}_i^2)^2 + K_1 + \Phi + \Psi. \tag{80.25}$$

Остальные интегралы движения также легко получаются из функции Лагранжа. Мы имеем интегралы количества движения

$$\sum_a P_{ai} = P_i, \tag{80.26}$$

где

$$P_{ai} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} = \dot{a}_i\left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2 - \frac{1}{2c^2}\sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{2c^2}\sum_b{}' \frac{(m_a m_b (\dot{a}_i - \dot{b}_i)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} - \frac{1}{2c^2}\sum_b{}' \gamma m_a m_b \dot{b}_k \frac{(a_i - b_i)(a_k - b_k)}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3}\right., \tag{80.27}$$

интегралы момента количества движения

$$\sum_a (a_i P_{ak} - a_k P_{ai}) = M_{ik} \tag{80.28}$$

и интегралы движения центра инерции *)

$$MX_i - P_i t = K_i = \mathrm{const}, \tag{80.29}$$

---

*) Константы K_i не следует смешивать с величинами K_1 и K_2, входящими в функцию Лагранжа.

где

$$MX_i = \sum_a a_i\left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2 - \frac{1}{2c^2} \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}\right), \tag{80.30}$$

причем

$$M = \sum_a \left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2\right) - \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} \tag{80.31}$$

есть полная масса системы.

Более точное значение полной массы есть

$$M = \sum_a m_a + \frac{E}{c^2}, \tag{80.32}$$

где E имеет значение (80.25).

§ 81. Задача двух тел конечной массы

В случае двух тел получаемые из функции Лагранжа (80.19) уравнения движения могут быть проинтегрированы. Здесь удобнее перейти к новым обозначениям, более употребительным в механике. В качестве индексов при массе мы будем писать не буквы a, b (обозначавшие у нас также координаты масс), а числа 1 и 2; координаты массы 1 будут теперь x_1, y_1, z_1, а координаты массы 2 будут x_2, y_2, z_2.

Мы будем употреблять также трехмерные векторные обозначения $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. В новых обозначениях функция Лагранжа напишется:

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{m_1}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_1^2)^2 + \frac{m_2}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_2^2)^2 + \\ & + \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} (3\dot{\mathbf{r}}_1^2 + 3\dot{\mathbf{r}}_2^2 - 7\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) - \\ & - \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))(\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) + \\ & + \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{\gamma^2}{2c^2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \end{aligned} \tag{81.01}$$

а интеграл энергии примет вид:

$$\begin{aligned} E = {} & \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{3m_1}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_1^2)^2 + \frac{3m_2}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}}_2^2)^2 + \\ & + \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} (3\dot{\mathbf{r}}_1^2 + 3\dot{\mathbf{r}}_2^2 - 7\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) - \\ & - \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))(\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) - \\ & - \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{\gamma^2}{2c^2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}. \end{aligned} \tag{81.02}$$

Мы перепишем также в новых обозначениях формулу (80.27) для количества движения одной из масс. Составляющая $P_x^{(1)}$ равна

$$P_x^{(1)} = \dot{x}_1\left(m_1 + \frac{1}{2c^2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 - \frac{1}{2c^2}\frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) + \\ + \frac{7}{2c^2}\frac{\gamma m_1 m_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{\gamma m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{2c^2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)). \quad (81.03)$$

Количество движения другой массы получится отсюда перестановкой значков (1) и (2), а полное количество движения будет равно

$$P_x = P_x^{(1)} + P_x^{(2)}, \quad \text{и т. д.} \quad (81.04)$$

Выпишем одну из составляющих полного момента количества движения, например

$$M_{xy} = x_1 P_y^{(1)} - y_1 P_x^{(1)} + x_2 P_y^{(2)} - y_2 P_x^{(2)}. \quad (81.05)$$

Мы будем иметь:

$$M_{xy} = (x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1)\left(m_1 + \frac{1}{2c^2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{3}{c^2}\frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) + \\ + (x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2)\left(m_2 + \frac{1}{2c^2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{3}{c^2}\frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) - \\ - \frac{7\gamma m_1 m_2}{2c^2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}(x_1\dot{y}_2 - y_1\dot{x}_2 + x_2\dot{y}_1 - y_2\dot{x}_1) + \\ + \frac{\gamma m_1 m_2}{2c^2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\left((\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2)\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right)(x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (81.06)$$

Если мы введем координатную систему, связанную с центром инерции, то мы можем интегралы центра инерции написать в виде

$$m_1\mathbf{r}_1\left(1 + \frac{\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2c^2} - \frac{1}{2c^2}\frac{\gamma m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) + m_2\mathbf{r}_2\left(1 + \frac{\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2c^2} - \frac{1}{2c^2}\frac{\gamma m_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) = 0. \quad (81.07)$$

Введем теперь координаты центра инерции в ньютоновском смысле

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (81.08)$$

а также относительные координаты

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (81.09)$$

Мы будем тогда иметь

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_0 + \frac{m_2}{m_0}\mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_0 - \frac{m_1}{m_0}\mathbf{r}, \end{aligned}\right\} \quad (81.10)$$

где

$$m_0 = m_1 + m_2 \quad (81.11)$$

есть полная масса. Мы введем также обозначение

$$m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{81.12}$$

для приведенной массы и заметим, что

$$m_0 m^* = m_1 m_2. \tag{81.13}$$

Мы имеем также

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 = m_0 \dot{\mathbf{r}}_0^2 + m^* \dot{\mathbf{r}}^2, \tag{81.14}$$

$$m_1 (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + m_2 (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) = \\ = m_0 (x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0) + m^* (x \dot{y} - y \dot{x}), \tag{81.15}$$

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = x_0 y - x y_0. \tag{81.16}$$

Из формулы (81.07) непосредственно видно, что радиус-вектор ньютонова центра тяжести будет все время оставаться малым, причем скорость его изменения также будет мала. Если порядок величины $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ принять равным R и q, то будет

$$\mathbf{r}_0 \sim R \frac{q^2}{c^2}; \quad \dot{\mathbf{r}}_0 \sim \frac{q^3}{c^2}. \tag{81.17}$$

Поэтому во всех поправочных членах, содержащих в знаменателе c^2, мы можем положить вместо (81.10)

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_0} \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_0} \mathbf{r}, \tag{81.18}$$

а также

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{m_2}{m_0} \dot{\mathbf{r}}; \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{m_1}{m_0} \dot{\mathbf{r}}. \tag{81.19}$$

Делая эти пренебрежения в самом уравнении (81.07), мы можем написать его в виде*)

$$m_0 \mathbf{r}_0 = \frac{(m_1 - m_2)}{2c^2 m_0} \mathbf{r} \left(m^* \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\gamma m^* m}{r} \right). \tag{81.20}$$

Отсюда можно заключить, что в случае финитных движений ньютонов центр тяжести $\mathbf{r}_0$ колеблется около своего среднего положения.

Перепишем интегралы энергии и момента количества движения в предположении малости $\mathbf{r}_0$. Даже в главных (ньютоновых) членах выражений (81.02) и (81.06) можно пренебречь величинами $\mathbf{r}_0$ и $\dot{\mathbf{r}}_0$, так как, согласно (81.14) и (81.15), они входят туда квадратично; это значит, что можно везде пользоваться значениями (81.18) и (81.19). Вводя эти значения в интеграл энергии (81.02) и разделив

*) Эта формула впервые получена в нашей работе 1941 г. [38].

результат на приведенную массу m^*, мы получим для величины

$$E_0 = \frac{E}{m^*} \tag{81.21}$$

выражение

$$E_0 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{1}{c^2}\left\{\frac{3}{8}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right)(\dot{\mathbf{r}}^2)^2 + \frac{\gamma}{2r}(3m_0 + m^*)\dot{\mathbf{r}}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma}{2r^3}m^*(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{\gamma^2 m_0^2}{2r^2}\right\}. \tag{81.22}$$

Введем теперь значения $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в интеграл момента количества движения. Вследствие (81.16) и (81.20) последний член в (81.06) будет с большой точностью равен нулю, а остальные члены дают

$$\frac{1}{m^*}M_{xy} = \left\{1 + \frac{1}{2c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right)\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\gamma}{c^2 r}(3m_0 + m^*)\right\}(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{81.23}$$

Аналогичные выражения получаются и для других составляющих момента количества движения. Из этих выражений видно, что в пространстве относительных координат x, y, z орбита будет плоской. Беря плоскость орбиты за плоскость xy, мы можем, как обычно, положить

$$z = 0; \quad \dot{z} = 0 \tag{81.24}$$

и ввести полярные координаты r, φ по формулам

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi. \tag{81.25}$$

Обозначая постоянную в левой части (81.23) буквой μ, мы будем иметь:

$$\mu = \left\{1 + \frac{1}{2c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right)\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\gamma}{c^2 r}(3m_0 + m^*)\right\} r^2\dot{\varphi}. \tag{81.26}$$

Прежде чем идти дальше, сравним найденные здесь интегралы энергии и момента количества движения с теми, какие были получены в § 58 при исследовании движения бесконечно малой массы в поле большой или конечной массы. Мы должны ожидать, что при $m^*=0$ формулы задачи двух тел перейдут в формулы задачи одного тела. Проверим это. Согласно формулам (58.26)—(58.31), мы имели в § 58 следующие соотношения:

$$\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon = 1 + \frac{E_0}{c^2}, \tag{81.27}$$

$$(r+\alpha)^2\frac{d\varphi}{d\tau} = \mu, \tag{81.28}$$

где

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{r-\alpha}{r+\alpha} - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r+\alpha)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right], \tag{81,29}$$

а величина α есть гравитационный радиус большой массы, который можно принять равным

$$\alpha = \frac{\gamma m_0}{c^2}. \tag{81.30}$$

Полагая

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{81.31}$$

мы можем приближенно написать вместо (81.29)

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{r-\alpha}{r+\alpha}\cdot\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(1+\frac{4\alpha}{r}\right)v^2\right], \tag{81.32}$$

откуда

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{r+\alpha}{r-\alpha}}\left[1 + \frac{1}{2c^2}\left(1+\frac{4\alpha}{r}\right)v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}\right] \tag{81.33}$$

и затем

$$\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\frac{dt}{d\tau} = 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3\alpha}{2c^2 r}v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{\alpha^2}{2r^2}. \tag{81.34}$$

Вводя это выражение в (81.27) и заменяя величину α ее значением (81.30), получаем для E_0 значение

$$E_0 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{8}v^4 + \frac{3}{2}\frac{\gamma m_0}{r}v^2 + \frac{\gamma^2 m_0^2}{2r^2}\right), \tag{81.35}$$

которое совпадет с даваемым формулой (81.22), если в этой последней положить $m^* = 0$.

Чтобы сравнить уравнения (81.26) и (81.28), выделим в последнем уравнении множитель $r^2\dot{\varphi}$ и напишем его в виде

$$\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2\frac{dt}{d\tau}\cdot r^2\frac{d\varphi}{dt} = \mu. \tag{81.36}$$

Значение $\frac{dt}{d\tau}$ можно взять из (81.33), причем члены порядка v^4/c^4 можно отбросить. Тогда будет

$$\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2\frac{dt}{d\tau} = 1 + \frac{3\alpha}{r} + \frac{v^2}{2c^2}. \tag{81.37}$$

Заменяя здесь гравитационный радиус α его значением (81.30) и подставляя в (81.38), получим

$$\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3\gamma m_0}{c^2 r}\right)r^2\frac{d\varphi}{dt} = \mu. \tag{81.38}$$

Если в уравнении (81.26) положить $m^* = 0$, то оно совпадет с (81.38).

Таким образом, после перехода к пределу интегралы движения в задаче двух конечных масс действительно переходят в соответствующие интегралы уравнений геодезической линии, определяющей движение бесконечно малой массы в поле конечной массы. Заметим, что такое сравнение возможно только благодаря тому, что в обеих задачах мы пользовались одинаковыми, а именно гармоническими, координатами.

Продолжим теперь исследование уравнений движения двух конечных масс и найдем уравнение траектории относительного движения. Для квадрата скорости (81.31) мы сохраним обозначение v^2 вместо $\dot{\mathbf{r}}^2$. Если мы еще положим

$$u = \frac{1}{r}, \tag{81.39}$$

мы будем иметь тождество

$$v^2 = \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right), \tag{81.40}$$

откуда, после умножения на квадрат множителя при $r^2\dot{\varphi}$ в формуле (81.26),

$$v^2 + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right) v^4 + \frac{2\gamma}{c^2 r}(3m_0 + m^*) v^2 = \mu^2\left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right). \tag{81.41}$$

В левую часть мы можем подставить значение v^2 из интеграла энергии (81.22), в котором мы введем вместо $(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})^2$ выражение

$$(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})^2 = r^2 \cdot v^2 - \mu^2. \tag{81.42}$$

Формула (81.22) для E_0 напишется тогда:

$$E_0 = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{3}{8c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right) v^4 + \\ + \frac{\gamma}{2c^2 r}(3m_0 + 2m^*) v^2 + \frac{\gamma^2 m_0^2}{2c^2 r^2} - \frac{\gamma m^* \mu^2}{2c^2 r^3}. \tag{81.43}$$

Решая приближенно это уравнение относительно v^2 и подставляя найденное значение v^2 в (81.41), мы получим, после замены $1/r$ на u:

$$\mu^2\left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right) = 2E_0 + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right) E_0^2 + \\ + 2\gamma m_0 \left(1 + \frac{1}{c^2}\left(4 - \frac{3m^*}{m_0}\right) E_0\right) \cdot u + \\ + \frac{3\gamma^2 m_0^2}{c^2}\left(2 - \frac{m^*}{m_0}\right) u^2 + \frac{\gamma m^*}{c^2} \mu^2 u^3. \tag{81.44}$$

При $m^* = 0$ это уравнение переходит, с требуемой точностью, в (58.36). Чтобы удобнее было исследовать это уравнение, мы введем, вместо постоянных интегрирования E_0 и μ, две новые постоянные a и p, где

$$E_0 = -\frac{\gamma m_0}{2a}; \quad \mu^2 = \gamma m_0 p. \tag{81.45}$$

Кроме того, положим, в согласии с (81.30),

$$\frac{\gamma m_0}{c^2}=\alpha; \quad \frac{\gamma m^*}{c^2}=\alpha^*. \tag{81.46}$$

В ньютоновом приближении величины a и p представляют большую полуось и параметр эллипса (мы ограничиваемся здесь случаем финитного движения). В новых обозначениях уравнение (81.44) напишется:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=-\frac{1}{ap}+\frac{\alpha-3\alpha^*}{4a^2p}+ \\ +\left(\frac{2}{p}-\frac{4\alpha}{ap}+\frac{3\alpha^*}{ap}\right)u-\left(1-\frac{6\alpha}{p}+\frac{3\alpha^*}{p}\right)u^2+\alpha^*u^3. \tag{81.47}$$

Многочлен в правой части (81.47) имеет (при $a>p$) положительные корни u_1 и u_2, близкие к корням уравнения

$$-\frac{1}{ap}+\frac{2}{p}u-u^2=0, \tag{81.48}$$

которые равны

$$u_1^0=\frac{1+e}{p}; \quad u_2^0=\frac{1-e}{p}, \tag{81.49}$$

где

$$1-e^2=\frac{p}{a}, \tag{81.50}$$

и, кроме того, большой корень u_3, для которого нетрудно найти соотношение

$$\alpha^*u_3=1-\frac{6\alpha-\alpha^*}{p}. \tag{81.51}$$

Поэтому дифференциальное уравнение (81.47) можно написать в виде

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=(u_1-u)(u-u_2)\left(1-\frac{6\alpha-\alpha^*}{p}-\alpha^*u\right). \tag{81.52}$$

Произведем подстановку

$$u=\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_1-u_2}{2}\cos\psi. \tag{81.53}$$

Уравнение для ψ будет

$$\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2=1-\frac{6\alpha}{p}-\frac{\alpha^*e}{p}\cos\psi. \tag{81.54}$$

В поправочный член мы ввели приближенные значения корней из (81.49). Отсюда

$$\frac{d\varphi}{d\psi}=1+\frac{3\alpha}{p}+\frac{\alpha^*e}{2p}\cos\psi. \tag{81.55}$$

Изменению r от наибольшего до наименьшего значения и обратно соответствует увеличение ψ на 2π. За это время угол φ увеличится несколько больше, чем на 2π, а именно на $2\pi + \Delta\varphi$, где

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi\alpha}{p}. \tag{81.56}$$

Формула эта совпадает с формулой (58.43), которая дает смещение перигелия за один период обращения, но входящие в нее постоянные имеют несколько иной смысл. При данном параметре p смещение зависит только от суммы масс обеих компонент системы (двойной звезды). Из постоянных интегрирования в выражение для смещения входит только момент количества движения.

Наличие кубического члена в дифференциальном уравнении (81.47) приводит к тому, что орбита относительного движения будет уже не прецессирующим эллипсом, а прецессирующей кривой более сложного вида, хотя и мало отличающейся от эллипса [19].

ГЛАВА VII

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ, ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

§ 82. Потенциалы тяготения для невращающихся масс (пространственные компоненты)

Потенциалы тяготения были определены нами в предыдущей главе лишь с той точностью, с какой они были нужны для вывода уравнений движения системы тел. Мы займемся теперь более точным определением потенциалов тяготения, но ввиду сложности задачи ограничимся случаем невращающихся сферически симметричных масс.

В § 67 были приведены формулы

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3} + \frac{4S}{c^5}, \tag{82.01}$$

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5}, \tag{82.02}$$

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{4S_{ik}}{c^3}, \tag{82.03}$$

в которых U есть ньютонов потенциал, а U_i — вектор-потенциал тяготения; члены, содержащие S, S_i, S_{ik}, являются поправочными. Этих поправок мы в отдельности не вычисляли, так как для вывода уравнений движения достаточно было знать, кроме вектор-потенциала U_i, величину

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}(S + S_{kk} - 2U^2) \tag{82.04}$$

[формула (67.11)], удовлетворяющую, согласно (68.30), уравнению

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma(c^2 T^{00} + T^{kk}). \tag{82.05}$$

Теперь мы вычислим и поправочные члены, причем будем исходить из выведенной в § 68 приближенной формы уравнений Эйнштейна

$$\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial t^2} + N^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma g}{c^4}T^{\mu\nu}. \tag{82.06}$$

Рассмотрим сперва уравнение для $\mathfrak{g}^{ik}$. Мы сохраним в нем члены четвертого порядка относительно $1/c$, а члены более высокого порядка будем отбрасывать.

Согласно (66.07), мы можем тогда положить

$$-gT^{ik}=\rho v_i v_k - p_{ik}, \tag{82.07}$$

а в выражении (68.16) для N^{ik} взять главные члены

$$N^{ik}=-\frac{2}{c^4}Q_{ik}, \tag{82.08}$$

где мы положили, аналогично (71.16),

$$Q_{ik}=\frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad}U)^2-\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}. \tag{82.09}$$

Вторую производную по времени в уравнении для $\mathfrak{g}^{ik}$ мы можем отбросить. Вводя вместо $\mathfrak{g}^{ik}$ выражение (82.03), мы получим, после умножения на $\frac{1}{2}c^4$ и переноса члена Q_{ik} в правую часть, следующее уравнение для S_{ik}:

$$\Delta S_{ik}=Q_{ik}-4\pi\gamma(\rho v_i v_k - p_{ik}). \tag{82.10}$$

Напомним, что вектор-потенциал тяготения U_i удовлетворяет уравнению

$$\Delta U_i=-4\pi\gamma\rho v_i \tag{82.11}$$

и что в силу уравнения Пуассона для ньютонова потенциала U мы имеем

$$\frac{\partial Q_{ik}}{\partial x_k}=4\pi\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{82.12}$$

Поэтому из уравнений (82.10) и (82.11) следует

$$\Delta\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}\right)=-4\pi\gamma\left\{\frac{\partial \rho v_i}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k}-\rho\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\right\} \tag{82.13}$$

и в силу уравнений движения сплошной среды, написанных в форме (66.13),

$$\Delta\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}\right)=0. \tag{82.14}$$

Так как последнее уравнение имеет место во всем пространстве, то будет

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}=0, \tag{82.15}$$

т. е. будет выполняться и условие гармоничности. Получив явные выражения для S_{ik}, мы сможем проверить выполнение условия (82.15) и прямой подстановкой.

Функции S_{ik} мы будем искать в виде

$$S_{ik} = U_{ik} + V_{ik}, \tag{82.16}$$

где U_{ik} и V_{ik} удовлетворяют уравнениям

$$\Delta U_{ik} = -4\pi\gamma(\rho v_i v_k - p_{ik}), \tag{82.17}$$

$$\Delta V_{ik} = Q_{ik}. \tag{82.18}$$

Подставляя в формулу (82.09) для Q_{ik} значение ньютонова потенциала

$$U = \sum_a u_a, \tag{82.19}$$

мы можем написать

$$Q_{ik} = \sum_a Q_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} Q_{ik}^{(ab)}, \tag{82.20}$$

где *)

$$Q_{ik}^{(aa)} = \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} u_a)^2 - \frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_a}{\partial x_k}, \tag{82.21}$$

$$Q_{ik}^{(ab)} = \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} u_a \cdot \operatorname{grad} u_b) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_b}{\partial x_k} + \frac{\partial u_a}{\partial x_k}\frac{\partial u_b}{\partial x_i}\right). \tag{82.22}$$

Сообразно разложению (82.20), мы можем решение V_{ik} уравнения (82.18) искать в виде

$$V_{ik} = \sum_a V_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} V_{ik}^{(ab)}, \tag{82.23}$$

где отдельные члены удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta V_{ik}^{(aa)} = Q_{ik}^{(aa)}, \tag{82.24}$$

$$\Delta V_{ik}^{(ab)} = Q_{ik}^{(ab)}. \tag{82.25}$$

Мы найдем явные решения написанных уравнений для случая невращающихся сферически-симметричных масс. В этом случае ньютонов потенциал от массы (a) во внешнем пространстве будет

$$u_a = \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}, \tag{82.26}$$

и выражения (82.21) и (82.22) для $Q_{ik}^{(aa)}$ и $Q_{ik}^{(ab)}$ примут вид:

$$Q_{ik}^{(aa)} = \gamma^2 M_a^2 \left\{\frac{1}{2}\frac{\delta_{ik}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^4} - \frac{(x_i - a_i)(x_k - a_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^6}\right\}, \tag{82.27}$$

$$Q_{ik}^{(ab)} = \gamma^2 M_a M_b \cdot \frac{1}{2}\left\{\frac{(x_j - a_j)(x_j - b_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3 |\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3}\delta_{ik} - \right.$$
$$\left. - \frac{(x_i - a_i)(x_k - b_k) + (x_i - b_i)(x_k - a_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3 \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3}\right\}. \tag{82.28}$$

---

*) Величина $Q_{ik}^{(aa)}$ обозначалась нами раньше (в § 71) через $q_{ik}^{(a)}$.

Эти формулы справедливы вне масс; внутри же масс нужно, строго говоря, пользоваться более точными выражениями (82.21) и (82.22).

Различие между точным и приближенным значением величины $Q_{ik}^{(ab)}$ не будет, однако, существенно влиять на значение функции $V_{ik}^{(ab)}$, по крайней мере в том случае, когда линейные размеры масс малы по сравнению с их взаимными расстояниями. Поэтому мы будем разуметь под величиной $Q_{ik}^{(ab)}$ в правой части (82.25) выражение (82.28). Это выражение имеет в точках $\mathbf{r}=\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}=\mathbf{b}$ особенности не выше дипольного характера. Вследствие этого, уравнение (82.25) для $V_{ik}^{(ab)}$ будет иметь решение, которое остается конечным во всем пространстве, включая точки $\mathbf{r}=\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}=\mathbf{b}$, и обращается на бесконечности в нуль.

Это решение может быть найдено в конечном виде. Для этого напишем выражение (82.28) в виде производных по параметрам a_i, b_j, от функции $\dfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}$. Мы будем иметь

$$Q_{ik}^{(ab)}=\gamma^2\frac{M_aM_b}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial a_j\,\partial b_j}-\frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial b_k}-\frac{\partial^2}{\partial a_k\,\partial b_i}\right)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}. \tag{82.29}$$

Поэтому уравнение (82.25) сводится к более простому уравнению

$$\Delta\varphi=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{b}|} \tag{82.30}$$

Действительно, если φ есть решение (82.30), то величина

$$V_{ik}^{(ab)}=\frac{\gamma^2M_aM_b}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_j\,\partial b_j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_i\,\partial b_k}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_k\,\partial b_i}\right) \tag{82.31}$$

будет решением уравнения (82.25).

Но решение уравнения (82.30) легко написать. Обозначим через s периметр треугольника с вершинами в точках $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$

$$s=|\mathbf{r}-\mathbf{a}|+|\mathbf{r}-\mathbf{b}|+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|. \tag{82.32}$$

Тогда функция

$$\varphi=\lg s=\lg(|\mathbf{r}-\mathbf{a}|+|\mathbf{r}-\mathbf{b}|+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|) \tag{82.33}$$

будет удовлетворять уравнению (82.30), так как мы имеем

$$\Delta\lg s=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}. \tag{82.34}$$

Таким образом, искомое решение уравнения (82.25) имеет вид:

$$V_{ik}^{(ab)}=\frac{\gamma^2M_aM_b}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2\lg s}{\partial a_j\,\partial b_j}-\frac{\partial^2\lg s}{\partial a_i\,\partial b_k}-\frac{\partial^2\lg s}{\partial a_k\,\partial b_i}\right). \tag{82.35}$$

Нетрудно проверить, что это выражение остается всюду конечным и обращается на бесконечности в нуль.

Обратимся теперь к уравнению (82.24) для $V_{ik}^{(aa)}$. Перенеся начало координат в точку **a** и учитывая сферическую симметрию, мы можем написать его в виде

$$\Delta V_{ik}^{(aa)} = \left(\frac{1}{2}\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}\right) u'(r)^2, \tag{82.36}$$

где мы положили для краткости

$$u_a = u(r). \tag{82.37}$$

Решение уравнения (82.36) можно искать в виде

$$V_{ik}^{(aa)} = -\delta_{ik} q_0(r) + \left(x_i x_k - \frac{1}{3}\delta_{ik} r^2\right) q_2(r). \tag{82.38}$$

Тогда q_0 и q_2 должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 q_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dq_0}{dr} = -\frac{1}{6} u'(r)^2, \tag{82.39}$$

$$\frac{d^2 q_2}{dr^2} + \frac{6}{r}\frac{dq_2}{dr} = -\frac{1}{r^2} u'(r)^2, \tag{82.40}$$

откуда, имея в виду граничные условия, получаем:

$$q_0(r) = \frac{1}{6}\int\limits_r^\infty r u'(r)^2\, dr + \frac{1}{6r}\int\limits_0^r r^2 u'(r)^2\, dr, \tag{82.41}$$

$$q_2(r) = \frac{1}{5}\int\limits_r^\infty \frac{1}{r} u'(r)^2\, dr + \frac{1}{5r^5}\int\limits_0^r r^4 u'(r)^2\, dr. \tag{82.42}$$

Если радиус тела равен L, то при $r > L$ будет

$$u(r) = \frac{\gamma M_a}{r}, \tag{82.43}$$

и выражения для $q_0(r)$ и $q_2(r)$ приведутся к следующим:

$$q_0(r) = -\frac{\gamma^2 M_a^2}{12 r^2} + \frac{\gamma \varepsilon_a}{3r}, \tag{82.44}$$

$$q_2(r) = \frac{\gamma^2 M_a^2}{4r^4} - \frac{\gamma^2 M_a^2}{5r^5}\lambda_a, \tag{82.45}$$

где

$$\lambda_a = L - \frac{1}{\gamma^2 M_a^2}\int\limits_0^L r^4 u'(r)^2\, dr \tag{82.46}$$

есть некоторая длина порядка L, а величина

$$\varepsilon_a = \frac{1}{8\pi\gamma}\int (\operatorname{grad} u_a)^2 (dx)^3 = \frac{1}{2\gamma}\int\limits_0^\infty r^2 u'(r)^2\, dr \tag{82.47}$$

есть взятая с обратным знаком гравитационная энергия тела. Подставляя найденные значения $q_0(r)$ и $q_2(r)$ в формулу (82.38), получим

$$V_{ik}^{(aa)} = \frac{\gamma^2 M_a^2 x_i x_k}{4r^4} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\frac{\gamma\varepsilon_a}{r} - \frac{\gamma^2 M_a^2 \lambda_a}{5r^5}\left(x_i x_k - \frac{1}{3}\delta_{ik} r^2\right) \qquad (82.48)$$

или, если вновь заменить x_i на $x_i - a_i$,

$$V_{ik}^{(aa)} = \frac{\gamma M_a^2 (x_i - a_i)(x_k - a_k)}{4\,|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^4} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\frac{\gamma\varepsilon_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} - $$
$$- \frac{\gamma^2 M_a^2 \lambda_a}{5\,|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^5}\left[(x_i - a_i)(x_k - a_k) - \frac{1}{3}\delta_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{a})^2\right]. \qquad (82.49)$$

Здесь последний член мал по сравнению с первым, если расстояние до массы (a) велико по сравнению с ее радиусом; строго говоря, его следовало бы отбросить, так как подобное пренебрежение уже сделано при вычислении $V_{ik}^{(ab)}$.

Нам остается написать решение уравнения (82.17). Положим, для не-вращающихся масс

$$v_i = \dot{a}_i; \quad p_{ik} = -p\delta_{ik}, \qquad (82.50)$$

где p определяется из уравнений

$$dp = \rho\, du_a, \qquad (82.51)$$

причем, согласно (74.24),

$$\int\limits_{(a)} p\,(dx)^3 = \frac{1}{3}\varepsilon_a. \qquad (82.52)$$

Мы будем тогда иметь

$$U_{ik} = \sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i \dot{a}_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \sum_a \frac{1}{3}\delta_{ik}\frac{\gamma\varepsilon_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}. \qquad (82.53)$$

Дипольные члены здесь равны нулю по причине сферической симметрии тел, а члены более высокого порядка относительно L/R [того же, как последний член в (82.49)] мы отбрасываем.

Полагая теперь

$$S_{ik}^{(aa)} = \frac{\gamma M_a \dot{a}_i \dot{a}_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \frac{\gamma^2 M_a^2 (x_i - a_i)(x_k - a_k)}{4\,|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^4}, \qquad (82.54)$$

$$S_{ik}^{(ab)} = V_{ik}^{(ab)} = \frac{\gamma^2 M_a M_b}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j\, \partial b_j} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i\, \partial b_k} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_k\, \partial b_i}\right), \qquad (82.55)$$

обозначая через S_{ik} сумму

$$S_{ik} = \sum_a S_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} S_{ik}^{(ab)} \qquad (82.56)$$

и подставляя ее в формулу

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{4}{c^3} S_{ik}, \qquad (82.03)$$

мы получим явные выражения для пространственных компонент фундаментального тензора. Эти выражения справедливы также и в области внутри системы тел (между массами).

Для смешанных компонент фундаментального тензора мы имели приближенное выражение

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4}{c^3} U_i, \tag{82.57}$$

где U_i есть решение уравнения (82.11), которое в рассматриваемом приближении равно

$$U_i = \sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \tag{82.58}$$

[см. формулу (76.23)].

Мы можем теперь проверить, что найденные явные выражения для S_{ik} и для U_i удовлетворяют условию гармоничности (82.15). Мы имеем

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_a \frac{\partial S_{ik}^{(aa)}}{\partial x_k} = \sum_a \frac{\gamma M_a \ddot{a}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}. \tag{82.59}$$

Далее, при помощи формулы

$$\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j \partial b_j} = -\frac{(|\mathbf{r} - \mathbf{a}| + |\mathbf{r} - \mathbf{b}| - |\mathbf{a} - \mathbf{b}|)}{2|\mathbf{r} - \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \tag{82.60}$$

и двух других формул, получаемых из (82.60) перестановкой букв ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{r}$), можно проверить равенство

$$\frac{\partial S_{ik}^{(ab)}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \gamma^2 M_a M_b \frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} \right). \tag{82.61}$$

Суммируя это по a и по b, получаем

$$\sum_{a \neq b} \frac{\partial S_{ik}^{(ab)}}{\partial x_k} = \sum_{a \neq b} \gamma^2 M_a M_b \frac{(a_i - b_i)}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \tag{82.62}$$

или, если мы положим

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}, \tag{82.63}$$

$$\sum_{a \neq b} \frac{\partial S_{ik}^{(ab)}}{\partial x_k} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \tag{82.64}$$

Складывая равенства (82.59) и (82.64), получаем окончательно

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \left(M_a \ddot{a}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right). \tag{82.65}$$

Но величина Φ есть ньютонова потенциальная энергия системы тел. Поэтому

$$M_a \ddot{a}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0 \tag{82.66}$$

в силу ньютоновых уравнений движения. Следовательно, будет равно нулю и все выражение (82.65), в согласии с (82.15). Видоизменяя наши рассуждения, мы могли бы (подобно тому, как это сделано в нашей работе 1939 г. [34]) вывести из (82.15) и (82.65) ньютоновы уравнения движения (82.66).

§ 83. Потенциалы тяготения для невращающихся масс (смешанные и временна́я компоненты)

Найдем следующее [по сравнению с формулами (82.57) и (82.58)] приближение для смешанных компонент $\mathfrak{g}^{0i}$ потенциалов тяготения. В уравнении (82.06) мы должны положить $\mu = 0$, $\nu = 1$ и подставить туда значение N^{0i} из (68.15) и значение T^{0i} из (66.07), с тем, впрочем, упрощением, что напряжения p_{ik} сводятся к изотропному давлению p и что скорости $v_i = \dot{a}_i$ внутри каждого тела постоянны. Напишем формулу (68.15) для N^{0i} в виде

$$N^{0i} = -\frac{2}{c^6} Q_i, \tag{83.01}$$

где

$$Q_i = -3 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial U}{\partial x_j}. \tag{83.02}$$

Уравнение (82.06) напишется тогда

$$\frac{1}{2c} \Delta \mathfrak{g}^{0i} - \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{0i}}{\partial t^2} = \frac{2}{c^6} Q_i - \frac{8\pi\gamma}{c^4} (c^2 + 4U) T^{0i}, \tag{83.03}$$

где, согласно (66.07), в случае изотропного давления p будет

$$(c^2 + 4U) T^{0i} = v_i \left\{ \rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U\right) + \frac{p}{c^2} \right\}. \tag{83.04}$$

Подставив в уравнение (83.03) выражение

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5} \tag{83.05}$$

для $\mathfrak{g}^{0i}$, мы можем удовлетворить этому уравнению, если мы потребуем, чтобы было

$$\Delta U_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = -4\pi\gamma (c^2 + 4U) T^{0i}, \tag{83.06}$$

$$\Delta S_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S_i}{\partial t^2} = Q_i. \tag{83.07}$$

Так как эти уравнения содержат в качестве параметра скорость света c, то величины U_i и S_i уже не будут коэффициентами разложения $\mathfrak{g}^{0i}$ по обратным степеням c. Однако эта непоследовательность в обозначениях несущественна, поскольку в первом приближении уравнение (83.06) для U_i совпадает с (82.11).

Чтобы написать решение уравнения (83.06) в области вне масс, нужно знать значение объемного интеграла от его правой части, взятого по объему каждого тела. Для вычисления этого интеграла припомним соотношение

$$\rho\Pi - \rho u_a + p = 0, \tag{83.08}$$

к которому сводится формула (73.26) при отсутствии вращения. Мы имеем, согласно (74.07) и (74.24),

$$\int\limits_{(a)} \rho u_a (dx)^3 = 2\varepsilon_a; \qquad \int\limits_{(a)} p\,(dx)^3 = \frac{1}{3}\varepsilon_a. \tag{83.09}$$

Соотношение (83.08) дает поэтому

$$\int\limits_{(a)} \rho\Pi\,(dx)^3 = \frac{5}{3}\varepsilon_a. \tag{83.10}$$

При помощи этих формул получаем

$$\int\limits_{(a)} (c^2 + 4U)\,T^{0i}\,(dx)^3 = M_a\dot{a}_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v_a^2 + 3U^{(a)}(\mathbf{a})\right\} + \frac{8}{c^2}\varepsilon_a\dot{a}_i, \tag{83.11}$$

где $U^{(a)}$ есть введенный в § 71 внешний потенциал. Вычисления здесь значительно проще, чем в § 76, так как мы вращения не рассматриваем.

Заметим, что величина (83.10) есть внутренняя (упругая) энергия тела. Так как его гравитационная энергия есть минус ε_a, то сумма, равная $\frac{2}{3}\varepsilon_a$, представляет ту энергию, которую нужно учесть при вычислении эффективной массы. Последняя будет равна *)

$$m_a = M_a + \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_a}{c^2}, \tag{83.12}$$

в согласии с (76.18) и (80.18).

При помощи (83.11) мы можем написать приближенное решение уравнения (83.06) в виде

$$U_i = \sum_a \frac{\gamma\dot{a}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\left\{M_a + \frac{M_a}{c^2}\left(\frac{1}{2}v_a^2 + 3U^{(a)}(\mathbf{a})\right) + \frac{8\varepsilon_a}{c^2}\right\} + \\ + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma M_a\dot{a}_i\,|\mathbf{r}-\mathbf{a}|. \tag{83.13}$$

Последний член в (83.13) представляет поправку на запаздывание.

*) Соотношение (83.12) необходимо иметь в виду при сравнении выведенных здесь формул с формулами нашей работы 1939 г. [34].

Переходим к уравнению (83.07) для S_i. В этом уравнении можно пренебречь второй производной по времени и писать его в виде

$$\Delta S_i = Q_i. \tag{83.14}$$

Подобно (82.20), можно представить величину Q_i в виде

$$Q_i = \sum_a Q_i^{(aa)} + \sum_{a \neq b} Q_i^{(ab)}, \tag{83.15}$$

где $Q_i^{(aa)}$ есть квадратичная функция от первых производных массы (a), а $Q_i^{(ab)}$ — билинейная функция от первых производных потенциалов масс (a) и (b). Соответственно разложению (83.15) можно написать решение уравнения (83.14) в виде

$$S_i = \sum_a S_i^{(aa)} + \sum_{a \neq b} S_i^{(ab)}, \tag{83.16}$$

где отдельные члены представляют решения уравнений

$$\Delta S_i^{(aa)} = Q_i^{(aa)}, \tag{83.17}$$

$$\Delta S_i^{(ab)} = Q_i^{(ab)}. \tag{83.18}$$

Для $Q_i^{(aa)}$ мы возьмем выражение, аналогичное (82.21) и справедливое также и внутри данной массы:

$$Q_i^{(aa)} = \dot{a}_j \left\{ -\frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_a}{\partial x_j} + 4\delta_{ij}(\operatorname{grad} u_a)^2 \right\}. \tag{83.19}$$

Для $Q_i^{(ab)}$ мы ограничимся выражением, справедливым вне масс и аналогичным (82.28), а именно:

$$Q_i^{(ab)} = \frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b \left\{ (3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j)\frac{(x_j - a_j)(x_i - b_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3 \cdot |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3} + \right.$$

$$\left. + (3\dot{b}_j - 4\dot{a}_j)\frac{(x_i - a_i)(x_j - b_j)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3 |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3} + 4(\dot{a}_i + \dot{b}_i)\frac{(x_j - a_j)(x_j - b_j)}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3 |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3} \right\}. \tag{83.20}$$

Чтобы решить уравнение (83.17), представим его правую часть в виде

$$Q_i^{(aa)} = \dot{a}_j Q_{ij}^{(aa)} + 7\dot{a}_i Q_{jj}^{(aa)}. \tag{83.21}$$

Решением будет, очевидно,

$$S_i^{(aa)} = \dot{a}_j V_{ij}^{(aa)} + 7\dot{a}_i V_{jj}^{(aa)}, \tag{83.22}$$

где $V_{ij}^{(aa)}$ есть найденное выше решение (82.38) или (82.49) уравнения (82.24).

Переходя к уравнению (83.18), представим его правую часть, т. е. выражение (83.20), в виде

$$Q_i^{(ab)} = \frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b \left\{ (3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j)\frac{\partial^2}{\partial a_j \partial b_i} + (3\dot{b}_j - 4\dot{a}_j)\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial b_j} + \right.$$

$$\left. + 4(\dot{a}_i + \dot{b}_i)\frac{\partial^2}{\partial a_j \partial b_j} \right\} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{r}-\mathbf{b}|}. \tag{83.23}$$

Вследствие (82.34) решением уравнения (83.18) будет

$$S_i^{(ab)} = \frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b \left\{ (3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j)\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j\,\partial b_i} + \right.$$

$$\left. + (3\dot{b}_j - 4\dot{a}_j)\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i\,\partial b_j} + 4(\dot{a}_i + \dot{b}_i)\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j\,\partial b_j} \right\}. \qquad (83.24)$$

Мы выпишем также значение $S_i^{(aa)}$ вне масс. Для этого нужно подставить в (83.22) значение $V_{ij}^{(aa)}$ из (82.49), причем можно опустить члены, содержащие λ_a и быстро убывающие на больших расстояниях. В получаемом для $S_i^{(aa)}$ выражении удобно выделить гармонический член и писать $S_i^{(aa)}$ в виде

$$S_i^{(aa)} = -\frac{22}{3}\dot{a}_i \frac{\gamma \varepsilon_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \overline{S}_i^{(aa)}, \qquad (83.25)$$

где

$$\overline{S}_i^{(aa)} = \gamma^2 M_a^2 \left\{ \dot{a}_j \frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{4|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^4} + \frac{7}{4}\frac{\dot{a}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2} \right\}. \qquad (83.26)$$

Подстановка этих выражений в формулу (83.16) даст значение S_i, которое, вместе с найденным раньше значением (83.13) для U_i, позволит по формуле (83.05) определить и $\mathfrak{g}^{0i}$. Формулу для $\mathfrak{g}^{0i}$ можно написать в виде

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4\overline{U}_i}{c^3} + \frac{4\overline{S}_i}{c^5}, \qquad (83.27)$$

где

$$\overline{U}_i = \sum_a \frac{\gamma \dot{a}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\left\{ M_a + \frac{2\varepsilon_a}{3c^2} + \frac{M_a}{c^2}\left(\frac{1}{2}v_a^2 + 3U^{(a)}(\mathbf{a})\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma M_a \dot{a}_i |\mathbf{r}-\mathbf{a}|, \qquad (83.28)$$

$$\overline{S}_i = \sum_a \overline{S}_i^{(aa)} + \sum_{a \neq b} S_i^{(ab)}. \qquad (83.29)$$

Здесь величины $\overline{U}_i$ и $\overline{S}_i$ отличаются, соответственно, от U_i и S_i гармоническими членами, содержащими ε_a. Заметим, что величина ε_a входит в $\overline{U}_i$ только через посредство эффективной массы (83.12). Сумма $\overline{S}_i$ есть однородная квадратичная функция от масс, тогда как $\overline{U}_i$ зависит от масс линейно.

Нам остается найти явное выражение для временной компоненты потенциалов тяготения, т. е. для величины $\mathfrak{g}^{00}$. В § 68 уже были выписаны уравнения, определяющие $\mathfrak{g}^{00}$. Согласно (68.42) и (68.40) мы имеем

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4}{c^3}\overline{U} + \frac{7}{c^5}\overline{U}^2, \qquad (83.30)$$

где $\overline{U}$ есть обобщенный ньютонов потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\overline{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left(c^2 + \frac{1}{2}U\right)T^{00}, \tag{83.31}$$

в правой части которого стоит выражение

$$\left(c^2 + \frac{1}{2}U\right)T^{00} = \rho + \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - \frac{1}{2}U\right), \tag{83.32}$$

вытекающее из (66.07) и использованное в § 79. Потенциал $\overline{U}$ вычисляется подобно тому, как был вычислен в § 77 потенциал U^*, с тем упрощением, что теперь массы предполагаются сферически симметричными и невращающимися. Используя (83.09) и (83.10), получаем

$$\int\limits_{(a)}\left(c^2 + \frac{1}{2}U\right)T^{00}(dx)^3 = M_a + \frac{2}{3c^2} + \frac{M_a}{2c^2}\left(v_a^2 - U^{(a)}(\mathbf{a})\right) \tag{83.33}$$

и, следовательно,

$$\overline{U} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\left\{M_a + \frac{2}{3c^2}\varepsilon_a + \frac{M_a}{2c^2}\left(v_a^2 - U^{(a)}(\mathbf{a})\right)\right\} + \\ + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma M_a|\mathbf{r}-\mathbf{a}|. \tag{83.34}$$

Подстановка этого выражения в (83.30) дает $\mathfrak{g}^{00}$. Тем самым заканчивается определение потенциалов тяготения во втором приближении.

Мы должны еще проверить, что полученные для $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$ выражения удовлетворяют условию гармоничности

$$\frac{\partial\mathfrak{g}^{00}}{\partial t} + \frac{\partial\mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_i} = 0. \tag{83.35}$$

Дифференцируя выражения (83.34) и (83.28) для $\overline{U}$ и $\overline{U}_i$, получаем непосредственно

$$\frac{\partial\overline{U}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{U}_i}{\partial t} = \frac{7}{2c^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i U^{(a)}(\mathbf{a})}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \\ + \frac{1}{c^2}\sum_a \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\left(\dot{a}_i\ddot{a}_i - \frac{1}{2}\frac{dU^{(a)}(\mathbf{a})}{dt}\right). \tag{83.36}$$

Далее, мы имеем из (83.26):

$$\frac{\partial\overline{S}_i^{(aa)}}{\partial x_i} = -\frac{7}{4}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\gamma^2 M_a^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2}. \tag{83.37}$$

При вычислении выражения

$$\frac{\partial S_i^{(ab)}}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b\left\{(3\dot a_j-4\dot b_j)\frac{\partial}{\partial a_j}\frac{\partial^2\lg s}{\partial b_i\,\partial x_i}+\right.$$
$$\left.+(3\dot b_j-4\dot a_j)\frac{\partial}{\partial b_j}\frac{\partial^2\lg s}{\partial a_i\,\partial x_i}+4(\dot a_j+\dot b_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^2\lg s}{\partial a_i\,\partial b_i}\right\} \tag{83.38}$$

мы должны использовать формулу (82.60) и две другие формулы, получаемые из (82.60) перестановкой букв a, b, x; кроме того, при преобразовании выражения (83.38) следует иметь в виду, что $\lg s$ и производные от этой величины зависят только от разностей координат, вследствие чего, например,

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_j}+\frac{\partial}{\partial b_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\lg s=0. \tag{83.39}$$

Объединяя в выражении (83.38) члены, содержащие $|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{b}|$, затем члены, содержащие $|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, и наконец члены, содержащие $|\mathbf{r}-\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, можем написать:

$$\frac{\partial S_i^{(ab)}}{\partial x_i}=\frac{1}{4}\gamma^2 M_a M_b\left\{-7\dot a_j\frac{\partial}{\partial a_j}-7\dot b_j\frac{\partial}{\partial b_j}\right\}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}+$$
$$+\frac{1}{4}\gamma^2 M_a M_b\left\{-7\dot a_j\frac{\partial}{\partial x_j}+(\dot a_j+\dot b_j)\frac{\partial}{\partial b_j}\right\}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}+$$
$$+\frac{1}{4}\gamma^2 M_a M_b\left\{-7\dot b_j\frac{\partial}{\partial x_j}+(\dot a_j+\dot b_j)\frac{\partial}{\partial a_j}\right\}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{83.40}$$

Суммируя это выражение по a и по b (с пропуском члена $a=b$) и складывая с суммой по a от (83.37), получаем:

$$\frac{\partial \overline{S}_i}{\partial x_i}=-\frac{7}{2}U\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{7}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_a\frac{\gamma M_a\dot a_i U^{(a)}(\mathbf{a})}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}+$$
$$+\sum_a\frac{\gamma M_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\left\{\frac{1}{2}\frac{dU^{(a)}(\mathbf{a})}{dt}-\dot a_i\left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right)_a\right\}. \tag{83.41}$$

Но, если в формуле (83.30) заменить в поправочном члене $\overline{U}$ на U, то левая часть условия гармоничности (83.35) будет отличаться лишь множителем $\frac{4}{c^3}$ от выражения

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{7}{2}U\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial \overline{S}_i}{\partial x_i}\right)=$$
$$=\frac{1}{c^2}\sum_a\frac{\gamma M_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\dot a_i\left\{\ddot a_i-\left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right)_a\right\}, \tag{83.42}$$

которое получается после прибавки к (83.36) деленного на c^2 выражения (83.41) и переноса одного из членов в левую часть.

Но мы имеем

$$M_a\left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right)_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \tag{83.43}$$

где Φ — ньютонова потенциальная энергия

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{a \neq b} \gamma \frac{M_a M_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}. \tag{83.44}$$

Поэтому, в силу ньютоновых уравнений движения будет

$$\ddot{a}_i = \left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right)_a, \tag{83.45}$$

и правая часть (83.42) обращается в нуль. Таким образом, условие гармоничности (83.35) выполняется.

Чтобы получить для потенциалов тяготения $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ не слишком сложные явные выражения, справедливые также и внутри системы тел (между массами), нам пришлось, в этом и в предыдущем параграфе, ввести довольно сильные ограничения: мы предположили массы сферически симметричными и не вращающимися. От этих ограничений мы освободимся в следующем параграфе, когда будем рассматривать потенциалы тяготения на больших расстояниях от системы тел.

§ 84. Потенциалы тяготения на больших расстояниях от системы тел (пространственные компоненты)

В этом параграфе и в следующем мы выведем для потенциалов тяготения явные выражения, справедливые на „умеренно-больших" расстояниях от системы тел. Под „умеренно-большими" расстояниями мы разумеем такие, которые хотя и велики по сравнению с размерами системы, но все еще малы по сравнению с длиной излучаемых системой волн (см. § 64). Относительно внутренней структуры тел мы сохраним столь же общие предположения, как и те, какие мы делали в § 79 при выводе интегралов уравнений движения системы тел.

Начнем с определения пространственных компонент $\mathfrak{g}^{ik}$. Мы имеем, как и в § 82,

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{4}{c^3} S_{ik}, \tag{84.01}$$

где, согласно (82.16)—(82.18),

$$S_{ik} = U_{ik} + V_{ik}, \tag{84.02}$$

и функции U_{ik} и V_{ik} удовлетворяют уравнениям

$$\Delta U_{ik} = -4\pi\gamma(\rho v_i v_k - p_{ik}), \tag{84.03}$$

$$\Delta V_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}. \tag{84.04}$$

Правая часть уравнения (84.03) отлична от нуля только внутри масс и имеет, если пользоваться математическим термином, моменты всех порядков (см. § 70). Это значит, что, умножая ее на произведения различных степеней координат и интегрируя по всему объему, мы получим сходящиеся интегралы. Поэтому решение уравнения (84.03), справедливое вне системы масс, можно написать в виде ряда по шаровым функциям (мультиполям). Начало координат мы возьмем в какой-либо точке внутри системы тел, не обязательно в ее центре тяжести. Мы получим

$$U_{ik} = U_{ik}^0 + U_{ik}^{(1)} + \ldots, \tag{84.05}$$

где первые два члена равны:

$$U_{ik}^0 = \frac{\gamma}{r}\int(\rho v_i v_k - p_{ik})(dx)^3, \tag{84.06}$$

$$U_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_j}{r^3}\int(\rho v_i v_k - p_{ik})\, x_j\,(dx)^3. \tag{84.07}$$

В уравнении же (84.04) правая часть отлична от нуля во всем пространстве и убывает только обратно пропорционально четвертой степени расстояния. Поэтому существует только момент нулевого порядка, и решение этого уравнения не может быть представлено в виде ряда, аналогичного (84.05).

Чтобы найти решение, введем в правую часть (84.04) выражение для ньютонова потенциала в виде интеграла

$$U = \gamma\int\frac{\rho'(dx')^3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{84.08}$$

Мы получим тогда формулу, которую можно написать в виде

$$\Delta V_{ik} = \frac{1}{2}\gamma^2\int\int\rho'(dx')^3\rho''(dx'')^3\left\{\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x'_l\,\partial x''_l} - \frac{\partial^2}{\partial x'_i\,\partial x''_k} - \frac{\partial^2}{\partial x'_k\,\partial x''_i}\right\}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}. \tag{84.09}$$

Из § 82 мы знаем [формулы (82.33) и (82.34)], что функция

$$\lg s = \lg(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + |\mathbf{r}-\mathbf{r}''| + |\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|) \tag{84.10}$$

удовлетворяет уравнению

$$\Delta\lg s = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}. \tag{84.11}$$

Отсюда нетрудно заключить, что то решение уравнения (84.09), которое всюду конечно и обращается на бесконечности в нуль, может быть представлено в виде

$$V_{ik} = \frac{1}{2}\gamma^2 \int \int \rho' (dx')^3 \rho'' (dx'')^3 \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_l' \partial x_l''} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i' \partial x_k''} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_k' \partial x_i''} \right\}. \tag{84.12}$$

Нас интересует значение этого выражения на больших расстояниях. Для вычисления его мы должны взять разложение s и $\lg s$ по обратным степеням r, справедливое при больших r и конечных r' и r''. Мы имеем

$$s = 2r + \left(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''| - \frac{x_i x_i'}{r} - \frac{x_i x_i''}{r}\right) + \\ + \frac{1}{2}(x_i' x_k' + x_i'' x_k'')\left(\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{x_i x_k}{r^3}\right) + \ldots, \tag{84.13}$$

откуда

$$\lg s = \lg 2r + \frac{1}{2r}\left(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''| - \frac{x_i (x_i' + x_i'')}{r}\right) + \\ + \frac{x_j}{4r^3}(x_j' + x_j'')|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''| + \frac{1}{8r^2}(r'^2 + r''^2 + 2x_j' x_j'') - \\ - \frac{x_i x_k}{8r^4}(3x_i' x_k' + 3x_i'' x_k'' + x_i'' x_k' + x_i' x_k'') + \ldots \tag{84.14}$$

Дифференцируя, получаем для симметричной и антисимметричной части второй производной по x_i' и x_k'' выражения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i' \partial x_k''} + \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i'' \partial x_k'}\right) = \frac{1}{4r^2}\left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}\right) - \\ - \left(\frac{1}{2r} + \frac{x_j (x_j' + x_j'')}{4r^3}\right)\left(\frac{\delta_{ik}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} - \frac{(x_i' - x_i'')(x_k' - x_k'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3}\right), \tag{84.15}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i' \partial x_k''} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i'' \partial x_k'}\right) = \frac{x_k}{4r^3}\frac{x_i' - x_i''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} - \frac{x_i}{4r^3}\frac{x_k' - x_k''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}. \tag{84.16}$$

Здесь отброшены члены, убывающие быстрее чем $1/r^2$. Полагая в (84.15) $i = l$ и $k = l$ и суммируя по l, получаем

$$\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_l' \partial x_l''} = \frac{1}{2r^2} - \left(\frac{1}{r} + \frac{x_j (x_j' + x_j'')}{2r^3}\right)\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \tag{84.17}$$

в согласии с точной формулой

$$\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_l' \partial x_l''} = \frac{1}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}\right)\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}. \tag{84.18}$$

Подставим (84.15) и (84.17) в (84.12) и рассмотрим сперва члены, убывающие как $1/r$. Обозначив соответствующие члены V_{ik} через V_{ik}^0, получим

$$V_{ik}^0 = -\frac{\gamma^2}{2r} \int \int \rho' (dx')^3 \rho'' (dx'')^3 \frac{(x_i' - x_i'')(x_k' - x_k'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3}. \quad (84.19)$$

В подинтегральной функции важна только симметричная часть (относительно x' и x''). Заменяя поэтому множитель $x_i' - x_i''$ на $2x_i'$ и выполняя интегрирование по x'', получаем

$$V_{ik}^0 = \frac{\gamma}{r} \int x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} \rho (dx)^3, \quad (84.20)$$

или, так как это выражение заведомо симметрично относительно i и k,

$$V_{ik}^0 = \frac{\gamma}{2r} \int \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \rho (dx)^3 \quad (84.21)$$

(см. также лемму в § 79). Заметим, что это же выражение равно

$$V_{ik}^0 = -\frac{1}{4\pi r} \int \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} (\operatorname{grad} U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) (dx)^3, \quad (84.22)$$

что и следовало ожидать, так как V_{ik} удовлетворяет уравнению (84.04) и объемный интеграл от правой части этого уравнения конечен.

Рассмотрим теперь в (84.15) и (84.17) члены, убывающие как $1/r^2$. Среди них есть члены, не зависящие ни от x', ни от x''. Эти члены дают в V_{ik} вклад

$$V_{ik}' = \frac{\gamma^2 M^2 x_i x_k}{4r^4}, \quad (84.23)$$

где M есть полная масса системы.

Остальные члены порядка $1/r^2$ имеют дипольный характер. Они равны

$$V_{ik}^{(1)} = -\frac{\gamma^2 x_j}{2r^3} \int \rho' (dx')^3 \rho'' (dx'')^3 \frac{x_j' + x_j''}{2} \frac{(x_i' - x_i'')(x_k' - x_k'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3}. \quad (84.24)$$

Но мы имеем тождество

$$\begin{aligned} &[x_i' x_j' (x_k' - x_k'') + x_k' x_j' (x_i' - x_i'') - x_i' x_k' (x_j' - x_j'')] + \\ &+ [x_i'' x_j'' (x_k'' - x_k') + x_k'' x_j'' (x_i'' - x_i') - x_i'' x_k'' (x_j'' - x_j')] = \\ &= (x_j' + x_j'')(x_i' - x_i'')(x_k' - x_k''), \end{aligned} \quad (84.25)$$

в котором выражения в двух квадратных скобках в левой части получаются друг из друга перестановкой x' и x''. При интегрировании в (84.24) мы можем поэтому взять вместо множителя (84.25) одну из квадратных скобок, умноженную на 2. Выполняя затем интегрирование по той переменной, которая входит в квадратную скобку линейно, получим

$$V_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_i}{2r^3} \int \left(x_j x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_j x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i x_k \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \rho \, (dx)^3. \tag{84.26}$$

Объединим теперь в U_{ik} и V_{ik} члены одинаковой полярности. Полагая

$$S_{ik}^0 = U_{ik}^0 + V_{ik}^0 \tag{84.27}$$

и складывая (84.06) и (84.21), получим

$$S_{ik}^0 = \frac{\gamma}{2r} \int \left\{ 2\rho v_i v_k - 2p_{ik} + \rho \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \right\} (dx)^3. \tag{84.28}$$

Представив член, содержащий p_{ik}, в виде

$$-2 \int p_{ik} \, (dx)^3 = \int \left(x_i \frac{\partial p_{jk}}{\partial x_j} + x_k \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j} \right) (dx)^3 \tag{84.29}$$

и воспользовавшись уравнениями движения внутренней задачи

$$\rho w_i = \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j}, \tag{84.30}$$

получим из (84.28)

$$S_{ik}^0 = \frac{\gamma}{2r} \int \rho \, (x_i w_k + x_k w_i + 2v_i v_k) \, (dx)^3 \tag{84.31}$$

или

$$S_{ik}^0 = \frac{\gamma}{2r} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho x_i x_k \, (dx)^3. \tag{84.32}$$

Таким образом, после всех преобразований величина S_{ik}^0 выразилась через вторую производную по времени от соответствующего момента инерции.

Преобразуем теперь величину

$$S_{ik}^{(1)} = U_{ik}^{(1)} + V_{ik}^{(1)}. \tag{84.33}$$

Из (84.07) и (84.26) получаем

$$S_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_j}{2r^3} \int \Big\{ 2\rho v_i v_k x_j - 2p_{ik} x_j + \\ + \rho \left(x_j x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_j x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i x_k \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \Big\} (dx)^3. \tag{84.34}$$

Используя тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_s} (x_j x_i p_{ks} + x_j x_k p_{is} - x_i x_k p_{js}) = \\ = 2x_j p_{ik} + x_j x_i \frac{\partial p_{ks}}{\partial x_s} + x_j x_k \frac{\partial p_{is}}{\partial x_s} - x_i x_k \frac{\partial p_{js}}{\partial x_s}, \tag{84.35}$$

представим интеграл, содержащий p_{ik}, в виде

$$-2\int p_{ik}x_j\,(dx)^3 = \int\left(x_jx_i\frac{\partial p_{ks}}{\partial x_s}+x_jx_k\frac{\partial p_{is}}{\partial x_s}-x_ix_k\frac{\partial p_{js}}{\partial x_s}\right)(dx)^3. \quad (84.36)$$

Пользуясь уравнениями движения (84.30), можем тогда написать

$$S_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_j}{2r^3}\int \rho\,(2x_jv_iv_k + x_jx_iw_k + x_jx_kw_i - x_ix_kw_j)\,(dx)^3, \quad (84.37)$$

или

$$S_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_j}{2r^3}\,\frac{d}{dt}\int \rho\,(x_jx_iv_k + x_jx_kv_i - x_ix_kv_j)\,(dx)^3. \quad (84.38)$$

Отсюда по формуле

$$S_{ik} = S_{ik}^{(0)} + S_{ik}^{(1)} + V'_{ik} \quad (84.39)$$

получаем S_{ik}, а подставляя это значение S_{ik} в формулу (84.01), получим следующее окончательное выражение для $\mathfrak{g}^{ik}$:

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3r}\,\frac{d^2}{dt^2}\int \rho x_ix_k\,(dx)^3 +$$
$$+\frac{2\gamma x_j}{c^3r^3}\,\frac{d}{dt}\int \rho\,(x_jx_iv_k + x_jx_kv_i - x_ix_kv_j)\,(dx)^3 + \frac{\gamma^2M^2x_ix_k}{c^3r^4}. \quad (84.40)$$

Мы получили явные выражения для пространственных компонент потенциалов тяготения, справедливые на больших (в указанном выше смысле) расстояниях от системы тел. Здесь среди членов, содержащих c^3 в знаменателе, отброшены те, которые убывают быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$.

Заметим, что в случае одной сосредоточенной массы выражение (84.40) приводится к тому, которое соответствует строгому решению уравнений тяготения [формула (58.12)].

§ 85. Потенциалы тяготения на больших расстояниях от системы тел (смешанные и временна́я компоненты)

Для определения смешанных компонент на больших расстояниях мы вернемся к уравнениям, приведенным в начале § 83. Мы имеем

$$\frac{1}{2c}\,\Delta\mathfrak{g}^{0i} - \frac{1}{2c^3}\,\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{0i}}{\partial t^2} = \frac{2}{c^6}\,Q_i - \frac{8\pi\gamma}{c^4}\,(c^2+4U)\,T^{0i}, \quad (85.01)$$

где

$$Q_i = -3\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial x_i} + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_j} \quad (85.02)$$

и, согласно (66.07),

$$(c^2+4U)\,T^{0i} = \rho v_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\,v^2 + \Pi + 3U\right)\right\} - \frac{1}{c^2}\,p_{ik}v_k. \quad (85.03)$$

Мы попрежнему полагаем

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5} \tag{85.04}$$

и подчиняем U_i и S_i уравнениям

$$\Delta U_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = -4\pi\gamma (c^2 + 4U)\, T^{0i}, \tag{85.05}$$

$$\Delta S_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S_i}{\partial t^2} = Q_i. \tag{85.06}$$

Вводя, согласно (75.18), величину

$$W = \frac{1}{2}\gamma \int \rho' \,|\, \mathbf{r} - \mathbf{r}' \,|\, (dx')^3, \tag{85.07}$$

а также

$$W_i = \frac{1}{2}\gamma \int (\rho v_i)' \,|\, \mathbf{r} - \mathbf{r}' \,|\, (dx')^3, \tag{85.08}$$

мы можем написать

$$U_i = \gamma \int \frac{\{(c^2 + 4U)\, T^{0i}\}'}{|\, \mathbf{r} - \mathbf{r}' \,|} (dx')^3 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}. \tag{85.09}$$

Последний член представляет поправку на запаздывание. Разлагая здесь интеграл в ряд по мультиполям и ограничиваясь первыми двумя членами и приближенным значением третьего члена, получим:

$$U_i = \frac{\gamma}{r} \int (c^2 + 4U)\, T^{0i} (dx)^3 + \frac{\gamma x_j}{r^3} \int (c^2 + 4U)\, T^{0i} x_j (dx)^3 + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k}\frac{\gamma}{2r} \int \rho v_i x_j x_k (dx)^3 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}. \tag{85.10}$$

В этом выражении можно выделить члены, содержащие количество движения и момент количества движения системы. Эти константы движения выражаются по формулам (79.19) и (79.34) через функцию G_i, связанную согласно определению (79.18), с величиной (85.03) соотношением

$$(c^2 + 4U)\, T^{0i} = G_i + \frac{\rho}{c^2}\left(4U_i + \frac{\partial^2 W}{\partial x_i\, \partial t}\right). \tag{85.11}$$

А именно, мы имеем

$$P_i = \int G_i (dx)^3, \tag{85.12}$$

$$M_{ik} = \int (x_i G_k - x_k G_i)(dx)^3. \tag{85.13}$$

Соответствующее преобразование мы произведем уже после вычисления величины S_i, так как в этой величине ряд членов объединяется с членами из U_i.

В уравнении (85.06) для S_i мы пренебрегаем, как и раньше второй производной по времени и пишем его в виде

$$\Delta S_i = Q_i. \tag{85.14}$$

Величину Q_i можно, подобно (84.09), представить в виде двукратного объемного интеграла

$$Q_i = \gamma^2 \int \int (dx')^3 (dx'')^3 (\rho v_k)' \rho'' \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_k''} + \frac{\partial^2}{\partial x_k' \partial x_i''} \right) + \right.$$
$$\left. + 4\delta_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_s' \partial x_s''} - \frac{7}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_k''} - \frac{\partial^2}{\partial x_k' \partial x_i''} \right) \right\} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}, \tag{85.15}$$

откуда сразу получается решение уравнения (85.14) в виде

$$S_i = \gamma^2 \int \int (dx')^3 (dx'')^3 (\rho v_k)' \rho'' \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i' \partial x_k''} + \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_k' \partial x_i''} \right) + \right.$$
$$\left. + 4\delta_{ik} \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_l' \partial x_l''} - \frac{7}{2} \left(\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i' \partial x_k''} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_k' \partial x_i''} \right) \right\}. \tag{85.16}$$

Мы должны сюда подставить выражения (84.15) и (84.16) и произвести интегрирование по x' и по x''.

Выделим сперва член, убывающий как $\frac{1}{r}$. Его можно написать в виде

$$S_i^0 = \frac{\gamma}{r} \left\{ -4 \int \rho U_i (dx)^3 + \int \rho v_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_k} (dx)^3 \right\}. \tag{85.17}$$

С другой стороны, дифференцируя по времени очевидное равенство

$$\int \rho \frac{\partial W}{\partial x_i} (dx)^3 = 0, \tag{85.18}$$

будем иметь

$$\int \rho \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} + v_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_k} \right) (dx)^3 = 0, \tag{85.19}$$

вследствие чего можем также написать

$$S_i^0 = \frac{\gamma}{r} \left\{ -4 \int \rho U_i (dx)^3 - \int \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 \right\}. \tag{85.20}$$

Рассмотрим теперь в (85.16) члены, убывающие как $\frac{1}{r^2}$. В подинтегральной функции среди этих членов есть такие, которые не зависят ни от x', ни от x''. Они дают

$$S_i' = \frac{7\gamma^2 M P_i}{4r^2} + \frac{\gamma^2 M P_k x_i x_k}{4r^4}. \tag{85.21}$$

Остальные члены порядка $\frac{1}{r^2}$ имеют дипольный характер. Обозначая их через $S_i^{(1)}$, будем иметь:

$$S_i^{(1)} = -\frac{7}{4}\gamma^2 \frac{x_j}{r^3} \int\int (\rho v_i)' \rho'' \frac{(x'_j + x''_j)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} (dx')^3 (dx'')^3 - $$
$$ - \frac{1}{4}\gamma^2 \frac{x_j}{r^3} \int\int (\rho v_k)' \rho'' \frac{(x'_j + x''_j)(x'_i - x''_i)(x'_k - x''_k)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3} (dx')^3 (dx'')^3 - $$
$$ - \frac{7}{4}\gamma^2 \frac{x_j}{r^3} \int\int (\rho v_j)' \rho'' \frac{(x'_i - x''_i)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} (dx')^3 (dx'')^3 + $$
$$ + \frac{7}{4}\gamma^2 \frac{x_j}{r^3} \delta_{ij} \int\int (\rho v_k)' \rho'' \frac{(x'_k - x''_k)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} (dx')^3 (dx'')^3. \tag{85.22}$$

Напишем это выражение в виде

$$S_i^{(1)} = \frac{\gamma x_j}{r^3}(A_{ji} + B_{ji}), \tag{85.23}$$

где A_{ji} и B_{ji} представляют антисимметричную и симметричную часть соответствующего коэффициента

$$A_{ij} = -A_{ji}; \qquad B_{ij} = B_{ji}. \tag{85.24}$$

Мы имеем

$$A_{ji} = -\frac{7}{4}\gamma \int\int (\rho v_i)' \rho'' \frac{x''_j}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} (dx')^3 (dx'')^3 + $$
$$ + \frac{7}{4}\gamma \int\int (\rho v_j)' \rho'' \frac{x''_i}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} (dx')^3 (dx'')^3 - $$
$$ - \frac{1}{4}\gamma \int\int (\rho v_k)' \rho'' \frac{(x''_j x'_i - x''_i x'_j)(x'_k - x''_k)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3} (dx')^3 (dx'')^3, \tag{85.25}$$

$$B_{ji} = -\frac{7}{4}\gamma \int\int (\rho v_i)' \rho'' \frac{x'_j}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} (dx')^3 (dx'')^3 - $$
$$ - \frac{7}{4}\gamma \int\int (\rho v_j)' \rho'' \frac{x'_i}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} (dx')^3 (dx'')^3 - $$
$$ - \frac{1}{4} \int\int (\rho v_k)' \rho'' \frac{(x'_i x'_j - x''_i x''_j)(x'_k - x''_k)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3} (dx')^3 (dx'')^3 + $$
$$ + \frac{7}{4}\gamma\delta_{ij} \int\int (\rho v_k)' \rho'' \frac{x'_k - x''_k}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} (dx')^3 (dx'')^3. \tag{85.26}$$

Вычисление A_{ji} дает, после некоторых выкладок,

$$A_{ji} = -2 \int \rho (x_j U_i - x_i U_j)(dx)^3 - $$
$$ - \frac{1}{2} \int \rho \left(x_j \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \, \partial t} - x_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \, \partial t} \right) (dx)^3. \tag{85.27}$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W_k}{\partial x_k}=0, \tag{85.28}$$

вытекающим из определения (85.07) и (84.08) величин W и W_i и из уравнения неразрывности.

Для симметричной части B_{ji} дипольного коэффициента получаем

$$B_{ji}=-\frac{7}{4}\int \rho(x_j v_i+x_i v_j)\,U\,(dx)^3+ \\ +\frac{1}{4}\int \rho x_i x_j\left(v_k\frac{\partial U}{\partial x_k}-\frac{\partial U}{\partial t}\right)(dx)^3+\frac{7}{2}\delta_{ij}\int \rho\frac{\partial W}{\partial t}(dx)^3. \tag{85.29}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (85.28) и аналогичным соотношением для потенциалов U, U_k. Нам остается составить сумму $U_i+\frac{1}{c^2}S_i$ и произвести в ней приведение подобных членов. Обозначив через U_i^0 первый член в формуле (85.10) и пользуясь (85.20), получим

$$U_i^0+\frac{1}{c^2}S_i^0=\frac{\gamma}{r}\int\left\{(c^2+4U)\,T^{0i}-\frac{\rho}{c^2}\left(4U_i+\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}\right)\right\}(dx)^3. \tag{85.30}$$

Но в силу (85.11) и (85.12) это выражение равно

$$U_i^0+\frac{1}{c^2}S_i^0=\frac{\gamma P_i}{r}, \tag{85.31}$$

где P_i — полное количество движения системы, включая поправки порядка $\frac{1}{c^2}$. Рассмотрим теперь ту часть дипольных членов, которая имеет антисимметричные коэффициенты. Вследствие (85.27), (85.11) и (85.13) эта часть равна

$$\frac{\gamma x_j}{r^3}\left\{\frac{1}{2}\int (c^2+4U)(x_j T^{0i}-x_i T^{0j})(dx)^3+\frac{1}{c^2}A_{ji}\right\}=\frac{\gamma x_j}{2r^3}M_{ji}, \tag{85.32}$$

где M_{ji} — полный момент количества движения системы, включая релятивистские поправки.

Всю совокупность дипольных членов мы можем написать в виде

$$U_i^{(1)}+\frac{1}{c^2}S_i^{(1)}=\frac{\gamma x_j}{2r^3}(M_{ji}+\dot{D}_{ji}), \tag{85.33}$$

где $\dot{D}_{ji}$ — симметричная часть коэффициента. Обозначение (точка сверху) оправдывается тем, что эта величина может быть представлена в виде производной по времени от некоторой величины D_{ji}, имеющей простой физический смысл. Сравнивая последнюю формулу с (85.10) и (85.23), получаем для $\dot{D}_{ji}$ выражение

$$\dot{D}_{ji} = \int (c^2 + 4U)(T^{0i}x_j + T^{0j}x_i)(dx)^3 + \frac{2}{c^2} B_{ji}. \tag{85.34}$$

Подставляя сюда значение T^{0i} из (85.03) и значение B_{ji} из (85.29), будем иметь:

$$\begin{aligned} \dot{D}_{ji} = & \int \rho(v_i x_j + v_j x_i)(dx)^3 + \\ & + \frac{1}{c^2} \int \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - \frac{1}{2} U\right)(v_i x_j + v_j x_i)(dx)^3 - \\ & - \frac{1}{c^2} \int (p_{ik} v_k x_j + p_{jk} v_k x_i)(dx)^3 + \frac{1}{2c^2} \int \rho x_i x_j \left(v_k \frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial t}\right)(dx)^3 + \\ & + \frac{7}{c^2} \delta_{ij} \int \rho \frac{\partial W}{\partial t}(dx)^3. \end{aligned} \tag{85.35}$$

Прибавляя сюда выражение

$$\frac{1}{c^2} \int x_i x_j v_k \left(\rho w_k - \rho \frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{\partial p_{sk}}{\partial x_s}\right)(dx)^3 = 0, \tag{85.36}$$

которое равно нулю в силу внутренних уравнений движения, и используя равенство

$$\int \rho \frac{\partial W}{\partial t}(dx)^3 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int \rho W (dx)^3, \tag{85.37}$$

а также формулу (79.04) для полной производной по времени от упругой энергии П, мы можем написать величину $\dot{D}_{ji}$ в виде

$$\dot{D}_{ji} = \frac{dD_{ji}}{dt}, \tag{85.38}$$

где

$$\begin{aligned} D_{ji} = & \int \rho x_i x_j \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - \frac{1}{2} U\right)\right\}(dx)^3 + \\ & + \frac{7}{2c^2} \delta_{ij} \int \rho W (dx)^3. \end{aligned} \tag{85.39}$$

Первый член в этом выражении есть момент инерции системы тел, вычисленный с учетом весомости кинетической и потенциальной энергии.

Теперь мы можем написать полное выражение для $U_i + \frac{1}{c^2} S_i$. Согласно (85.10), (85.21), (85.31) и (85.33), мы будем иметь:

$$\begin{aligned} U_i + \frac{1}{c^2} S_i = & \frac{\gamma}{r} P_i + \frac{\gamma x_j}{2r^3} M_{ji} + \frac{\gamma x_j}{2r^3} \frac{dD_{ji}}{dt} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\gamma}{2r} \int \rho v_i x_j x_k (dx)^3 + \frac{7\gamma^2 M P_i}{4c^2 r^2} + \\ & + \frac{\gamma^2 M P_k x_i x_k}{4c^2 r^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{85.40}$$

и, следовательно,

$$g^{0i}=\frac{4\gamma}{c^3r}P_i+\frac{2\gamma x_j}{c^3r^3}M_{ji}-\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial t}\frac{2\gamma}{c^3r}D_{ji}+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{2\gamma}{c^3r}\int\rho v_i x_j x_k\,(dx)^3+\frac{7\gamma^2MP_i}{c^5r^2}+$$
$$+\frac{\gamma^2MP_kx_ix_k}{c^5r^4}+\frac{4}{c^5}\frac{\partial^2W_i}{\partial t^2}. \qquad (85.41)$$

Нам остается найти временну́ю компоненту g^{00}, которая выражается через обобщенный ньютонов потенциал $\overline{U}$ по формуле (83.29). Согласно (83.30) и (83.31), мы имеем

$$\overline{U}=\frac{\gamma M}{r}+\frac{\gamma x_j}{r^3}MX_j+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\gamma}{r}D_{jk}-$$
$$-\frac{1}{6}\frac{\partial^3}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_i}\frac{\gamma}{r}\int\rho x_j x_k x_i\,(dx)^3+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2W}{\partial t^2}. \qquad (85.42)$$

Здесь M есть полная масса

$$M=\int\rho\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right](dx)^3, \qquad (85.43)$$

которая в силу (79.45) постоянна, а X_j — координаты центра тяжести

$$MX_j=\int x_j\rho\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right](dx)^3, \qquad (85.44)$$

которые, согласно (79.59), являются линейными функциями от времени. Величины D_{ij} определяются формулой (85.39); последний член в этой формуле, пропорциональный δ_{ij}, из выражения (85.42) выпадает. В октупольных моментах мы отбросили релятивистские поправки. Последний член в (85.42) представляет поправку на запаздывание.

Подставляя найденное значение $\overline{U}$ в формулу

$$g^{00}=\frac{1}{c}+\frac{4\overline{U}}{c^3}+\frac{7\overline{U}^2}{c^5}, \qquad (85.45)$$

получаем g^{00}, а именно

$$g^{00}=\frac{1}{c}+\frac{4\gamma M}{c^3r}+\frac{4\gamma x_j}{c^3r^3}MX_j+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{2\gamma}{c^3r}D_{jk}-\frac{\partial^3}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}\frac{2\gamma}{3c^3r}\int\rho x_i x_j x_k\,(dx)^3+$$
$$+\frac{7\gamma^2M^2}{c^5r^2}+\frac{14\gamma^2M^2X_jx_j}{c^5r^4}+\frac{4}{c^5}\frac{\partial^2W}{\partial t^2}. \qquad (85.46)$$

Легко проверить прямой подстановкой, что это выражение вместе с найденным выше выражением (85.41) для g^{0i} в точности удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_i} = 0. \tag{85.47}$$

В формуле (84.40) для пространственных компонент, которую можно написать в виде

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{2\gamma}{c^3 r}\int \rho x_i x_k (dx)^3 -$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t}\frac{2\gamma}{c^3 r}\int \rho (x_j x_i v_k + x_j x_k v_i - x_i x_k v_j)(dx)^3 + \frac{\gamma^2 M^2 x_i x_k}{c^3 r^4}, \tag{85.48}$$

оставлены члены порядка $\frac{1}{c^3}$ $\left(\text{точнее, порядка } \frac{q^4}{c^3}\right)$ и отброшены члены более высокого порядка. Если написать с той же точностью и величину $\mathfrak{g}^{0i}$, то, как нетрудно проверить, будет выполняться и соотношение

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{85.49}$$

§ 86. Решения волнового уравнения в волновой зоне

Предыдущие выражения для потенциалов тяготения применимы на „умеренно-больших“ расстояниях от системы тел. Как уже было объяснено в начале § 84, под этим разумеются расстояния, большие по сравнению с размерами системы тел, но малые по сравнению с длиной испускаемых системой волн. Если же расстояния велики даже по сравнению с длиной испускаемых системой волн, то мы имеем дело с „волновой зоной“. В волновой зоне уже недопустимо рассматривать в волновом уравнении член со второй производной по времени как поправочный, и решение должно строиться иначе.

В случае Солнечной системы „умеренно-большими“ являются расстояния вплоть до ближайших звезд, т. е. вплоть до областей пространства, где систему нельзя считать изолированной. Поэтому, практически, при изучении Солнечной системы за пределы умеренно-больших расстояний выходить не приходится. Однако в некоторых теоретических вопросах, например, в вопросе об излучении гравитационных волн, или в вопросе об однозначности решений уравнений тяготения, приходится рассматривать расстояния, попадающие в волновую зону и сколь угодно большие в математическом смысле.

Прежде чем переходить к решению уравнений Эйнштейна на сколь угодно больших расстояниях, разъясним понятия „умеренно-больших расстояний“ и „волновой зоны“ на примере простого волнового уравнения со свободным членом

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi\sigma. \tag{86.01}$$

В теории тяготения аналогом ψ является разность между $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и его предельным значением на бесконечности.

Если считать „плотность" σ известной, то можно написать интересующее нас решение в виде запаздывающего потенциала

$$\psi = \int \frac{[\sigma]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (dx')^3, \tag{86.02}$$

где

$$[\sigma] = \sigma(t', \mathbf{r}'), \tag{86.03}$$

причем

$$t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \tag{86.04}$$

То, что мы берем именно это, а не другое решение, соответствует нашим представлениям об изолированности системы и о том, что единственным источником волн являются тела, составляющие систему. Точный вид начальных условий здесь не существенен; достаточно предположить, что начальное возмущение было сосредоточено в конечной области, окружающей систему, и что мы рассматриваем такие времена и расстояния, когда и на которых начальное возмущение уже разошлось.

Предположим, что плотность σ имеет, с одной стороны, производные по времени различных порядков и, с другой стороны, „моменты" различных порядков, для которых введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \mu_0(\tau) &= \int \sigma(\tau, \mathbf{r}')(dx')^3, \\ \mu_i(\tau) &= \int x_i' \sigma(\tau, \mathbf{r}')(dx')^3, \\ \mu_{ik}(\tau) &= \int x_i' x_k' \sigma(\tau, \mathbf{r}')(dx')^3, \end{aligned}\right\} \tag{86.05}$$

где τ есть некоторая величина, не зависящая от $\mathbf{r}'$.

Применявшийся нами в предыдущих параграфах прием для решения волнового уравнения сводился к разложению аргумента t' в функции σ и самой этой функции по обратным степеням c. Так как при таком разложении под интегралом появляются возрастающие степени $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, то ясно, что этот прием дает хорошо сходящийся ряд лишь для „умеренно-больших" расстояний r. (Область быстрой сходимости ряда и дает уточнение этого понятия.) Каждый член ряда может быть в свою очередь разложен по обратным степеням r, причем в коэффициенты разложения войдут „моменты" (86.05), вычисленные для $\tau = t$.

Но можно выделить в выражении (86.04) для t' величину

$$\tau = t - \frac{r}{c} \tag{86.06}$$

и писать t' в виде

$$t' = \tau + \frac{1}{c}(r - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \tag{86.07}$$

Тогда, разлагая t' и σ по степеням $\frac{1}{c}$, *лишь поскольку эта величина не входит в* τ, мы получим ряд другого вида, притом такой, который сходится при сколь угодно больших значениях r.

Если мы в этом ряде возьмем совокупность членов, медленнее всего убывающих при возрастании r, то мы получим выражение для ψ, справедливое в волновой зоне, т. е. при весьма больших значениях r. Сохранение лишь наиболее медленно убывающих членов соответствует замене величины (86.07) выражением

$$t' = \tau + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}, \tag{86.08}$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad n_i = \frac{x_i}{r} \tag{86.09}$$

есть единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$. Таким путем мы получим для ψ выражение вида

$$\psi = \frac{1}{r} \mu(\tau, \mathbf{n}), \tag{86.10}$$

где

$$\mu(\tau, \mathbf{n}) = \int \sigma\left(\tau + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}, \mathbf{r}'\right)(dx')^3 \tag{86.11}$$

есть функция от *трех* аргументов: величины τ и двух углов, через которые выражается $\mathbf{n}$. Заметим, что если μ есть произвольная функция от этих трех аргументов, то ψ будет приближенным решением однородного волнового уравнения.

Если существуют моменты (86.05), то мы можем написать следующее разложение для μ:

$$\mu(\tau, \mathbf{n}) = \mu_0 + \frac{n_i}{c} \dot{\mu}_i + \frac{1}{2} \frac{n_i n_k}{c^2} \ddot{\mu}_{ik} + \ldots \tag{86.12}$$

или

$$\mu(\tau, \mathbf{n}) = \mu_0 + \frac{x_i}{cr} \dot{\mu}_i + \frac{1}{2} \frac{x_i x_k}{c^2 r^2} \ddot{\mu}_{ik} + \ldots, \tag{86.13}$$

где точками обозначены производные от величин (86.05) по своему аргументу τ, или, что то же, по времени t.

Та область, где решение волнового уравнения ψ с большой точностью выражается в форме (86.10), и носит название волновой зоны.

В том случае, когда размеры системы малы по сравнению с длиной излучаемых ею волн, разложение (86.12) быстро сходится, причем главным членом будет первый, отличный от нуля. Если таковым является μ_0, то функция ψ будет обладать сферической симметрией.

§ 87. Потенциалы тяготения в волновой зоне

Обратимся теперь к уравнениям Эйнштейна, выписанным в § 68. Введем, согласно (68.13), обозначение

$$N^{\mu\nu}=\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left\{\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}y^{\mu}y^{\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}L\right\}, \qquad (87.01)$$

где L есть функция Лагранжа:

$$L=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}+\frac{1}{2}y_{\nu}y^{\nu}, \qquad (87.02)$$

а другие величины имеют следующие значения:

$$\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}=\frac{1}{2g}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_{\rho}}+\mathfrak{g}^{\beta\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_{\rho}}-\mathfrak{g}^{\mu\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\rho}}\right), \qquad (87.03)$$

$$\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}=g_{\alpha\mu}g_{\beta\lambda}\Pi^{\nu,\,\mu\lambda}, \qquad (87.04)$$

$$y_{\nu}=\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_{\nu}};\quad y^{\nu}=g^{\mu\nu}y_{\mu}. \qquad (87.05)$$

Тогда уравнения Эйнштейна в гармонических координатах напишутся

$$\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)=-\frac{1}{2c^2}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}+N^{\mu\nu}=\frac{8\pi\gamma g}{c^4}T^{\mu\nu}. \qquad (87.06)$$

Мы должны исследовать асимптотический вид решений этих уравнений на больших расстояниях. Для этого рассмотрим сперва волновое уравнение

$$\sqrt{-g}\,\Box\,\psi\equiv\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}=0 \qquad (87.07)$$

и заменим в нем коэффициенты $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ их „статическими" значениями, причем будем для простоты считать, что начало координат лежит в центре тяжести системы масс. Мы можем здесь воспользоваться выражениями (85.41), (85.46) и (85.48), в которых, однако, мы отбросим все члены, убывающие быстрее, чем $\frac{1}{r}$, а из членов порядка $\frac{1}{r}$ сохраним (пока) только статический. Вводя гравитационный радиус массы

$$\alpha=\frac{\gamma M}{c^2} \qquad (87.08)$$

и переходя к сферическим координатам, связанным с гармоническими обычными формулами (57.03), мы напишем волновое уравнение (87.07) в виде

$$\Box^0\psi=\frac{1}{c^2}\left(1+\frac{4\alpha}{r}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta^*\psi\right)=0. \qquad (87.09)$$

Здесь $\Delta^*\psi$ есть обычный оператор Лапласа на шаре [формула (57.06)]. Нас интересуют решения типа расходящихся волн. Для них величина $\frac{\Delta^*\psi}{r^2}$ будет на бесконечности убывать быстрее остальных членов уравнения, и мы можем ее отбросить, после чего уравнение (86.22) напишется

$$\frac{1}{c^2}\left(1+\frac{4\alpha}{r}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0. \qquad (87.10)$$

Независимыми переменными будут здесь только r и t, а углы ϑ, φ будут входить только как параметры.

Производя подстановку

$$r\psi=f \qquad (87.11)$$

и вводя вместо r переменную

$$r^*=r+2\alpha(\lg r-\lg r_0), \qquad (87.12)$$

где r_0 — некоторая константа, мы получим, с точностью до малых величин,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial r^{*2}}=0. \qquad (87.13)$$

Решением типа расходящейся волны будет

$$f=f(\tau,\ \mathbf{n}), \qquad (87.14)$$

где $\mathbf{n}$ есть попрежнему единичный вектор (86.09), а τ имеет теперь значение

$$\tau=t-\frac{1}{c}r^* \qquad (87.15)$$

или

$$\tau=t-\frac{1}{c}\left(r+2\alpha\lg\left(\frac{r}{r_0}\right)\right). \qquad (87.16)$$

Таким образом, решение уравнения (87.09) типа расходящейся волны имеет асимптотический вид

$$\psi=\frac{1}{r}f(\tau,\ \mathbf{n}), \qquad (87.17)$$

причем величина τ предполагается здесь конечной, тогда как r неограниченно возрастает.

При этих условиях асимптотические значения производных от ψ по координатам и времени вычисляются так, как если бы функция ψ зависела от них только через посредство τ. Полагая

$$k_\alpha=\frac{\partial\tau}{\partial x_\alpha}, \qquad (87.18)$$

будем иметь в рассматриваемом приближении

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}=k_\alpha\psi. \qquad (87.19)$$

Пренебрегая членами порядка $\frac{\alpha}{r}$ по сравнению с единицей, мы можем считать величины k_α равными

$$k_0 = 1; \quad k_i = -\frac{n_i}{c}. \tag{87.20}$$

В соответствии с этим можем положить

$$k^0 = \frac{1}{c^2}; \quad k^i = +\frac{n_i}{c}, \tag{87.21}$$

откуда

$$k_\alpha k^\alpha = 0. \tag{87.22}$$

Величины k_α будут пропорциональны составляющим нулевого четырехмерного вектора (в галилеевом пространстве, соответствующем предельным значениям $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$).

Добавим теперь в коэффициентах волнового уравнения (87.09) к статическим значениям $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ волновую часть $\mathfrak{b}^{\mu\nu}$ и положим

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\alpha}{cr} + \mathfrak{b}^{00}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \mathfrak{b}^{0i} \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \mathfrak{b}^{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{87.23}$$

Относительно величин $\mathfrak{b}^{\mu\nu}$ мы будем предполагать, что в волновой области они будут либо иметь вид (87.17), либо, во всяком случае, удовлетворять условию (87.19). Поэтому мы можем вычислять производные от $\mathfrak{b}^{\mu\nu}$ по формуле

$$\frac{\partial \mathfrak{b}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = k_\alpha \dot{\mathfrak{b}}^{\mu\nu}, \tag{87.24}$$

а так как производные от статических членов в $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ будут убывать как $1/r^2$ и могут быть отброшены, то будет и

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = k_\alpha \dot{\mathfrak{b}}^{\mu\nu}. \tag{87.25}$$

Условия гармоничности для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ напишутся

$$k_\mu \dot{\mathfrak{b}}^{\mu\nu} = 0 \tag{87.26}$$

и могут быть проинтегрированы по τ. Так как статическая часть $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ нами уже выделена, то постоянные интегрирования могут быть положены равными нулю, и мы получим

$$k_\mu \mathfrak{b}^{\mu\nu} = 0. \tag{87.27}$$

Отсюда смешанные и временна́я компонента величин $\mathfrak{b}^{\mu\nu}$ выражаются через пространственные компоненты по формулам

$$\mathfrak{b}^{0i} = \frac{n_k}{c} \mathfrak{b}^{ik}; \quad \mathfrak{b}^{00} = \frac{n_i n_k}{c^2} \mathfrak{b}^{ik}. \tag{87.28}$$

Уточненный вид умноженного на $\frac{1}{c}\sqrt{-g}$ оператора Даламбера, получаемый в результате подстановки коэффициентов $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ из (87.23) в формулу (87.07), напишется:

$$\frac{1}{c}\sqrt{-g}\cdot\Box\psi=\Box^{\circ}\psi+\frac{1}{c}b^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}. \qquad (87.29)$$

Но если ψ — функция типа расходящейся волны, которая зависит от координат и времени главным образом через посредство τ и удовлетворяет соотношению (87.19), то будет

$$b^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=k_\alpha k_\beta b^{\alpha\beta}=0 \qquad (87.30)$$

вследствие (87.27). Поэтому дополнительный член в операторе Даламбера (87.29) будет равен нулю в отдельности, и мы можем вести исследование решений типа расходящейся волны так, как если бы в коэффициентах оператора Даламбера в волновом уравнении (87.07) и в уравнениях Эйнштейна (87.06) имелась только статическая часть. Тем самым мы как бы освобождаемся от не-линейной части членов, содержащих вторые производные в уравнениях Эйнштейна.

Переходим к рассмотрению не-линейных членов, содержащих первые производные. Мы не можем их отбросить с самого начала, так как в волновой зоне они убывают не быстрее, чем $1/r^2$, и могут сильно влиять на асимптотический вид решения. Но при вычислении их мы можем внести те упрощения, которые вытекают из формулы (87.25) и из того обстоятельства, что вне знака производных компоненты фундаментального тензора могут быть заменены их предельными значениями. Поднимая и опуская значки при помощи этих предельных значений, мы можем писать, например,

$$k^\alpha=g^{\alpha\beta}k_\beta;\quad \dot{b}^{\mu}_{\nu}=g_{\nu\alpha}\dot{b}^{\mu\alpha}\ \text{ и т. д.} \qquad (87.31)$$

как если бы соответствующие величины были тензорами. Используя строгую формулу

$$y_\alpha=\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,g_{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}, \qquad (87.32)$$

мы можем тогда написать:

$$y_\alpha=\frac{k_\alpha}{2c}\,\dot{b}^{\nu}_{\nu};\quad y^\alpha=\frac{k^\alpha}{2c}\,\dot{b}^{\nu}_{\nu}. \qquad (87.33)$$

Величины (87.03) и (87.04) будут равны

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta}=-\frac{1}{2c}\left(k^\alpha\dot{b}^{\mu\beta}+k^\beta\dot{b}^{\mu\alpha}-k^\mu\dot{b}^{\alpha\beta}\right), \qquad (87.34)$$

$$\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2c}\left(k_\alpha\dot{b}^{\nu}_{\beta}+k_\beta\dot{b}^{\nu}_{\alpha}-k^\nu\dot{b}_{\alpha\beta}\right). \qquad (87.35)$$

Из соотношений (87.22) и (87.26) вытекает

$$k_\nu\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}=0;\quad y_\nu y^\nu=0. \qquad (87.36)$$

Поэтому значение функции Лагранжа в волновой зоне равно нулю

$$L = 0, \tag{87.37}$$

как это имеет место и для электромагнитных волн.

Перемножая три члена в (87.34) на три члена в (87.35), получаем девять сумм, из которых, однако, только одна отлична от нуля, а именно

$$\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4c^2} k^\mu k^\nu \dot{b}^{\alpha\beta}\dot{b}_{\alpha\beta}. \tag{87.38}$$

Подставляя найденные выражения в (87.01) и заменяя множитель $\left(\frac{-g}{c^2}\right)$ единицей, получим

$$N^{\mu\nu} = \frac{1}{4c^2} k^\mu k^\nu \left(\dot{b}^{\alpha\beta}\dot{b}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\dot{b}^\alpha_\alpha \dot{b}^\beta_\beta\right). \tag{87.39}$$

Для нас существенны следующие свойства выражения $N^{\mu\nu}$. С одной стороны, оно пропорционально произведению $k^\mu k^\nu$ и, будучи подставлено в уравнения Эйнштейна (87.06), может породить в $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и в $\dot{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}$, а также в $b^{\mu\nu}$ и в $\dot{b}^{\mu\nu}$ только члены, пропорциональные такому же произведению. С другой стороны, если добавить к $\dot{b}^{\mu\nu}$ члены, пропорциональные $k^\mu k^\nu$, т. е. сделать замену

$$\dot{b}^{\alpha\beta} \to \dot{b}^{\alpha\beta} + \lambda k^\alpha k^\beta, \tag{87.40}$$

то в силу условий гармоничности (87.26) и соотношения (87.22) величина $N^{\mu\nu}$ не изменится. Это позволяет свести нахождение асимптотического вида $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ при учете нелинейных членов к решению линейных уравнений.

Положим

$$\sigma_g = \frac{1}{32\pi\gamma}\left(\dot{b}^{\alpha\beta}\dot{b}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\dot{b}^\alpha_\alpha \dot{b}^\beta_\beta\right). \tag{87.41}$$

Как будет видно из дальнейшего, эта величина играет роль плотности энергии гравитационных волн. Формула (87.39) напишется тогда:

$$N^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2}\sigma_g k^\mu k^\nu. \tag{87.42}$$

Подставляя это выражение в уравнения Эйнштейна (86.19), получим

$$\frac{1}{2c}\Box\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2}(T^{\mu\nu} + \sigma_g k^\mu k^\nu). \tag{87.43}$$

В предыдущих параграфах при составлении тензора массы мы полностью пренебрегли электромагнитной энергией. Если же мы примем во внимание энергию электромагнитного излучения системы тел, то, обозначив плотность ее через σ_{em}, так что

$$\sigma_{em} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \tag{87.44}$$

мы получим для тензора электромагнитной энергии в волновой зоне выражение

$$T^{\mu\nu} = \sigma_{em} k^{\mu} k^{\nu} \tag{87.45}$$

(мы сохранили для этого тензора обозначение $T^{\mu\nu}$, так как в волновой зоне весь тензор массы сводится к (87.45), а та его часть, которая соответствует веществу, равна нулю).

Таким образом, мы можем писать уравнения Эйнштейна в волновой зоне в виде

$$\frac{1}{2c} \Box \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2} \sigma k^{\mu} k^{\nu}, \tag{87.46}$$

где под σ мы можем разуметь сумму $\sigma_{em} + \sigma_g$, если мы учитываем электромагнитное излучение, или только σ_g, если мы имеем дело с чисто гравитационной задачей.

Чтобы решить уравнения (87.46), выделим в $b^{\mu\nu}$ член, пропорциональный $k^{\mu}k^{\nu}$, и будем писать $b^{\mu\nu}$ в виде

$$b^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + h k^{\mu} k^{\nu}. \tag{87.47}$$

Как было уже отмечено, выражение (87.41) для σ_g не меняется при замене $b^{\mu\nu}$ на $h^{\mu\nu}$, так что мы будем иметь

$$\sigma_g = \frac{1}{32\pi\gamma} \left(\dot{h}^{\alpha\beta} \dot{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \dot{h}_{\alpha}^{\alpha} \dot{h}_{\beta}^{\beta} \right). \tag{87.48}$$

Соотношения (87.27) и (87.28) также остаются в силе; мы можем написать

$$k_{\mu} h^{\mu\nu} = 0. \tag{87.49}$$

Входящие в (87.47) величины $h^{\mu\nu}$ и h мы можем подчинить уравнениям:

$$\Box h^{\mu\nu} = 0, \tag{87.50}$$

$$\Box h = \frac{16\pi\gamma}{c} \sigma, \tag{87.51}$$

в которых, согласно сделанному выше замечанию, мы можем заменить оператор $\Box$ на линейный оператор $\Box^0$ [формула (87.09)].

Тогда величины $h^{\mu\nu}$ будут удовлетворять *линейному* волновому уравнению, и на основании (87.17) мы можем потребовать, чтобы они имели асимптотический вид

$$h^{\mu\nu} = \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{\mu\nu}(\tau, \mathbf{n}). \tag{87.52}$$

Коэффициент $\frac{2\gamma}{c^3}$ добавлен здесь для удобства оценки порядка величины $h^{\mu\nu}$; пространственные компоненты f^{ik} будут тогда порядка кинетической энергии системы.

Подставляя эти значения $h^{\mu\nu}$ в (87.48), мы получим для σ_g выражение, обратно пропорциональное r^2. Того же вида будет зависимость от r и для электромагнитной части плотности энергии. Поэтому и вся плотность энергии σ в уравнении (87.51) будет вида

$$\sigma = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{r^2}. \qquad (87.53)$$

Гравитационная часть σ_{0g} функции σ_0 выражается через величины $f^{\mu\nu}$ по формуле, аналогичной (87.48), а именно:

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\pi c^6}\left(\dot{f}^{\alpha\beta}\dot{f}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\dot{f}^{\alpha}_{\alpha}\dot{f}^{\beta}_{\beta}\right). \qquad (87.54)$$

Подставляя выражение (87.53) для σ в уравнение (87.51), получим для h уравнение

$$\Box h = \frac{16\pi\gamma}{cr^2}\sigma_0(\tau, \mathbf{n}), \qquad (87.55)$$

правую часть которого можно считать известной. Таким образом, не только величины $h^{\mu\nu}$, но и величина h удовлетворяет *линейному* уравнению. Асимптотический вид решения этого уравнения будет

$$h = \frac{8\pi\gamma \lg r}{r}\int^{\tau}\sigma_0(\tau, \mathbf{n})\,d\tau + \frac{h_0(\tau, \mathbf{n})}{r}. \qquad (87.56)$$

Положим

$$4\pi c\int_{\tau}^{\tau}\sigma_0(\tau, \mathbf{n})\,d\tau = \Delta\mathcal{E}(\tau, \mathbf{n}). \qquad (87.57)$$

Умноженное на $\frac{d\Omega}{4\pi}$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла, это выражение дает утечку энергии в этот телесный угол, лежащий в направлении $\mathbf{n}$, происшедшую за время $\tau - \tau_0$. Результат подстановки выражения (87.57) в предыдущую формулу может быть записан в виде

$$h = \frac{2\gamma}{cr}\left(\lg r\,\Delta\mathcal{E}(\tau, \mathbf{n}) + \varepsilon(\tau, \mathbf{n})\right), \qquad (87.58)$$

где величину $\varepsilon(\tau, \mathbf{n})$ можно считать того же порядка, как $\Delta\mathcal{E}(\tau, \mathbf{n})$ (или же ее можно не писать, а в формулах для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ отнести соответствующие члены к $f^{\mu\nu}$).

Подставляя значения (87.52) и (87.58) для $h^{\mu\nu}$ и h сперва в формулу (87.47) для $b^{\mu\nu}$, а затем в формулы (87.23) для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, мы получим следующие асимптотические выражения величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ в волновой зоне:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{00} + \frac{2\gamma}{c^5 r}(\lg r\, \Delta\mathscr{E} + \varepsilon), \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{0i} + \frac{2\gamma}{c^4 r} n_i (\lg r\, \Delta\mathscr{E} + \varepsilon), \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{ik} + \frac{2\gamma}{c^3 r} n_i n_k (\lg r\, \Delta\mathscr{E} + \varepsilon). \end{aligned}\right\} \quad (87.59)$$

Здесь величины f^{0i} и f^{00} выражаются через f^{ik} по формулам, аналогичным (87.28), а именно

$$f^{0i} = \frac{n_k}{c} f^{ik}; \quad f^{00} = \frac{n_i n_k}{c^2} f^{ik}. \quad (87.60)$$

Сравним выражения величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ в волновой зоне с их выражениями на умеренно-больших расстояниях, полученными в § 85. Здесь мы можем прежде всего пренебречь членами, содержащими $\lg r$ и происходящими от утечки энергии. Что касается остальных членов, то мы их можем написать в таком виде, чтобы они переходили в соответствующие члены формул (85.41), (85.46) и (85.48). Для этого положим

$$D_{ik}(t) = \int \rho x_i x_k (dx)^3, \quad (87.61)$$

заменим здесь t на τ и свяжем f^{ik} с $D_{ik}(\tau)$ соотношением

$$f^{ik} = \frac{d^2}{d\tau^2} D_{ik}(\tau). \quad (87.62)$$

Тогда формулы

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{D_{ik}(\tau)}{r}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= -\frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial t} \frac{D_{ik}(\tau)}{r}, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{D_{ik}(\tau)}{r} \end{aligned}\right\} \quad (87.63)$$

в волновой зоне переходят в (87.59) (без членов, происходящих от утечки энергии), а на умеренно-больших расстояниях они дают главные члены формул (85.41), (85.46) и (85.48). При этом на умеренно-больших расстояниях в выражении (87.15) для τ может быть опущен логарифмический член (r^* может быть заменено на r).

§ 88. Общие замечания о законах сохранения

Гравитационная энергия играет в теории тяготения совершенно особую роль, отличную от роли всех других видов энергии. Она не входит явным образом в тензор энергии, а учитывается косвенным образом, через посредство потенциалов тяготения. Наличие гравитационного поля и связанной с ним энергии проявляется, как мы знаем, в изменении свойств пространства и времени. Выделить гравитационную энергию в виде добавочных членов в тензоре энергии можно только искусственно, фиксировав координатную систему и видоизменив постановку задачи, а именно рассматривая поле тяготения как бы вложенным в пространство-время с фиксированными свойствами (как это делалось в теории Ньютона). Соответствующие гравитационной энергии добавочные члены в тензоре энергии не будут обладать свойством ковариантности (т. е. не будут тензором). В зависимости от выбора координатной системы значения этих добавочных членов в данной точке пространства-времени могут оказаться равными или неравными нулю (чего не может быть с тензором). Поэтому гравитационную энергию нельзя локализовать. Это свойство гравитационной энергии физически проявляется в том, что *гравитационное поле нельзя заслонить*. Чтобы избавиться от действия гравитационного поля, можно только отойти подальше от масс, его производящих. Это можно сделать для изолированной системы масс. Порождаемое такой системой гравитационное поле можно рассматривать, как местную неоднородность в бесконечном евклидовом пространстве (или в галилеевом пространстве-времени). При таком рассмотрении можно (пренебрегая излучением, о котором будет сказано ниже) составить десять интегралов уравнений Эйнштейна, соответствующих десяти классическим интегралам уравнений механики. Четыре из них — интегралы энергии и количества движения — будут составлять четырехмерный вектор в галилеевом пространстве-времени, в которое погружена система масс с ее гравитационным полем. Шесть остальных интегралов будут составлять в том же пространстве-времени антисимметричный тензор; это будут интегралы момента количества движения и интегралы движения центра инерции системы.

Важно отметить, что существование десяти интегралов движения связано с изотропностью галилеева пространства-времени, в которое погружена система, а значит и с евклидовостью пространства на бесконечности. Отказ от требований изотропности и евклидовости на бесконечности влечет за собой нарушение всех или некоторых из законов сохранения, выражаемых десятью интегралами движения. С физической точки зрения это совершенно естественно, поскольку изотропность и евклидовость на бесконечности служат выражением изолированности системы, а выполнения законов сохранения можно ожидать только тогда, когда система изолирована.

Следует указать еще на одну причину, в силу которой система движущихся масс никогда не будет вполне изолированной в активном смысле (т. е. в смысле отдачи энергии, а не ее получения извне). Эта причина состоит в излучении системой электромагнитных и гравитационных волн (а также, быть может, и других). Однако для систем, подобных Солнечной системе, потеря энергии на излучение даже на протяжении геологических периодов времени весьма мала по сравнению с имеющимся запасом энергии, хотя в абсолютных цифрах представляет внушительную величину (для Солнца излучаемая мощность соответствует ежесекундному превращению четырех миллионов тонн вещества в излучение). Что касается излучения гравитационных волн, то оно совершенно ничтожно: грубый подсчет по формулам, основанным на результатах предыдущего параграфа, показывает, что мощность, излучаемая Солнечной системой в виде гравитационных волн, в 10^{23} или 10^{24} раз меньше излучаемой в виде электромагнитных волн и составляет всего-навсего примерно один киловатт. (Такой подсчет будет произведен в § 90). Поэтому во всех рассуждениях, кроме, быть может, чисто теоретических, действием гравитационных волн можно целиком пренебречь. Этот результат показывает, в частности, что изученная в главе VI задача о движении системы тяготеющих масс может рассматриваться как задача механики (без учета излучения) не только в том приближении, в каком она была там решена, но и в следующих приближениях (не представляющих, впрочем, практического интереса).

§ 89. Формулировка законов сохранения

В теории, оперирующей с галилеевым пространством-временем, классические законы сохранения могли быть написаны в дифференциальной форме, а именно в виде соотношений (31.10). Обобщением их является соотношение

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{89.01}$$

которое, согласно (41.25), можно написать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \tag{89.02}$$

Однако соотношение (89.01) не приводит, само по себе, к законам сохранения. Математическая причина этого состоит в том, что наличие второго члена в (89.02), стоящего вне знака производной, не позволяет, в общем случае, заключить о постоянстве какого-либо объемного интеграла (см. § 49). Физической же причиной является тот факт, что поле тяготения само обладает энергией, которая не входит явно в $T^{\mu\nu}$, но которую тем не менее необходимо учитывать в общем балансе.

Чтобы получить соотношение, в котором была бы учтена также и гравитационная энергия, рассмотрим уравнения тяготения Эйнштейна, выписанные в начале § 87.

Мы имеем

$$\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) = -\frac{1}{2c^2} \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + N^{\mu\nu}, \tag{89.03}$$

где $N^{\mu\nu}$ определяется формулами (87.01)—(87.05). С другой стороны, в гармонической системе координат

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}) = \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{89.04}$$

Прибавляя это равенство, умноженное на $\frac{1}{2c^2}$, к предыдущему, получим

$$\left(-\frac{g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}) = L^{\mu\nu}, \tag{89.05}$$

где

$$L^{\mu\nu} = N^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{89.06}$$

В произвольной системе координат равенство (89.05) будет тождеством, если разуметь под $L^{\mu\nu}$ выражение

$$L^{\mu\nu} = N^{\mu\nu} + \frac{1}{2c^2}\left(-\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\beta}\right), \tag{89.07}$$

которое переходит в предыдущее, если система координат — гармоническая. Для доказательства тождества (89.05) нужно брать для тензора Эйнштейна полное выражение (Б.87), выведенное в Добавлении Б.

Если воспользоваться уравнениями Эйнштейна

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}T^{\mu\nu} \tag{89.08}$$

и положить

$$U^{\mu\nu} = \left(-\frac{g}{c^2}\right)T^{\mu\nu} + \frac{c^2}{8\pi\gamma}L^{\mu\nu}, \tag{89.09}$$

можно написать формулу (89.05) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}) = 16\pi\gamma U^{\mu\nu}. \tag{89.10}$$

Здесь слева стоит выражение, подобное тензору Круткова, рассмотренному в § 31; сумма производных по x_μ от левой части (89.10) тождественно равна нулю. Поэтому мы имеем

$$\frac{\partial U^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{89.11}$$

Совокупность величин $U^{\mu\nu}$ не составляет общековариантного тензора. Это есть тензор только по отношению к линейным преобразованиям; в частности, $U^{\mu\nu}$ есть тензор в гармонической системе координат. Становясь на ту, несколько искусственную, точку зрения, которая была упомянута в начале предыдущего параграфа, можно толковать в формуле (89.09) деленный на c^2 второй член как тензор энергии гравитационного поля, а деленный на c^2 первый член — как тензор энергии вещества и всех других полей, кроме гравитационного. Если допускать и другие системы координат, помимо гармонической, то такое толкование будет не вполне однозначным, если рассматривать области внутри системы масс. Но на больших расстояниях от масс, где пространство-время почти псевдо-евклидово и координаты по условию галилеевы, физический смысл величин $U^{\mu\nu}$ становится во всяком случае однозначным.

Вытекающие из (89.11) законы сохранения в интегральной форме также получаются вполне однозначно и не зависят от произвола, связанного с допускаемыми внутри системы масс отклонениями координатной системы от гармонической. Как мы увидим, это обусловлено тем, что объемные интегралы, выражающие энергию, количество движения и другие величины, могут быть преобразованы в интегралы по поверхности, окружающей систему масс.

Переходим к выводу интегральной формы законов сохранения. Для этого умножим левую часть (89.11) на евклидов элемент объема

$$dx_1\,dx_2\,dx_3 = (dx)^3 \tag{89.12}$$

и проинтегрируем по некоторому достаточно большому объему, включающему систему масс. Размеры области интегрирования мы оставим пока неопределенными.

После применения теоремы Гаусса — Остроградского мы получим равенства вида

$$\frac{d}{dt}\int U^{00}(dx)^3 = -\int n_i U^{0i}\,dS, \tag{89.13}$$

$$\frac{d}{dt}\int U^{0i}(dx)^3 = -\int n_k U^{ik}\,dS, \tag{89.14}$$

где n_i есть вектор нормали к поверхности. Если поверхность, ограничивающая объем, есть сфера, мы можем положить

$$n_i = \frac{x_i}{r}; \quad dS = r^2\,d\omega, \tag{89.15}$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла.

Вследствие симметрии величин $U^{\mu\nu}$, из формул (89.11) вытекают также соотношения, аналогичные (31.06) и (31.01), которые после интегрирования дают:

$$\frac{d}{dt}\int (x_i U^{0k} - x_k U^{0i})(dx)^3 = -\int n_j (x_i U^{jk} - x_k U^{ji})\,dS, \tag{89.16}$$

$$\frac{d}{dt}\int (x_i U^{00} - tU^{0i})(dx)^3 = -\int n_j (x_i U^{j0} - tU^{ji})\,dS. \tag{89.17}$$

Выясним физический смысл объемных интегралов, стоящих в левой части этих уравнений. Положим *)

$$\overset{*}{M} = c^2 \int U^{00} (dx)^3, \tag{89.18}$$

$$\overset{*}{P}{}^i = c^2 \int U^{0i} (dx)^3, \tag{89.19}$$

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = c^2 \int (x_i U^{0k} - x_k U^{0i}) (dx)^3, \tag{89.20}$$

$$\overset{*}{M}{}^{i0} = c^2 \int (x_i U^{00} - t U^{0i}) (dx)^3. \tag{89.21}$$

[Мы обозначили величины (89.18)—(89.21) звездочками сверху, чтобы не смешивать их с константами, введенными при решении уравнений механики.] Величина $\overset{*}{M}$ есть полная масса системы, включая массу, принадлежащую полю, заключенному внутри данного объема. Величины $\overset{*}{P}{}^i$ представляют количество движения, а величины $\overset{*}{M}{}^{ik}$ — момент количества движения системы. Величины $\overset{*}{M}{}^{i0}$ можно написать в виде

$$\overset{*}{M}{}^{i0} = \overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i - \overset{*}{P}{}^i t, \tag{89.22}$$

где $\overset{*}{X}{}^i$ — координата центра тяжести системы. Отсюда ясно, что $\overset{*}{M}{}^{i0}$ представляют величины, входящие в закон движения центра тяжести.

Значение объемных интегралов (89.18)—(89.21) может несколько изменяться в зависимости от размеров области интегрирования. Это происходит в силу того, что поле также обладает энергией, количеством движения, и т. д. Однако из дальнейшего (§ 90) будет ясно, что при надлежащем выборе области интегрирования возникающая отсюда неопределенность в значении интегралов ничтожна по сравнению с самими этими значениями.

Покажем теперь, что не только производные по времени от величин (89.18)—(89.21), но и сами эти величины могут быть представлены в виде интегралов по поверхности. Чтобы выяснить это, рассмотрим структуру выражений (89.10) для $U^{\mu\nu}$. Полагая $\mu = \nu = 0$, будем иметь

$$16\pi\gamma U^{00} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{\beta 0}). \tag{89.23}$$

При $\alpha = \beta = 0$, а также при $\alpha = 0$, $\beta = i$ (где $i = 1, 2, 3$) выражение справа обращается в нуль. Поэтому фактически значки α, β в (89.23) пробегают только пространственные значения, и мы можем написать

$$16\pi\gamma U^{00} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0}), \tag{89.24}$$

*) Мы будем писать здесь при M^{ik}, P^i, X^i верхние значки.

откуда

$$\overset{*}{M} = \frac{c^2}{16\pi\gamma} \int n_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0})\, dS. \tag{89.25}$$

Аналогично (89.24), мы будем иметь

$$16\pi\gamma U^{0i} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_j} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}), \tag{89.26}$$

где j пробегает только пространственные значения, а α — также и значение $\alpha = 0$ (заметим, что значение $\alpha = i$ фактически отсутствует). Подстановка (89.26) в объемный интеграл (89.19) дает

$$\overset{*}{P}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma} \int n_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji})\, dS. \tag{89.27}$$

Из формулы (89.26) легко выводится соотношение

$$16\pi\gamma (x_i U^{0k} - x_k U^{0i}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big\{ x_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0k} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{jk}) - \\ - x_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}) + \mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{0k} \Big\}, \tag{89.28}$$

правая часть которого представляет сумму производных по пространственным координатам. Подставляя (89.28) в (89.20) и применяя теорему Гаусса — Остроградского, получаем для момента количества движения выражение в виде интеграла по поверхности:

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = \frac{c^2}{16\pi\gamma} \int n_j \Big\{ x_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0k} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{jk}) - \\ - x_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}) + \mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{0k} \Big\}\, dS. \tag{89.29}$$

Наконец, первый член выражения (89.22) для $\overset{*}{M}{}^{i0}$ может быть написан в виде

$$\overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma} \int n_j \Big\{ x_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{j0}\mathfrak{g}^{k0}) + \\ + \mathfrak{g}^{j0}\mathfrak{g}^{i0} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{00} \Big\}\, dS. \tag{89.30}$$

Таким образом, все величины (89.18) — (89.21) представлены в виде поверхностных интегралов. Значения их зависят только от поведения потенциалов тяготения на больших расстояниях.

При написании законов сохранения в дифференциальной форме мы использовали симметричную систему *) величин $U^{\mu\nu}$, определяемых формулой (89.09); эти величины представляют, как мы указывали, аналог контравариантного симметричного тензора. В литературе

*) Симметричная система величин используется также в книге Л. Ландау и Е. Лифшица „Теория поля“ [23].

принято, однако, начиная с первых работ Эйнштейна, пользоваться другой системой величин, представляющих аналог смешанного (несимметричного) тензора и определяемых следующим образом.

В конце § 60 была выведена формула для вариации интеграла действия, согласно которой

$$\delta \int L\sqrt{-g}\,(dx) = \int \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\right) \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx). \tag{89.31}$$

Здесь L есть функция Лагранжа (60.23), а через (dx) обозначено произведение четырех дифференциалов

$$(dx) = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{89.32}$$

Вследствие

$$\delta g_{\alpha\beta} = - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{89.33}$$

формулу (89.31) можно также написать в виде

$$\delta \int L\sqrt{-g}\,(dx) = - \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\,(dx). \tag{89.34}$$

Полагая

$$g_\sigma^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}, \tag{89.35}$$

мы можем определить „частные производные“ по $g_\sigma^{\mu\nu}$ и по $g^{\mu\nu}$ формулой

$$\delta(L\sqrt{-g}) = \frac{\partial (L\sqrt{-g})}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} \delta g_\sigma^{\mu\nu} + \frac{\partial (L\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \tag{89.36}$$

Подстановка (89.36) в (89.34) и интегрирование по частям дают для умноженного на $\sqrt{-g}$ консервативного тензора

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{89.37}$$

выражение

$$\sqrt{-g}\,G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \frac{\partial (L\sqrt{-g})}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} - \frac{\partial (L\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{89.38}$$

Введем теперь систему величин w_ρ^σ, определяемых формулой

$$2\sqrt{-g}\,w_\rho^\sigma = g_\rho^{\mu\nu} \frac{\partial (L\sqrt{-g})}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} - \delta_\rho^\sigma (L\sqrt{-g}). \tag{89.39}$$

Составляя сумму производных от (89.39) по x_σ и пользуясь (89.38), получим

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\,w_\rho^\sigma)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\rho} G_{\mu\nu}. \tag{89.40}$$

Но для всякого симметричного тензора

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\rho}G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}G^{\mu\nu} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}G^{\nu}_{\mu}. \qquad (89.41)$$

Поэтому предыдущую формулу можно написать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^{\sigma}_{\rho})}{\partial x_\sigma} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}G^{\nu}_{\mu}; \qquad (89.42)$$

С другой стороны, расходимость консервативного тензора (которая тождественно равна нулю) имеет вид

$$\nabla_\sigma G^{\sigma}_{\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,G^{\sigma}_{\rho})}{\partial x_\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}G^{\nu}_{\mu} = 0. \qquad (89.43)$$

Второй член здесь совпадает с правой частью (89.42). Исключая его из (89.42) и (89.43), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\sqrt{-g}\,G^{\sigma}_{\rho} + \sqrt{-g}\,w^{\sigma}_{\rho}) = 0. \qquad (89.44)$$

Выражая G^{σ}_{ρ} через T^{σ}_{ρ} из уравнений тяготения и полагая

$$-\frac{c^2}{8\pi\gamma}w^{\sigma}_{\rho} = t^{\sigma}_{\rho}, \qquad (89.45)$$

мы можем написать предыдущее уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\sqrt{-g}\,T^{\sigma}_{\rho} + \sqrt{-g}\,t^{\sigma}_{\rho}) = 0. \qquad (89.46)$$

Это уравнение представляет дифференциальную форму закона сохранения в том виде, в каком он чаще всего приводится в литературе. Величина

$$\overset{*}{U}{}^{\sigma}_{\rho} = \frac{\sqrt{-g}}{c}(T^{\sigma}_{\rho} + t^{\sigma}_{\rho}) \qquad (89.47)$$

аналогична нашему $U^{\mu\nu}$, но не симметрична в своих значках. Поэтому из соотношения

$$\frac{\partial \overset{*}{U}{}^{\sigma}_{\rho}}{\partial x_\sigma} = 0 \qquad (89.48)$$

нельзя вывести формул, соответствующих законам сохранения момента количества движения и движения центра тяжести. Что касается законов сохранения энергии и количества движения, то обе формулировки их [основанная на (89.11) и основанная на (89.48)] дают эквивалентный результат. Докажем это, опуская все выкладки, которые достаточно сложны.

Из определения (89.39) величин w^{σ}_{ρ} следует

$$2w^{\sigma}_{\rho} = -\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} - \delta^{\sigma}_{\rho}L + y_\alpha\frac{\partial g^{\sigma\alpha}}{\partial x_\rho} + (y^\sigma - \Gamma^\sigma)\,y_\rho. \qquad (89.49)$$

Пользуясь формулами Добавления Б, получаем отсюда

$$2\sqrt{-g}\,(G_\rho^\sigma + w_\rho^\sigma) = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\sigma\alpha}\mathfrak{g}^{\tau\beta} - \mathfrak{g}^{\sigma\tau}\mathfrak{g}^{\alpha\beta})\right] \tag{89.50}$$

и, после умножения на $-c$,

$$16\pi\gamma \overset{*}{U}{}_\rho^\sigma = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{c g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\sigma\tau}\mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\sigma\alpha}\mathfrak{g}^{\tau\beta})\right]. \tag{89.51}$$

Эта формула аналогична (89.10). Отсюда получаем

$$\int \overset{*}{U}{}_\rho^0\,(dx)^3 = \frac{c}{16\pi\gamma}\int \frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\,n_j\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0\tau} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{j\tau})\,dS. \tag{89.52}$$

Так как интегрирование ведется по удаленной поверхности, то здесь можно вынести предельное значение $\frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}$ из-под знака интеграла. Сравнивая получаемые выражения с (89.25) и (89.27), мы можем написать:

$$c\int \overset{*}{U}{}_\rho^0\,(dx)^3 = \left(\frac{g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\right)_\infty \overset{*}{P}{}^\tau, \tag{89.53}$$

где $\overset{*}{P}{}^0 = \overset{*}{M}$ и $\overset{*}{P}{}^i$ имеют значение (89.27). Последнюю формулу мы можем также написать в виде

$$\int \overset{*}{U}{}_\rho^0\,(dx)^3 = \left(\frac{c g_{\rho\tau}}{\sqrt{-g}}\right)_\infty \cdot \int U^{0\tau}\,(dx)^3. \tag{89.54}$$

Эти соотношения подтверждают, что несмотря на различие в дифференциальных формах законов сохранения, интегральные их формы друг другу эквивалентны. Кроме того, наличие величин $(g_{\rho\tau})_\infty$ в соотношениях (89.54) наглядно показывает, что полные энергия и количество движения системы представляют четырехмерный вектор в *галилеевом* пространстве-времени, в которое погружена система.

§ 90. Излучение гравитационных волн и его роль в балансе энергии

Законы сохранения энергии и других величин были написаны нами в § 89 в форме уравнений, выражающих баланс той или иной величины, т. е. тот факт, что изменение полного количества данной величины, заключенного внутри некоторого объема, происходит только за счет потока этой величины сквозь поверхность, ограничивающую этот объем.

Мы рассмотрим теперь вопрос о том, в какой мере можно пренебречь потоком сквозь поверхность и считать данную величину постоянной, другими словами, в какой мере можно говорить о законах сохранения в узком смысле. При этом мы ограничимся законами сохранения энергии и количества движения.

Используя обозначения (89.18) и (89.19) для массы и количества движения и считая поверхность интегрирования сферической, мы можем, согласно (89.13)—(89.15), написать:

$$\frac{d\overset{*}{M}}{dt} = -c^2 \int n_k U^{0k} r^2 \, d\omega, \tag{90.01}$$

$$\frac{d\overset{*}{P}{}^i}{dt} = -c^2 \int n_k U^{ik} r^2 \, d\omega, \tag{90.02}$$

где интегрирование ведется по телесному углу. Мы можем считать поверхность интегрирования настолько удаленной, что она вся проходит в волновой зоне. На основании результатов § 87 нетрудно заключить, что там величины $L^{\mu\nu}$, определяемые формулами (89.06) или (89.07), приводятся к $N^{\mu\nu}$. Беря для $N^{\mu\nu}$ значения (87.42), а для $T^{\mu\nu}$ — значения (87.45), соответствующие электромагнитному излучению, мы можем положить

$$U^{\mu\nu} = \sigma k^\mu k^\nu, \tag{90.03}$$

где σ есть плотность энергии (электромагнитной и гравитационной), введенная в § 87. Пользуясь формулой (87.53), выражающей зависимость плотности энергии σ от расстояния r, мы можем также написать

$$U^{\mu\nu} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{r^2} k^\mu k^\nu. \tag{90.04}$$

Беря значения k^ν из (87.21), будем иметь

$$U^{0k} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{c^3 r^2} n_k; \qquad U^{ik} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{c^2 r^2} n_i n_k \tag{90.05}$$

и, следовательно,

$$n_k U^{0k} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{c^3 r^2}; \qquad n_k U^{ik} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{c^2 r^2} n_i. \tag{90.06}$$

Подставляя эти значения в (90.01) и (90.02), получаем

$$\frac{d\overset{*}{M}}{dt} = -\frac{1}{c} \int \sigma_0(\tau, \mathbf{n}) \, d\omega, \tag{90.07}$$

$$\frac{d\overset{*}{P}{}^i}{dt} = -\int n_i \sigma_0(\tau, \mathbf{n}) \, d\omega. \tag{90.08}$$

Но плотность σ_0 есть четная функция от n_i как для электромагнитного, так и для гравитационного поля. Поэтому формула (90.08) дает

$$\frac{d\overset{*}{P}{}^i}{dt} = 0. \tag{90.09}$$

Что касается формулы (90.07), то в ней интеграл не будет равен нулю, так как σ_0 есть величина положительная и не стремится к нулю с возрастанием r. Поэтому утечка массы всегда будет иметь место.

Рассмотрим сперва ту часть утечки массы, которая происходит вследствие излучения гравитационных волн. Мы должны тогда заменить σ_0 выражением σ_{0g} из (87.54), в которое должны подставить значения $f^{\alpha\beta}$ из (87.60) и (87.62). Положим для краткости

$$A_{ik} = \frac{d^3}{d\tau^3} D_{ik}(\tau). \tag{90.10}$$

Формула (87.54) дает тогда

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\pi c^6}\left\{A^2 - 2A_iA_i + A_{ik}A_{ik} - \frac{1}{2}(A - A_{jj})^2\right\}, \tag{90.11}$$

где введены сокращенные обозначения

$$A_i = A_{ik}n_k; \qquad A = A_in_i = A_{ik}n_in_k. \tag{90.12}$$

Можно показать, что величина σ_{0g} зависит не от шести величин A_{ik}, а только от пяти их комбинаций, иначе говоря от величин

$$B_{ik} = A_{ik} - a\delta_{ik}; \qquad a = \frac{1}{3}A_{jj}, \tag{90.13}$$

связанных соотношением

$$B_{11} + B_{22} + B_{33} = 0. \tag{90.14}$$

Величины B_{ik} представляют третьи производные от квадрупольных моментов

$$\overset{*}{D}_{ik}(t) = \int \rho\left(x_ix_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}r^2\right)(dx)^3 \tag{90.15}$$

при $t = \tau$. Выражая A_{ik} через B_{ik} и подставляя сперва в (90.12), а затем в (90.11), мы убедимся, что величина a из этой формулы выпадает, и мы получаем

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\pi c^6}\left\{B_{ik}B_{ik} - 2B_iB_i + \frac{1}{2}B^2\right\}. \tag{90.16}$$

Проверим, что эта величина всегда положительна. Так как она представляет инвариант по отношению к трехмерным вращениям, достаточно сделать проверку для какого-нибудь фиксированного направления вектора $\mathbf{n}$, входящего в B_i и B. Полагая

$$n_1 = 1; \qquad n_2 = 0; \qquad n_3 = 0 \tag{90.17}$$

и используя (90.14), мы получим из (90.16):

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\pi c^6}\left\{\frac{1}{2}(B_{22}-B_{33})^2 + 2B_{23}^2\right\}, \tag{90.18}$$

что представляет положительную величину.

В формулу (90.07) входит интеграл от выражения (90.16) по телесному углу. Чтобы его вычислить, можно воспользоваться соотношениями

$$\frac{1}{4\pi}\int n_i n_k \, d\omega = \frac{1}{3}\delta_{ik}, \tag{90.19}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int n_i n_k n_l n_m \, d\omega = \frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}), \tag{90.20}$$

которые проще всего получаются, если в тождестве

$$\frac{1}{4\pi}\int (a_i n_i)^{2p}\, d\omega = \frac{1}{2p+1}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^p \tag{90.21}$$

положить сперва $p=1$, затем $p=2$ и найти коэффициенты при одинаковых степенях и произведениях величин a_i. Интегрирование в (90.21) легко выполняется в координатах с полярной осью, направленной вдоль вектора a.

Применяя соотношения (90.19) и (90.20), будем иметь

$$\frac{1}{4\pi}\int \left(B_{ik}B_{ik} - 2B_iB_i + \frac{1}{2}B^2\right) d\omega = \frac{2}{5}B_{ik}B_{ik}. \tag{90.22}$$

Внося (90.16) в (90.07) и пользуясь (90.22), получаем:

$$\frac{d\overset{*}{M}}{dt} = -\frac{\gamma}{5c^7}B_{ik}B_{ik}. \tag{90.23}$$

Это выражение дает быстроту утечки массы в результате излучения гравитационных волн. Соответствующая формула для быстроты утечки энергии получается умножением (90.23) на c^2 и имеет вид

$$\frac{d\overset{*}{W}}{dt} = -\frac{\gamma}{5c^5}B_{ik}B_{ik}. \tag{90.24}$$

Эта утечка массы и энергии совершенно ничтожна, благодаря огромной величине константы

$$\frac{5c^3}{\gamma} = 2\cdot 10^{39}\ г/сек. \tag{90.25}$$

Если B характеризует порядок величины B_{ik}, то для системы Солнце — Юпитер можем положить в круглых числах

$$\frac{B}{c^2} = 10^{14}\ г/сек, \tag{90.26}$$

поскольку масса, угловая скорость обращения Юпитера вокруг Солнца и отношение квадрата его орбитальной скорости к c^2 равны

$$m_{Ю} = 2\cdot 10^{30}\ г,\qquad \omega_{Ю} = 2\cdot 10^{-8}\ сек.;\qquad \frac{v_{Ю}^2}{c^2} = 2\cdot 10^{-9}. \tag{90.27}$$

Деля квадрат числа (90.26) на значение константы (90.25), получаем для утечки массы $5 \cdot 10^{-12}$ *г/сек*, что в переводе на энергетические единицы составляет смехотворно малую мощность в 450 *вт*. Для сравнения укажем, что мощность электромагнитного излучения Солнца составляет около $4 \cdot 10^{12}$ *г/сек*, т. е. величину, примерно в 10^{24} раз большую.

Этот подсчет полностью подтверждает наше заключение, сформулированное в конце § 88, а именно, что в задаче о гравитационном взаимодействии тяжелых масс гравитационные волны никакой роли не играют.

Рассмотрим еще вопрос о том, с какой точностью можно считать систему тяжелых масс консервативной.

При решении задачи механики в главе VI мы вывели уравнения движения с точностью, позволяющей найти поправки к энергии порядка $M\frac{q^4}{c^2}$, где q есть некоторая характерная скорость. Формула (90.24) показывает, что, пренебрегая электромагнитным излучением, мы могли бы идти и дальше, вплоть до членов порядка $M\frac{q^6}{c^4}$. С этой именно точностью задача многих тел может быть формулирована как задача механики, допускающая десять классических интегралов. Напомним, что в задаче о взаимодействующих зарядах (§§ 26—28) наибольшая достижимая точность соответствует порядку $M\frac{q^4}{c^2}$, так как там излучение играет гораздо бо́льшую роль.

§ 91. Связь между законами сохранения для поля и интегралами механики

В § 89 мы вывели формулы для производных по времени от величин $\overset{*}{M}$, $\overset{*}{P}{}^i$, $\overset{*}{M}{}^{ik}$, $\overset{*}{M}{}^{i0}$ и нашли представление этих величин в виде интегралов по поверхности. Найденные нами выражения для полной массы и для количества движения имеют вид

$$\overset{*}{M} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0})\,dS, \tag{91.01}$$

$$\overset{*}{P}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji})\,dS. \tag{91.02}$$

Момент количества движения выражается формулой

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j \Big\{x_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0k} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{jk}) - \\ - x_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}) + \mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{0k}\Big\}\,dS. \tag{91.03}$$

Величина $\overset{*}{M}{}^{i0}$, входящая в закон движения центра тяжести, равна

$$\overset{*}{M}{}^{i0} = \overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^{i} - \overset{*}{P}{}^{i}t, \tag{91.04}$$

где $\overset{*}{P}{}^{i}$ имеет значение (91.02), а первый член выражения (91.04) равен

$$\overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^{i} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j\left\{x_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{j0}\mathfrak{g}^{k0}) + \mathfrak{g}^{j0}\mathfrak{g}^{i0} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{00}\right\}dS. \tag{91.05}$$

В зависимости от того, как далеко мы проведем поверхность интегрирования S, значения выписанных интегралов для полной массы и других физических величин несколько изменяется, так как они будут включать бóльшую или меньшую часть массы и других величин, принадлежащих „чистому“ гравитационному и электромагнитному излучению. Как мы выяснили в предыдущем параграфе, энергия гравитационного излучения совершенно ничтожна. Пренебрегая также и электромагнитным излучением, мы можем провести поверхность интегрирования уже не в волновой зоне, а на „умеренно-больших“ расстояниях от системы тел; тем самым мы как бы отсечем массу и энергию вещества и статических полей от массы и энергии чистого излучения.

Для потенциалов тяготения на умеренно-больших расстояниях от системы тел мы вывели в §§ 84—85 приближенные выражения, которыми мы теперь и воспользуемся. Согласно (85.46), выражение для $\mathfrak{g}^{00}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{4\gamma x_j}{c^3 r^3}MX^j + \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{2\gamma}{c^3 r}D_{jk} - \\ - \frac{\partial^3}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}\frac{2\gamma}{3c^3 r}\int \rho x_i x_j x_k (dx)^3 + \\ + \frac{7\gamma^2M^2}{c^5r^2} + \frac{14\gamma^2M^2X^jx_j}{c^5r^4} + \frac{4}{c^5}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{91.06}$$

Смешанные компоненты даются формулой (85.41), согласно которой:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4\gamma}{c^3 r}P^i + \frac{2\gamma x_j M_{ji}}{c^3r^3} - \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial t}\frac{2\gamma}{c^3 r}D_{ji} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{2\gamma}{c^3 r}\int \rho v_i x_j x_k (dx)^3 + \\ + \frac{7\gamma^2MP^i}{c^5r^2} + \frac{\gamma^2MP^ix_ix_k}{c^5r^4} + \frac{4}{c^5}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{91.07}$$

Наконец, пространственные компоненты, согласно (85.48), равны

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{2\gamma}{c^3 r}D_{ik} - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial t}\frac{2\gamma}{c^3 r}\int \rho(x_jx_iv_k + x_jx_kv_i - x_ix_kv_j)(dx)^3 + \frac{\gamma^2M^2x_ix_k}{c^3r^4}.\end{aligned} \tag{91.08}$$

В формулах (91.06) — (91.08) мы вместо X_i и P_i написали X^i и P^i, чтобы подчеркнуть векторный характер этих величин. Величина D_{ji} имеет значение (85.39), а именно:

$$D_{ji}(t) = \int \rho x_i x_j \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - \frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3 + \\ + \frac{7}{2c^2}\delta_{ij}\int \rho W (dx)^3. \qquad (91.09)$$

При подстановке D_{ji} в формулу (91.08) для $\mathfrak{g}^{ik}$ достаточно сохранить в D_{ji} главные члены, представляющие обычные моменты инерции. Аргументом в D_{ji} является время t, а не $\tau = t - \frac{r^*}{c}$, как в волновой зоне.

В выражения для $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$ входят также члены, содержащие W и W_i и представляющие поправки на запаздывание. Эти члены приближенно равны:

$$\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{c^5}\left(\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_j x_k}{r^3}\right)\frac{d^2 D_{jk}}{dt^2} - \\ - \frac{\gamma}{3c^5}\frac{\partial^3 r}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_l}\frac{d^2}{dt^2}\int \rho x_i x_k x_l (dx)^3, \qquad (91.10)$$

$$\frac{4}{c^5}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} = -\frac{\gamma}{c^5}\frac{x_j}{r}\frac{d^3 D_{ji}}{dt^3} + \\ + \frac{\gamma}{c^5}\left(\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_j x_k}{r^3}\right)\frac{d^2}{dt^2}\int \rho v_i x_j x_k (dx)^3. \qquad (91.11)$$

Выписанные здесь выражения для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ содержат величины M, P^i, M^{ik}, $MX^i - P^i t$, постоянство которых выражает механические законы сохранения. Мы должны поэтому ожидать, что эти величины совпадают со значениями интегралов $\overset{*}{M}$, $\overset{*}{P}{}^i$, $\overset{*}{M}{}^{ik}$, $\overset{*}{M}{}^{i0}$, представляющих полную массу, количество движения и т. д. для всей системы, включая и поле. Проверим это.

Нам надлежит подставить выражения (91.06) — (91.08) для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ в поверхностные интегралы (91.01) — (91.05) и приближенно вычислить их. При вычислении мы будем сохранять в $\overset{*}{M}$ и $\overset{*}{P}{}^i$ члены порядка q^2/c^2 по отношению к главным, а при вычислении $\overset{*}{M}{}^{ik}$ и $\overset{*}{M}{}^{i0}$ мы для простоты ограничимся главными членами.

Если не считать поправок на запаздывание, то во всех первых производных от $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ членами, медленнее всего убывающими с расстоянием, будут члены порядка $1/r^2$, нечетные в координатах x_1, x_2, x_3. Исключение представляет производная $\frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial t}$, обратно пропорциональная r (и четная в координатах). Что касается поправок на запаздывание, то они, вообще говоря, убывают медленнее, но поправка в члене $\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_k}$ убывает тоже как $1/r^2$, и будет тоже нечетной относительно x_1, x_2, x_3.

Имея в виду эти замечания, составим входящее в формулу (91.01) для $\overset{*}{M}$ выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0}) = \mathfrak{g}^{i\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_\alpha} - \mathfrak{g}^{0\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial x_\alpha}. \tag{91.12}$$

Правая часть получается из левой после замены суммирования по k суммированием по α (включая $\alpha = 0$) и учета условия гармоничности. Так как для вычисления $\overset{*}{M}$ достаточно знать нечетные в координатах члены порядка $1/r^2$, то в выражении (91.12) мы можем заменить вне знака производных величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ их предельными значениями. Сделав это, получим:

$$\mathfrak{g}^{i\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_\alpha} - \mathfrak{g}^{0\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial x_\alpha} = -c\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial t}. \tag{91.13}$$

Это приближение годится и при учете поправок на запаздывание, если иметь в виду их порядок величины относительно q/c.

Используя формулы (91.06) и (91.07) для $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{i0}$, умножая (91.13) на $n_i = \frac{x_i}{r}$ и суммируя по i, получаем для подинтегральной функции в (91.01) выражение:

$$-cn_i\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_i} - \frac{n_i}{c}\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial t} = \frac{4\gamma M}{c^2r^2} + \frac{\gamma}{c^4r^2}(\delta_{ij} - 3n_in_j)\ddot{D}_{ij}. \tag{91.14}$$

Нетрудно видеть, что в правой части второй член пропорционален шаровой функции второго порядка и при интегрировании по поверхности сферы дает нуль. Первый же член дает для интеграла $\overset{*}{M}$ значение

$$\overset{*}{M} = M. \tag{91.15}$$

Таким образом, полная масса системы $\overset{*}{M}$, включающая массу поля, совпадает, в данном приближении, с механической массой M.

Аналогично вычисляется величина $\overset{*}{P}{}^i$. Мы имеем приближенно

$$\mathfrak{g}^{\alpha j}\frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_\alpha} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\frac{\partial \mathfrak{g}^{ji}}{\partial x_\alpha} = -c\frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_j} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{g}^{ji}}{\partial t} \tag{91.16}$$

и далее

$$-cn_j\frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_j} - \frac{1}{c}n_j\frac{\partial \mathfrak{g}^{ji}}{\partial t} = \frac{4\gamma}{c^2r^2}P^i - \\ - \frac{2\gamma}{c^4r}n_j\frac{d^2D_{ij}}{dt^2} + \frac{\gamma}{c^4r^2}(\delta_{kl} - 3n_kn_l)\frac{d^2}{dt^2}\int \rho v_i x_k x_l (dx)^3. \tag{91.17}$$

Здесь сохранены члены порядка q^2/c^2 по отношению к главному, и в них разложение по обратным степеням r доведено до $1/r^2$. При составлении выражения (91.17) были использованы оба члена в поправке на запаздывание (91.11).

В правой части (91.17) второй и третий члены пропорциональны шаровым функциям, и при интегрировании в (91.02) они дают нуль. Первый же член дает

$$\overset{*}{P}{}^{i} = P^{i}. \tag{91.18}$$

Полное количество движения также совпадает с механическим.

Переходим к вычислению $\overset{*}{M}{}^{ik}$. Мы имеем в данном приближении

$$n_j(g^{jk}g^{0i} - g^{ji}g^{0k}) = -c\,(n_k g^{0i} - n_i g^{0k}). \tag{91.19}$$

Используя формулу (91.16), а также очевидное равенство

$$n_i x_j = n_j x_i, \tag{91.20}$$

мы можем написать интеграл (91.03) для $\overset{*}{M}{}^{ik}$ в виде

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int\left\{cn_i\left(g^{0k} - x_j\frac{\partial g^{0k}}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2}x_j\frac{\partial g^{jk}}{\partial t}\right) - \right.$$
$$\left. - cn_k\left(g^{0i} - x_j\frac{\partial g^{0i}}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2}x_j\frac{\partial g^{ji}}{\partial t}\right)\right\}dS. \tag{91.21}$$

Для вычисления интегралов, содержащих $\frac{\partial g^{jk}}{\partial t}$, потребовалось бы знать g^{jk} вплоть до величин, убывающих как $1/r^3$ (мы имеем в виду члены в g^{jk}, содержащие c^3 в знаменателе). Но в § 84 g^{jk} было определено только вплоть до членов, убывающих как $1/r^2$. Хотя вычисление недостающих членов не представляет принципиальных затруднений, мы можем без него обойтись, если ограничимся в (91.21) главными членами и учтем, что интегралы, содержащие $\frac{\partial g^{ik}}{\partial t}$, дают к ним поправки порядка q^2/c^2. Для подинтегральной функции в (91.21) мы получим тогда выражение

$$cn_i\left(g^{0k} - x_j\frac{\partial g^{0k}}{\partial x_j}\right) - cn_k\left(g^{0i} - x_j\frac{\partial g^{0i}}{\partial x_j}\right) =$$
$$= \frac{4\gamma}{c^2r^2}M_{ik} + \frac{8\gamma}{c^2r}(n_iP_k - n_kP_i) + \frac{2\gamma}{c^2r^2}(\delta_{kj} - 3n_kn_j)(M_{ji} + \dot{D}_{ji}) -$$
$$- \frac{2\gamma}{c^2r^2}(\delta_{ij} - 3n_in_j)(M_{jk} + \dot{D}_{jk}). \tag{91.22}$$

Правая часть здесь расположена по шаровым функциям и содержит шаровые функции нулевого, первого и второго порядков *). При

*) При учете членов порядка q^2/c^2 по отношению к главным подинтегральная функция в (91.21) содержала бы шаровые функции до четвертого порядка.

интегрировании остается первый член, и мы получаем

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = M_{ik}, \tag{91.23}$$

как и следовало ожидать.

Нам остается вычислить интеграл (91.05). Используя формулу (91.13), мы можем написать его в виде

$$\overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int\left\{cn_i\left(\mathfrak{g}^{00} - x_j\frac{\partial\mathfrak{g}^{00}}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2}x_j\frac{\partial\mathfrak{g}^{j0}}{\partial t}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{c}n_j(\mathfrak{g}^{ij} + c\delta_{ij})\right\}(dx)^3. \tag{91.24}$$

Поскольку $\frac{\partial\mathfrak{g}^{j0}}{\partial t}$ выражается из условия гармоничности через $\frac{\partial\mathfrak{g}^{jk}}{\partial x_k}$, а эти величины вычисляются из (91.08) вплоть до членов, убывающих как $1/r^3$, мы могли бы вычислить в интеграле (91.24) все члены. Но в целях упрощения выкладок, не представляющих особого интереса, мы ограничимся и здесь главными членами. Мы можем тогда написать:

$$cn_i\left(\mathfrak{g}^{00} - x_j\frac{\partial\mathfrak{g}^{00}}{\partial x_j}\right) = \frac{4\gamma MX^i}{c^2r^2} + n_i\left(1 + \frac{8\gamma M}{c^2r}\right) - \frac{4\gamma}{c^2r^2}(\delta_{ij} - 3n_in_j)MX^j. \tag{91.25}$$

Рассуждая как и раньше, получаем отсюда

$$\overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i = MX^i, \tag{91.26}$$

а так как уже было проверено, что $\overset{*}{P}{}^i = P^i$, то будет

$$\overset{*}{M}{}^{i0} = MX^i - P^it, \tag{91.27}$$

как и должно быть.

Проведенные здесь вычисления можно рассматривать как проверку правильности приближенного решения уравнений Эйнштейна, даваемого формулами (91.06)—(91.08). Вместе с тем результаты этих вычислений являются наглядным выражением связи между законами сохранения, написанными в общей форме, и интегралами механики.

§ 92. Теорема единственности для волнового уравнения

В следующем параграфе мы займемся вопросом о том, насколько однозначно определяется, в случае изолированной системы тел, гармоническая координатная система. При исследовании этого вопроса нам понадобится теорема, устанавливающая условия единственности решения волнового уравнения

$$\square\psi = 0. \tag{92.01}$$

Мы докажем здесь эту теорему для волнового уравнения с постоянными коэффициентами, в котором

$$\square \psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right). \tag{92.02}$$

Наложим на функцию

$$\psi = \psi(x, y, z, t) \tag{92.03}$$

следующие условия.

(а) Условие ограниченности: при всех x, y, z, t имеет место неравенство

$$|\psi| < M_0, \tag{92.04}$$

так что функция ψ равномерно ограничена.

(б) Условие убывания на бесконечности: при неограниченно возрастающем расстоянии $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ от начала координат и при всех t функция удовлетворяет неравенству

$$|\psi| < \frac{M}{r}, \tag{92.05}$$

а ее первые производные удовлетворяют неравенствам

$$|\operatorname{grad}\psi| < \frac{M_1}{r}; \qquad \left|\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right| < \frac{M_1}{r}, \tag{92.06}$$

так что функция ψ и ее первые производные убывают на бесконечности обратно пропорционально r (или еще быстрее). Здесь величины M_0, M, M_1 — положительные постоянные.

(в) Условие излучения: при $r \to \infty$ и всех t удовлетворяется предельное равенство

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\frac{\partial(r\psi)}{\partial r} + \frac{1}{c}\frac{\partial(r\psi)}{\partial t}\right\} = 0, \tag{92.07}$$

которое выражает тот факт, что на больших расстояниях от начала координат имеется только расходящаяся волна, тогда как волны, идущие извне, отсутствуют.

Мы можем теперь формулировать следующую *теорему единственности*.

Решение однородного волнового уравнения $\square\psi = 0$, *удовлетворяющее условиям* (а), (б) и (в), *тождественно равно нулю.*

При доказательстве теоремы мы будем исходить из формулы Кирхгофа для решения волнового уравнения *). Формула Кирхгофа выражает значение функции ψ в некоторой точке пространства $\mathbf{r}_0$

*) О формуле Кирхгофа и ее обобщении — формуле С. Л. Соболева — см. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, § 202 и т. IV, § 148.

в момент времени t_0 через значения ψ и ее производных на поверхности S, окружающей эту точку, причем значения в точке $\mathbf{r}$ поверхности берутся не в момент t_0, а в более ранний момент

$$t = t_0 - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|. \tag{92.08}$$

Формула Кирхгофа имеет вид:

$$\psi(\mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S\int\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right] - [\psi]\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial\nu} + \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\nu}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]\right\}dS. \tag{92.09}$$

Здесь через R обозначено расстояние

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|, \tag{92.10}$$

$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$ есть производная по внешней нормали к поверхности S:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos(nz). \tag{92.11}$$

Квадратные скобки $[\psi]$ означают, что аргумент t должен быть заменен его значением (92.08), причем в производных $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ эта замена должна быть произведена *после* выполнения дифференцирования.

Возьмем в качестве поверхности S поверхность шара радиуса R с центром в точке r_0. Мы можем тогда положить

$$dS = R^2\,d\omega, \tag{92.12}$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла. Далее,

$$\cos(nx) = \frac{x - x_0}{R}; \quad \cos(ny) = \frac{y - y_0}{R}; \quad \cos(nz) = \frac{z - z_0}{R}. \tag{92.13}$$

и так как

$$\frac{\partial R}{\partial\nu} = 1, \tag{92.14}$$

то мы можем писать

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \frac{\partial\psi}{\partial R}. \tag{92.15}$$

Формула Кирхгофа принимает вид

$$\psi(\mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\int\int\left\{\frac{\partial[R\psi]}{\partial R} + \frac{1}{c}\frac{\partial[R\psi]}{\partial t}\right\}d\omega. \tag{92.16}$$

Стоящее под знаком интеграла выражение в фигурных скобках здесь равно

$$\frac{\partial[R\psi]}{\partial R}+\frac{1}{c}\frac{\partial[R\psi]}{\partial t}=\psi(\mathbf{r},\ t)+$$
$$+(x-x_0)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial\psi}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{R}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{92.17}$$

где аргумент t имеет значение (92.08).

Согласно формуле (92.16), значение функции ψ в точке $\mathbf{r}_0$, t_0 есть среднее по телесному углу от выражения (92.17). Для того чтобы в точке $\mathbf{r}_0$, t_0 функция ψ была равна нулю, очевидно, достаточно, чтобы при возрастании R выражение (92.17) стремилось к нулю:

$$\lim_{R\to\infty}\left\{\frac{\partial[R\psi]}{\partial R}+\frac{1}{c}\frac{\partial[R\psi]}{\partial t}\right\}_{t=t_0-\frac{R}{c}}=0. \tag{92.18}$$

Для всякой точки r_0, отстоящей на конечное расстояние от начала координат, это требование будет во всяком случае выполняться при выполнении условий (а), (б) и (в). В самом деле, выражение (92.17) может быть записано в виде

$$\frac{\partial[R\psi]}{\partial R}+\frac{1}{c}\frac{\partial[R\psi]}{\partial t}=\varphi+\varphi_1+\varphi_2, \tag{92.19}$$

где

$$\varphi=\psi(\mathbf{r},\ t)+x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}+z\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{r}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{92.20}$$

$$\varphi_1=-\left(x_0\frac{\partial\psi}{\partial x}+y_0\frac{\partial\psi}{\partial y}+z_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right), \tag{92.21}$$

$$\varphi_2=\frac{R-r}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{92.22}$$

Так как

$$|R-r|\leqslant r_0, \tag{92.23}$$

то, в силу неравенств (92.06), входящих в формулировку условия (б), мы имеем:

$$|\varphi_1|<\frac{r_0}{r}M_1;\qquad |\varphi_2|<\frac{r_0}{r}M_1. \tag{92.24}$$

При фиксированном r_0 и при $r\to\infty$ эти выражения стремятся к нулю. Поэтому будет в отдельности

$$\varphi_1\to 0;\qquad \varphi_2\to 0\qquad (\text{при } r\to\infty), \tag{92.25}$$

и для выполнения условия (92.18) достаточно, чтобы было

$$\varphi\to 0\qquad (\text{при } r\to\infty) \tag{92.26}$$

или

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial(r\psi)}{\partial t}\right\}=0. \tag{92.27}$$

А это есть условие излучения (б) в форме (92.07).

Мы доказали, что в точке $\mathbf{r}_0$ функция ψ равна нулю. А так как эта точка может быть выбрана произвольно, то тем самым доказано, что функция ψ равна нулю везде. Таким образом, формулированная выше теорема единственности доказана.

Интересно сравнить условие (92.18), непосредственно вытекающее из формулы Кирхгофа, с нашими условиями (а), (б) и (в). С одной стороны, условие (92.18) налагает на функцию ψ меньшие требования, а именно оно относится ко временам $t=t_0-\frac{R}{c}$, где R — сколь угодно велико, и не требует равномерного стремления выражения (92.17) к нулю при всех t. С другой стороны, оно содержит в качестве параметров координаты и время ($\mathbf{r}_0$, t_0) точки, для которой вычисляется поле, тогда как наши условия (а), (б) и (в) их не содержат.

Рассмотрим решение волнового уравнения со свободным членом

$$\Delta\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-4\pi\rho, \tag{92.28}$$

выражаемое обычной формулой для запаздывающего потенциала

$$\psi(\mathbf{r}_0, t_0)=\int\frac{[\rho]\,dV}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \tag{92.29}$$

где

$$[\rho]=\rho(\mathbf{r}, t); \qquad t=t_0-\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|. \tag{92.30}$$

Интегрирование в (92.29) ведется по координатам (x, y, z) и распространяется на всю область, где „плотность“ ρ отлична от нуля (область, занятую массами). Если эта область вся лежит внутри сферы $r\leqslant a$ и если время t_0 удовлетворяет неравенству $ct_0>r+a$, то для вычисления интеграла (92.29) достаточно знать ρ для положительных значений аргумента t.

На больших расстояниях от масс функция ψ (которая вне масс удовлетворяет однородному волновому уравнению) имеет асимптотический вид

$$\psi(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{r}\mu\left(t-\frac{r}{c}, \mathbf{n}\right), \tag{92.31}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Функция μ выражается через ρ следующим образом:

$$\mu\left(t-\frac{r}{c}, \mathbf{n}\right)=\int\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{r}{c}+\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')}{c}\right)dV'. \tag{92.32}$$

Выписанные здесь формулы показывают, что запаздывающий потенциал удовлетворяет формулированным выше условиям (а), (б) и (в). В силу доказанной здесь теоремы он является единственным решением неоднородного волнового уравнения (92.28), удовлетворяющим этим условиям. Таким образом, эта теорема дает математическое обоснование применению запаздывающего потенциала, который обычно вводится из физических соображений.

Формулированная здесь теорема единственности доказана нами для волнового уравнения с постоянными коэффициентами. Следует, однако, ожидать, что она остается справедливой и для уравнений с переменными коэффициентами $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, обладающими асимптотикой, установленной в § 87. Доказательство ее для общего случая представляет значительные трудности и является не решенной математической задачей. Гораздо легче доказать ее для случая, когда можно ограничиться „стационарным“ приближением для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и писать волновое уравнение в виде

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\Delta\psi=0, \tag{92.33}$$

где $\Delta\psi$ — евклидов оператор Лапласа, а „показатель преломления“ n имеет значение

$$n=1+\frac{2U}{c^2}. \tag{92.34}$$

Здесь U есть ньютонов потенциал, который можно в данном вопросе считать независящим от времени. Доказательство можно было бы построить либо на формуле С. Л. Соболева *), представляющей обобщение формулы Кирхгофа на уравнения вида (92.33), либо на разложении функции ψ по переменной t в интеграл Фурье и на применении известных условий излучения Зоммерфельда, которые в этом случае будут следствиями нашего условия (92.27).

В заключение заметим, что принятая в этом параграфе постановка задачи отличается от обычной (от задачи Коши) тем, что мы не вводим в явной форме начальные условия, а, напротив, изучаем такие решения волнового уравнения, которые в данной области пространства и в интересующие нас моменты времени от начальных условий не зависят. Такая постановка диктуется характером данной физической задачи. Единственность решения и независимость его от начальных условий достигается в ней ограничением пространственно-временнóй области: начальное возмущение, какое могло оказаться в этой области, давно уже разошлось, новые же возмущения не могут, в силу условий излуче-

*) Формула Соболева отличается от формулы Кирхгофа (92.09) в основном тем, что содержит, кроме поверхностного, еще и объемный интеграл. Рассуждая аналогично вышеизложенному, мы можем считать, что в силу условий для ψ интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю. Это дает для ψ не прямо равенство $\psi=0$, а однородное интегральное уравнение, имеющее только нулевое решение.

ния, поступать в нее извне, а могут только (в случае неоднородного уравнения) порождаться внутри области, причем они тогда определяются уже не начальными условиями, а „плотностью" ρ.

§ 93. О единственности гармонической координатной системы

При решении уравнений Эйнштейна для изолированной системы масс мы пользовались гармоническими координатами, причем решение получалось у нас вполне однозначно. Однозначные результаты получались у нас как для конечных и „умеренно-больших" расстояний от масс, где волновой (гиперболический) характер уравнений Эйнштейна не был существенен и учитывался путем введения поправок на запаздывание, так и в „волновой зоне". Это позволяет думать, что использованные нами условия гармоничности, в соединении с требованием евклидовости на бесконечности и с условиями, обеспечивающими единственность решения уравнений волнового типа, определяют координатную систему однозначно, с точностью до преобразования Лоренца.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Если $\square\psi$ есть инвариантный оператор Даламбера

$$\square\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\right), \tag{93.01}$$

то условия гармоничности

$$\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \tag{93.02}$$

могут быть написаны в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \equiv \square x_\nu = 0, \tag{93.03}$$

так что каждая из функций

$$\psi = x_0;\quad \psi = x_1;\quad \psi = x_2;\quad \psi = x_3 \tag{93.04}$$

есть решение уравнения Даламбера

$$\square\psi = 0. \tag{93.05}$$

Этому уравнению, очевидно, удовлетворяет также постоянная и любая линейная функция от гармонических координат.

Предположим сперва, что метрика пространства-времени галилеева. В галилеевых координатах

$$x_0 = ct;\quad x_1 = x;\quad x_2 = y;\quad x_3 = z \tag{93.06}$$

компоненты фундаментального тензора равны *)

$$g^{\mu\nu} = e_\mu\delta_{\mu\nu} \tag{93.07}$$

*) При применении правила суммирования по дважды встречающемуся значку значок при e_μ ($e_0 = 1$; $e_1 = e_2 = e_3 = -1$) не считается.

и оператор Даламбера имеет вид:

$$\square\,\psi = e_\mu \frac{\partial^2\psi}{\partial x_\mu\,\partial x_\mu}. \tag{93.08}$$

Очевидно, что каждая из галилеевых координат является гармонической.

Найдем самый общий вид гармонических координат. Пусть формулы преобразования имеют вид:

$$x'_\alpha = f^\alpha(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3). \tag{93.09}$$

Новые координаты должны удовлетворять (как и старые) уравнению Даламбера, быть галилеевыми на больших расстояниях и приводить к значениям $g^{\mu\nu}$ с надлежащей асимптотикой. Имея в виду эти требования, будем писать функции f^α в виде

$$f^\alpha = a_\alpha + e_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta + \eta^\alpha(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3). \tag{93.10}$$

Здесь a_α и $a_{\alpha\beta}$ — коэффициенты преобразования Лоренца, удовлетворяющие соотношениям

$$e_\alpha a_{\mu\alpha} a_{\nu\alpha} = e_\mu \delta_{\mu\nu};\qquad e_\alpha a_{\alpha\mu} a_{\alpha\nu} = e_\mu \delta_{\mu\nu}. \tag{93.11}$$

Так как функции f^α должны удовлетворять уравнению

$$\square f^\alpha = 0, \tag{93.12}$$

а линейные члены в отдельности ему удовлетворяют, то должно быть

$$\square\,\eta^\alpha = 0. \tag{93.13}$$

Это уравнение должно удовлетворяться во всем пространстве и при всех t (т. е. при всех x_0). Поскольку в уравнение (93.13) входят вторые производные, естественно потребовать, чтобы сами функции η^α и их первые производные были ограничены во всем пространстве и при всех t. Это требование тем более необходимо, что первые производные от новых координат по старым входят в формулы преобразования для всякого тензора. Что касается условий на бесконечности, то, так как новые координаты там галилеевы, то функции η^α, представляющие добавки к преобразованию Лоренца, должны обращаться там со своими первыми производными в нуль. Кроме того, на бесконечности должны быть выполнены требования, вытекающие из асимптотического поведения $g^{\mu\nu}$. Рассмотрим эти требования подробнее. Не нарушая общности, мы можем считать, что входящее в формулу (93.10) преобразование Лоренца сводится к тождественному преобразованию, так что эта формула может быть написана в виде

$$f^\alpha = x_\alpha + \eta^\alpha(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3). \tag{93.14}$$

Вычисляя по общей формуле

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} \tag{93.15}$$

компоненты фундаментального тензора в новых координатах, получим

$$g'^{\alpha\beta} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} + e_\alpha \frac{\partial \eta^\beta}{\partial x_\alpha} + e_\beta \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x_\beta} + e_\mu \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial \eta^\beta}{\partial x_\mu}. \tag{93.16}$$

По условию, на бесконечности величины $\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x_\beta}$ стремятся к нулю. Поэтому асимптотическое поведение $g'^{\alpha\beta}$ характеризуется членами, линейными в этих величинах. Но это асимптотическое поведение должно быть таково, что разность между величиной $g^{\alpha\beta}$ и ее предельным значением на бесконечности представляет расходящуюся волну. (Соответствующие формулы были выведены нами в § 87 для $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$, но из них вытекают аналогичные формулы и для $g^{\alpha\beta}$.) Таким образом, на бесконечности

$$g^{\gamma\beta} - (g^{\gamma\beta})_\infty = \text{расх. волна}. \tag{93.17}$$

Это требование должно выполняться в любой гармонической системе координат, так что ему должны удовлетворять и величины $g'^{\alpha\beta}$ [формула (93.16)]. Отсюда следует, что на бесконечности

$$e_\alpha \frac{\partial \eta^\beta}{\partial x_\alpha} + e_\beta \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x_\beta} = \text{расх. волна}. \tag{93.18}$$

Если мы положим

$$\eta^\alpha = e_\alpha \eta_\alpha \tag{93.19}$$

и сократим на $e_\alpha e_\beta$, мы можем это условие записать в виде

$$\frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_\beta} = \text{расх. волна}. \tag{93.20}$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_\beta}\right) = 2 \frac{\partial^2 \eta_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \tag{93.21}$$

и переходя от η_ν к η^ν, выводим отсюда, что

$$\frac{\partial^2 \eta^\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \text{расх. волна}. \tag{93.22}$$

Отсюда можно сделать заключение, что η^ν есть сумма линейной функции и функции, представляющей на бесконечности расходящуюся волну. То же заключение относится, очевидно, не только к функциям η^α, входящим в (93.14), но и к функциям η^α, входящим в (93.10). Так как в (93.10) линейная функция уже выделена и, по условию, на бесконечности $\eta^\alpha \to 0$, то мы приходим к выводу, что и сама функция η^α дает расходящуюся волну

$$\eta^\alpha = \text{расх. волна}. \tag{93.23}$$

Мы можем теперь уточнить условия, которым удовлетворяет добавка η^α к линейной функции в формуле (93.10). Эта добавка удовлетворяет волновому уравнению (93.13) и остается со своими первыми производными всюду ограниченной. На бесконечности величина η^α и ее первые производные убывают как $1/r$. Наконец, вследствие (93.23) можно считать, что на бесконечности величина η^α удовлетворяет условию излучения вида (92.27). Все эти условия должны выполняться при всех значениях t. В силу теоремы единственности, доказанной в § 92, величина η^α, удовлетворяющая этим условиям, тождественно равна нулю. Следовательно, функция f^α, входящая в (93.09) и (93.10), приводится к линейной, и самый общий вид преобразования от одной гармонической координатной системы к другой напишется:

$$x'_\alpha = a_\alpha + e_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta, \tag{93.24}$$

т. е. сводится к преобразованию Лоренца.

Этот результат доказан нами для случая галилеева пространства времени с метрикой (93.02), поскольку формулированная в § 92 теорема единственности доказана для этого случая. Представляется, однако, несомненным, что эта теорема может быть доказана и для общего случая эйнштейновского пространства-времени, фундаментальный тензор которого обладает асимптотикой, установленной в § 87. Приняв это, мы приходим к выводу, что и в общем случае гармоническая координатная система определяется однозначно, с точностью до преобразования Лоренца. В самом деле, рассуждения этого параграфа остаются в силе и в общем случае. В гармонической координатной системе оператор Даламбера имеет вид

$$\Box \psi = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} \tag{93.25}$$

и не содержит первых производных. Вследствие этого волновому уравнению удовлетворяет любая линейная функция от координат. Поэтому, написав преобразование координат в виде (93.09), где f^α имеет значение (93.10), и потребовав, чтобы новые координаты были тоже гармоническими [уравнение (93.12)], мы и в общем случае получим для добавок η^α волновое уравнение (93.13), где оператор $\Box$ имеет уже значение (93.25). Добавки η^α и их первые производные должны, очевидно, быть ограниченными во всем пространстве. Остальные же условия, налагаемые на η^α, относятся к бесконечно удаленной области, где метрика мало отличается от галилеевой. Эти условия могут быть поэтому взяты без изменения из предыдущего случая. В частности, левая часть (93.18) будет представлять разность между асимптотическими выражениями $g^{\alpha\beta}$ в первоначальных и в преобразованных координатах и должна поэтому соответствовать расходящейся волне. Отсюда заключаем, как и раньше, о справедливости соотношений (93.22) и (93.23), а тогда теорема единственности приводит к выводу, что добавки η^{α} равны нулю.

Таким образом, и в общем случае гармоническая координатная система определяется однозначно, с точностью до преобразования Лоренца.

Следует отметить, что мы не вводили в явной форме никаких начальных условий для функций f^{α}, дающих преобразование координат. Такая постановка задачи соответствует постановке задачи об определении потенциалов тяготения $g^{\mu\nu}$. Там имеет смысл вводить начальные условия только для распределения тяжелых масс, но не для гравитационных волн и не для самих потенциалов тяготения. Задача определения потенциалов тяготения не есть задача Коши (т. е. не есть задача на начальные условия), но скорее — задача нахождения некоторого установившегося состояния, которое наступает, когда все гравитационные волны, кроме порождаемых самим движением рассматриваемых масс, уже разошлись (см. выше, конец § 92).

Наши рассуждения показывают, что условия, обеспечивающие единственность координатной системы, вытекают из самой постановки физической задачи. Поскольку это не есть задача Коши в отношении определения потенциалов тяготения, она не будет задачей Коши и в отношении определения координатной системы. Определенность в постановке задачи о потенциалах тяготения достигается тем, что мы исключаем, при помощи условий излучения, внешние „мимолетные" гравитационные волны. Но тем самым исключаются и соответствующие волновые члены в формулах преобразования координат, чем в свою очередь достигается единственность координатной системы.

Формулируем наше заключение еще раз. *В случае изолированной системы масс существует координатная система, а именно гармоническая, которая определяется путем наложения добавочных условий однозначно, с точностью до преобразования Лоренца.*

Может возникнуть вопрос: не существуют ли, помимо гармонической, и другие координатные системы, обладающие этим свойством. Нам представляется это невероятным. Гармонические координаты характеризуются тем, что каждая из них, а также любая их линейная функция, удовлетворяет линейному общековариантному уравнению. Едва ли можно найти другие координаты, обладающие таким свойством; другие координатные условия, даже очень похожие на условия гармоничности (93.02), например $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0$, к линейному уравнению не сводятся.

Сама по себе необходимость добавить для определенности задачи к 10 уравнениям тяготения Эйнштейна 4 новых уравнения является очевидной. Трудность заключалась в выборе этих дополнительных уравнений и в формулировке предельных условий.

В противоположность нашей постановке задачи, в той постановке, какую ей дает Эйнштейн, задача остается математически неопределенной, и не может быть речи о единственности решения. По Эйнштейну, никаких привилегированных систем координат не существует, и система координат остается неопределенной до конца. Сторонники этой точки зрения возводят эту неопределенность в достоинство и усматривают в ней глубокий смысл, а именно выражение некоего „общего принципа относительности", в силу чего и вся теория Эйнштейна названа им „общей теорией относительности".

С такой точкой зрения мы согласиться никак не можем. Присущая постановке Эйнштейна неопределенность объясняется, по нашему мнению, просто тем, что в ней не хватает уравнений. Никакого глубокого смысла в этой неопределенности не заключается, а скорее следует видеть в ней недостаток математической постановки задачи. Существование привилегированной системы координат, определяемой с точностью до преобразования Лоренца, имеет, напротив того, важное принципиальное значение, и его нельзя игнорировать. Достигаемая при пользовании привилегированной системой координат единственность решения представляется нам несомненным достоинством, а не недостатком. Разумеется, допустимо пользоваться любой системой координат, но самый физический смысл произвольной системы координат становится ясным лишь после того, как даны формулы, связывающие ее с привилегированной системой.

Что касается „общего принципа относительности", то такого принципа на самом деле нет. Тот принцип относительности, который относится к прямолинейному и равномерному движению и является обобщением принципа относительности Галилея, отражает изотропность галилеевой метрики. Эта изотропность уже не имеет места при наличии тяготения. Поэтому, строго говоря, в так называемой „общей теории относительности" меньше относительности, чем в „частной", а никак не больше (см. Введение).

Мы неоднократно подчеркивали принципиальное значение существования привилегированной координатной системы, определяемой с точностью до преобразования Лоренца. Оно проявляется и в следующем. Только признав его, можно говорить о правильности гелиоцентрической системы Коперника, в том же смысле, в каком это было возможно в механике Ньютона. Непризнание же привилегированных координатных систем ведет к той точке зрения, согласно которой гелиоцентрическая система Коперника и геоцентрическая система Птоломея будто бы равноправны. Такая точка зрения представляется нам неправильной.

§ 94. Пространство Фридмана—Лобачевского

При постановке задачи о решении уравнений тяготения для системы масс мы рассматривали эту систему как изолированную и погруженную в бесконечное евклидово пространство, или в галилеево пространство-время. Такая постановка бесспорно допустима при рассмотрении объектов размерами с Солнечную систему. Размеры эти могут быть характеризованы радиусами орбит наиболее тяжелой планеты — Юпитера (778 миллионов километров) и наиболее удаленной планеты — Плутона (5900 миллионов километров). Свет доходит от Солнца до Плутона примерно за 5,5 часа. Ближайшая же звезда (α Центавра) отстоит от Солнца на 4,3 световых года, т. е. примерно в 7000 раз дальше, чем Плутон.

Возможно, что такая постановка задачи допустима при рассмотрении отдельного звездного скопления или даже целой Галактики. Размеры галактик *) все еще в десятки раз меньше их взаимных расстояний. Но если рассматривать столь огромные области пространства, что они включают в себя много галактик (а такие области просматриваются в современные большие телескопы), то понятие изолированной системы, погруженной в евклидово пространство, становится явно непригодным.

Возникает вопрос: чем заменить тот евклидов фон, который рассматривался нами до сих пор? Какое пространство-время взять в качестве фона, на котором выступают отдельные системы масс?

Замена евклидова фона каким-то другим нужна еще и потому, что при рассмотрении масс, распределенных в евклидовом пространстве с равномерной в среднем плотностью, возникает известный парадокс Зелигера, который заключается в том, что ньютонов потенциал от равномерного распределения масс не существует. Между тем астрономические наблюдения показывают, что распределение галактик в доступном наблюдению мировом пространстве, вплоть до расстояний порядка миллиарда световых лет, в среднем равномерно. С другой стороны, если ньютонов потенциал не существует, то ясно, что форма решения уравнений Эйнштейна должна существенно отличаться от той, какая соответствует изолированной системе масс и позволяет приближенно выразить потенциалы тяготения $g^{\mu\nu}$ через ньютонов потенциал. Ввиду изменившегося характера задачи выбор координат также должен быть произведен заново.

Решение уравнений Эйнштейна, которое соответствует изотропному пространству с равномерной плотностью масс и которое может быть взято в качестве фона при рассмотрении огромных областей, включающих в себя много галактик, было получено в 1922 г.

*) Под Галактикой (с большой буквы) принято понимать ту звездную систему, в которую входит Солнце. Другие аналогичные звездные системы называются галактиками (с маленькой буквы).

советским ученым А. А. Фридманом [24]. Как мы увидим, в этом решении возможно введение таких координат, в которых пространство обладает геометрией Лобачевского. Мы будем называть поэтому соответствующее пространственно-временное многообразие пространством *Фридмана—Лобачевского*.

Теорию пространства Фридмана—Лобачевского можно получить, исходя из предположения, что выражение для ds^2 допускает *группу однородных преобразований Лоренца*. Такое ds^2 можно всегда привести к виду

$$ds^2 = H^2(S)(dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2), \tag{94.01}$$

где

$$S = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\,. \tag{94.02}$$

Пространство-время, хотя и не будет само галилеево, но, согласно (94.01), может быть конформно отображено на галилеево пространство-время. Наличие группы однородных преобразований Лоренца обеспечивает *изотропность пространства*. В частности, начало координат ничем не выделяется среди других точек пространства; любую фиксированную точку можно при помощи однородного преобразования Лоренца перенести в начало координат. Таким образом, однородные преобразования Лоренца играют здесь двоякую роль: они дают и перенос начала и переход к движущейся системе отсчета.

Напишем ds^2 в виде

$$ds^2 = H^2 \cdot (e_\mu\, dx_\mu^2). \tag{94.03}$$

Мы видим, что

$$g_{\mu\nu} = H^2 e_\mu \delta_{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{H^2} e_\mu \delta_{\mu\nu}. \tag{94.04}$$

Для скобок Кристоффеля получаются выражения

$$\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = \frac{H'(S)}{SH}(e_\alpha \delta_{\rho\beta} x_\alpha + e_\beta \delta_{\rho\alpha} x_\beta - e_\alpha \delta_{\alpha\beta} x_\rho). \tag{94.05}$$

Составляя по формуле

$$R^\rho_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\beta} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} \tag{94.06}$$

[см. (44.01)] смешанный тензор кривизны четвертого ранга, получим:

$$R^\rho_{\mu,\alpha\beta} = \left[\frac{d^2 \lg H}{dS^2} - \frac{1}{S}\frac{d \lg H}{dS} - \left(\frac{d \lg H}{dS}\right)^2\right] \times$$
$$\times \frac{e_\mu}{S^2}(e_\alpha \delta_{\mu\beta} x_\alpha x_\rho - e_\beta \delta_{\mu\alpha} x_\beta x_\rho + e_\beta \delta_{\rho\alpha} x_\beta x_\mu - e_\alpha \delta_{\rho\beta} x_\alpha x_\mu) +$$
$$+ \left[\frac{2}{S}\frac{d \lg H}{dS} + \left(\frac{d \lg H}{dS}\right)^2\right] e_\mu (\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\beta\rho}\delta_{\alpha\mu}). \tag{94.07}$$

Полагая здесь $\alpha=\rho$, $\beta=\nu$ и суммируя по ρ, получаем

$$R_{\mu\nu}=\left[\frac{d^2\lg H}{dS^2}+\frac{5}{S}\frac{d\lg H}{dS}+2\left(\frac{d\lg H}{dS}\right)^2\right]e_\mu\delta_{\mu\nu}+$$
$$+2\left[\frac{d^2\lg H}{dS^2}-\frac{1}{S}\frac{d\lg H}{dS}-\left(\frac{d\lg H}{dS}\right)^2\right]e_\mu e_\nu\frac{x_\mu x_\nu}{S^2}. \qquad (94.08)$$

Вычисляем инвариант

$$R=\frac{6}{H^2}\left[\frac{d^2\lg H}{dS^2}+\frac{3}{S}\frac{d\lg H}{dS}+\left(\frac{d\lg H}{dS}\right)^2\right] \qquad (94.09)$$

или

$$R=\frac{6}{H^3}\left(\frac{d^2H}{dS^2}+\frac{3}{S}\frac{dH}{dS}\right). \qquad (94.10)$$

Теперь мы можем составить консервативный тензор

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \qquad (94.11)$$

Из формул (94.08), (94.09) и (94.04) получаем

$$G_{\mu\nu}=-\left[2\frac{d^2\lg H}{dS^2}+\frac{4}{S}\frac{d\lg H}{dS}+\left(\frac{d\lg H}{dS}\right)^2\right]e_\mu\delta_{\mu\nu}+$$
$$+2\left[\frac{d^2\lg H}{dS^2}-\frac{1}{S}\frac{d\lg H}{dS}-\left(\frac{d\lg H}{dS}\right)^2\right]e_\mu e_\nu\frac{x_\mu x_\nu}{S^2}. \qquad (94.12)$$

Согласно уравнениям Эйнштейна,

$$G_{\mu\nu}=-\frac{8\pi\gamma}{c^2}T_{\mu\nu}. \qquad (94.13)$$

В качестве тензора массы $T_{\mu\nu}$ мы должны взять выражение, соответствующее „пылевидной“ материи

$$T_{\mu\nu}=\rho^* u_\mu u_\nu, \qquad (94.14)$$

где ρ^* есть инвариантная плотность, а u_ν — ковариантная составляющая четырехмерной скорости, нормированной по формуле

$$u_\nu u^\nu=1. \qquad (94.15)$$

Для того чтобы выражения (94.12) и (94.14) удовлетворяли уравнениям Эйнштейна (94.13), нужно прежде всего приравнять нулю первый член в выражении для $G_{\mu\nu}$. Это дает

$$2\frac{d^2\lg H}{dS^2}+\frac{4}{S}\frac{d\lg H}{dS}+\left(\frac{d\lg H}{dS}\right)^2=0. \qquad (94.16)$$

Если положить здесь

$$H=K^2;\quad \lg H=2\lg K, \qquad (94.17)$$

то уравнение (94.16) приводится к линейному

$$\frac{d^2K}{dS^2}+\frac{2}{S}\frac{dK}{dS}=0 \tag{94.18}$$

и легко интегрируется. Если считать что при $S=\infty$ должно быть $K=1$ (пространство-время галилеево и масштаб в нем обычный), то будет

$$K=1-\frac{A}{S} \tag{94.19}$$

и, следовательно,

$$H=1-\frac{2A}{S}+\frac{A^2}{S^2}. \tag{94.20}$$

С этим значением H будет

$$G_{\mu\nu}=-\frac{12A}{S^5\left(1-\frac{A}{S}\right)^2}e_\mu e_\nu x_\mu x_\nu, \tag{94.21}$$

и уравнения Эйнштейна напишутся

$$\frac{12A}{S^5H}e_\mu e_\nu x_\mu x_\nu=\frac{8\pi\gamma}{c^2}\rho^*u_\mu u_\nu. \tag{94.22}$$

Составляя инварианты обеих частей тензорного равенства (94.22), получим

$$\frac{8\pi\gamma}{c^2}\rho^*=\frac{12A}{S^3H^3}. \tag{94.23}$$

Эти инварианты равны R; поэтому мы могли бы для вычисления правой части (94.23) применить непосредственно формулу (94.10), подставив в нее значение (94.20) для H. Так как плотность ρ^* положительна, то и постоянная A должна быть положительна.

При использовании соотношения (94.23) уравнения (94.22) дают

$$u_\mu=H\frac{e_\mu x_\mu}{S}, \tag{94.24}$$

и после перехода к контравариантным составляющим

$$u^\mu=\frac{x_\mu}{HS}. \tag{94.25}$$

Мы получили решение уравнений Эйнштейна, соответствующее отличной от нуля плотности масс ρ^*, причем эти массы равномерно распределены во всем пространстве. (В ньютоновой теории подобное решение не существует). Этот результат был впервые получен А. А. Фридманом в его упомянутой выше работе 1922 г. [24].

Напишем полученное решение в явной форме. Мы имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{S}\right)^4 (dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2), \tag{94.26}$$

где

$$S = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \tag{94.02}$$

Интересно отметить, что это выражение допускает не только группу однородных преобразований Лоренца, но и преобразование инверсии

$$x'_\mu = \frac{A^2}{S^2} x_\mu. \tag{94.27}$$

Последнее не имеет, впрочем, прямого физического значения, так как переводит область $S > A$ в область $S' < A$, а физическое значение имеет только случай $S > A$. Нетрудно указать также формулы, связывающие координаты x_μ с гармоническими координатами $\overset{*}{x}_\mu$, а именно:

$$\overset{*}{x}_\mu = \left(1 + \frac{4}{3}\frac{A}{S} + \frac{A^2}{S^2}\right) x_\mu. \tag{94.28}$$

Гармонические координаты $\overset{*}{x}_\mu$ не меняются при преобразовании инверсии (94.27). В задаче об изолированной системе масс привилегированное положение гармонических координат опиралось на рассмотренные в § 93 предельные условия, в том числе на условие евклидовости на бесконечности. В пространстве Фридмана — Лобачевского условия, однако, совсем иные, вследствие чего здесь более соответствуют характеру задачи не гармонические, а „конформно-галилеевы" координаты, в которых ds^2 имеет вид (94.26).

Рассмотрим движение вещества, соответствующее **полученному** решению. В уравнении неразрывности

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\overset{*}{\rho} u^\mu)}{\partial x_\mu} = 0 \tag{94.29}$$

мы должны положить

$$\sqrt{-g}\,\overset{*}{\rho}\, u^\mu = \frac{3Ac^2}{2\pi\gamma}\frac{x_\mu}{S^4}, \tag{94.30}$$

откуда видно, что оно выполняется в силу тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{x_\mu}{S^4}\right) = 0. \tag{94.31}$$

Поле скоростей характеризуется величинами (94.25). Мы имеем

$$\frac{dx_\mu}{dx_0} = \frac{u^\mu}{u^0} = \frac{x_\mu}{x_0}. \tag{94.32}$$

Положив для наглядности $x_0 = ct$, можем написать

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{x_i}{t}, \tag{94.33}$$

откуда для каждой массы

$$x_i = v_i t, \tag{94.34}$$

где v_i — постоянная. Вследствие того, что $S^2 > 0$, мы должны иметь

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2. \tag{94.35}$$

Во вспомогательном галилеевом пространстве каждая масса движется с постоянной скоростью, пропорциональной ее координате, и, следовательно, все расстояния возрастают там пропорционально времени. Это относится, собственно, к вспомогательному галилееву пространству, но качественно заключение о возрастании взаимных расстояний со временем остается в силе и для физического пространства. Такое расширяющееся пространство и составляет тот фон, который становится здесь на место евклидова фона. Наблюдаемые физические следствия из этого заключения, которое на первый взгляд кажется парадоксальным, будут рассмотрены в следующем параграфе.

Введенные формулой (94.34) величины v_i можно рассматривать как координаты данной массы, взятые в масштабе, растущем пропорционально „времени" t. В этом масштабе, координаты каждой массы будут постоянными. Поэтому, с точки зрения уравнений движения сплошной среды, величины v_i будут своего рода координатами Лагранжа (в отличие от координат Эйлера x_i). Введем в выражение для ds^2 в качестве пространственных переменных три величины v_i, а в качестве временно́й переменной — величину τ, пропорциональную S и равную

$$\tau = \sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}. \tag{94.36}$$

Наша подстановка будет иметь вид

$$x_i = \frac{v_i \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{94.37}$$

Очевидно, что соотношение (94.36) выполняется тождественно. Мы будем иметь

$$dx_i = \frac{v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, d\tau + \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\delta_{ik} + \frac{v_i v_k}{c^2 - v^2}\right) dv_k, \tag{94.38}$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, d\tau + \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v_i\, dv_i}{c^2 - v^2}, \tag{94.39}$$

откуда

$$c^2\, dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = c^2\, d\tau^2 - \tau^2\, d\sigma^2, \tag{94.40}$$

где

$$d\sigma^2 = \frac{(d\mathbf{v})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\times d\mathbf{v}]^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \tag{94.41}$$

уже известный нам из § 17 квадрат элемента дуги в пространстве скоростей Лобачевского — Эйнштейна. Вместо (94.36) мы можем также написать

$$d\sigma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(\delta_{ik} + \frac{v_i v_k}{c^2 - v^2}\right) dv_i\, dv_k. \tag{94.42}$$

Если мы введем вместо A постоянную α, так что

$$S = c\tau; \quad A = c\alpha, \tag{94.43}$$

мы получим для ds^2 выражение

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 (c^2\, d\tau^2 - \tau^2\, d\sigma^2). \tag{94.44}$$

Величина τ может быть названа собственным временем во вспомогательном галилеевом пространстве. Физическим же собственным временем является величина T, определяемая равенством

$$T = \int\limits_{\alpha}^{\tau} \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2 d\tau = \tau - \frac{\alpha^2}{\tau} - 2\alpha\lg\frac{\tau}{\alpha}. \tag{94.45}$$

Время отсчитывается здесь условно от той весьма удаленной эпохи (несколько миллиардов лет тому назад), когда наблюдаемые ныне галактики находились гораздо ближе друг к другу, чем сейчас. К еще более ранней эпохе применять написанные здесь уравнения не имеет смысла, так как в них пренебрегается прямым гравитационным взаимодействием галактик, которое тогда могло быть значительным.

Пространственная часть ds^2, соответствующая фиксированному значению мирового времени T (а значит и фиксированному τ), равна

$$dl^2 = \tau^2\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 d\sigma^2. \tag{94.46}$$

Это есть пространство Лобачевского постоянной отрицательной кривизны. Объем его бесконечен.

Рассмотрим массу галактик, скорости которых во вспомогательном галилеевом пространстве лежат в данных пределах. Если ρ^* есть инвариантная плотность, то эта масса равна

$$dM = \rho^*\, dV, \tag{94.47}$$

где dV — элемент объема в пространстве Лобачевского с мероопределением (94.46). Как нетрудно вычислить из (94.42), в пространстве скоростей элемент объема равен

$$dV_\sigma = \frac{dv_1\, dv_2\, dv_3}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}. \tag{94.48}$$

Следовательно, элемент объема в пространстве Лобачевского равен

$$dV = \tau^3 \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^6 dV_\sigma \tag{94.49}$$

и масса dM равна

$$dM = \rho^* \tau^3 \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^6 dV_\sigma. \tag{94.50}$$

Формула (94.23) для инвариантной плотности может быть написана в виде

$$\rho^* = \frac{3c^2}{2\pi\gamma} \cdot \frac{A}{S^3\left(1 - \frac{A}{S}\right)^6}, \tag{94.51}$$

откуда, учитывая (94.43), получаем:

$$\rho^* \tau^3 \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^6 = \frac{3\alpha}{2\pi\gamma}. \tag{94.52}$$

Подставляя это выражение в (94.50), будем иметь

$$dM = \frac{3\alpha}{2\pi\gamma}\, dV_\sigma, \tag{94.53}$$

что можно написать также в виде

$$\gamma\, dM = \frac{3\alpha}{2\pi} \frac{dv_1\, dv_2\, dv_3}{\left(1 - \frac{v^2}{c^3}\right)^2}. \tag{94.54}$$

При изучении красного смещения в спектрах отдаленных галактик принято характеризовать величину его той скоростью v^*, которая вызвала бы его, если бы все смещение можно было приписать эффекту Допплера в обычном галилеевом пространстве. Из теории красного смещения, которая будет развита в следующем параграфе, следует, что эта эффективная скорость v^*, *если только она мала по сравнению со скоростью света* c, связана с рассмотренной здесь скоростью v соотношением

$$v^* = \frac{\tau + \alpha}{\tau - \alpha} v. \tag{94.55}$$

Благодаря этому соотношению предыдущие формулы приобретают бо̀льшую наглядность. Так, если положить

$$\alpha^* = \alpha \left(\frac{\tau - \alpha}{\tau + \alpha}\right)^3, \tag{94.56}$$

то формулу (94.54) можно приближенно написать в виде

$$\gamma\, dM = \frac{3\alpha^*}{2\pi}\, dv_1^*\, dv_2^*\, dv_3^*. \tag{94.57}$$

Проинтегрировав по телесному углу и по абсолютной величине эффективной скорости, мы получим соотношение

$$\gamma (M - M_0) = 2\alpha^* (v^{*3} - v_0^{*3}), \tag{94.58}$$

из которого можно получить оценку величины α^* по оценке массы $M - M_0$ тех галактик, эффективные допплеровские скорости которых лежат между v_0^* и v^*.

§ 95. Теория красного смещения

Гипотеза о том, что структура очень больших областей пространства, содержащих в себе много галактик, подобна структуре пространства Фридмана — Лобачевского, нашла себе неожиданное подтверждение в открытом астрономом Хэбблем [25] явлении красного смещения в спектрах галактик. Оказалось, что все линии в спектрах галактик смещены в красную сторону, причем это смещение тем больше, чем дальше от нас галактика.

В этом параграфе мы дадим теорию красного смещения на основе указанной гипотезы.

Напишем выражение для ds^2 в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 (c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2). \tag{95.01}$$

Здесь α есть положительная постоянная, а величина τ равна

$$\tau = \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}; \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{95.02}$$

Фактически выражение (95.01) содержит не одну постоянную, а две, так как остается неизвестным начало отсчета времени или, что то же, значение величины τ для данной эпохи. Теория красного смещения дает, в принципе, возможность определить эти две постоянные из наблюдений. При этом теория допускает проверку, если только известна средняя плотность ρ^* вещества в пространстве.

Изменение частоты света, идущего от отдаленной звезды, получается в результате двух эффектов: эффекта Эйнштейна (§ 51), который имеет место при переходе света из области с одним значением потенциала тяготения g_{00} в область с другим его значением, и эффекта Допплера (§ 13), который имеет место при излучении движущейся системой.

То обстоятельство, что пространство Фридмана — Лобачевского является конформно-галилеевым, значительно облегчает исследование закона распространения света. В самом деле, в пространстве с квадратом линейного элемента (95.01) закон распространения фронта волны имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]=0, \tag{95.03}$$

в точности совпадающий с законом распространения фронта волны в галилеевом пространстве-времени. Уравнения характеристик будут поэтому те же, как в галилеевом случае; в частности, характеристиками будут поверхности

$$t-\frac{r}{c}=\text{const}; \quad t+\frac{r}{c}=\text{const}. \tag{95.04}$$

Все рассуждения, связанные с законом распространения фронта волны и с видом характеристик, переносятся без изменения из галилеева случая на случай конформно-галилеева пространства-времени. В частности, остается без изменения вся теория эффекта Допплера.

После этих предварительных замечаний переходим к выводу формул для изменения частоты света.

Мы будем пользоваться координатной системой с началом координат на Солнце или на Земле (где именно, это безразлично в виду малости относительного расстояния по сравнению с расстоянием до других галактик). Пусть при $t=t_0$ отдаленная звезда, находившаяся тогда на расстоянии $r=r_0$, излучает свет. Соответствующее времени t_0 и расстоянию r_0 значение τ_0 равно, согласно (95.02),

$$\tau_0=\sqrt{t_0^2-\frac{r_0^2}{c^2}}. \tag{95.05}$$

В силу уравнения характеристики

$$t_0+\frac{r_0}{c}=t+\frac{r}{c} \tag{95.06}$$

этот свет доходит до Земли ($r=0$) в момент времени $t=t_0+\frac{r_0}{c}$; соответствующее значение τ равно

$$\tau=t_0+\frac{r_0}{c}. \tag{95.07}$$

Отсюда и из (95.05) получаем

$$\frac{\tau_0}{\tau}=\sqrt{\frac{t_0-\frac{r_0}{c}}{t_0+\frac{r_0}{c}}}. \tag{95.08}$$

С другой стороны, если излучающая звезда движется с той скоростью, какая соответствует средней скорости вещества в пространстве

Фридмана — Лобачевского, то, согласно (94.34),

$$\frac{r_0}{t_0} = v, \qquad (v > 0) \tag{95.09}$$

где v есть постоянная скорость звезды во вспомогательном галилеевом пространстве. Из (95.08) и (95.09) получаем

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{95.10}$$

Рассмотрим теперь изменение частоты. Пусть ω_0 — собственная частота излучателя, ω_0^* — частота во вспомогательном галилеевом пространстве в системе отсчета излучателя. Эти две величины связаны соотношением

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0^*}\left(1 - \frac{\alpha}{\tau_0}\right)^2. \tag{95.11}$$

Переводным множителем служит здесь взятое из (95.01) значение величины $\frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}$ в момент и в месте излучения. Во вспомогательном галилеевом пространстве излучатель частоты ω_0^* движется со скоростью v от Земли. Воспринимаемая на Земле частота ω^* получится по обычной теории эффекта Допплера равной

$$\omega^* = \omega_0^*\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{95.12}$$

Согласно (95.10), это соотношение можно записать в виде

$$\tau\omega^* = \tau_0\omega_0^*. \tag{95.13}$$

Нам остается перейти от частоты ω^* во вспомогательном галилеевом пространстве к частоте ω в физическом пространстве. Переход совершается по формуле, аналогичной (95.11), только значение величины $\frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}$ берется в момент и в месте наблюдения. Соответствующая формула напишется

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega^*}\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2. \tag{95.14}$$

Из (95.11), (95.13) и (95.14) получаем окончательно

$$\tau\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2 \omega = \tau_0\left(1 - \frac{\alpha}{\tau_0}\right)^2 \omega_0. \tag{95.15}$$

Здесь ω_0 — собственная частота излучателя (например, атома водорода), а ω — частота света, испущенного таким же излучателем на отдаленной звезде и дошедшего до Земли. Так как $\tau > \tau_0$ и множитель при ω в формуле (95.15) есть возрастающая функция от τ, то будет $\omega < \omega_0$, т. е. будет происходить *уменьшение* частоты и, следовательно, смещение линий видимой части спектра к красному концу.

В нашем выводе учет изменения величины $\sqrt{g_{00}}$ при переходе от звезды к Земле соответствует учету эффекта Эйнштейна, а применение формулы (95.12) — учету эффекта Допплера.

Проследим теперь за изменением амплитуды световой волны, идущей от звезды к Земле. По плотности потока энергии, пропорциональной квадрату амплитуды, можно судить о расстоянии до звезды, если выбирать звезды с одинаковой мощностью излучения (такими можно считать Новые звезды в период их максимальной яркости).

В пространстве с квадратом линейного элемента (94.01) волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(H^2 e_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}\right) = 0, \tag{95.16}$$

и если мы положим

$$\psi = \frac{\psi^*}{H}, \tag{95.17}$$

где ψ^* — новая функция, то оно напишется

$$H \square \psi^* - \psi^* \square H = 0. \tag{95.18}$$

Здесь $\square$ есть галилеев оператор Даламбера:

$$\square \psi^* = e_\mu \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x_\mu^2}. \tag{95.19}$$

Функция H меняется неизмеримо медленнее, чем функция ψ^*; поэтому второй член в (95.18) мы можем отбросить и писать волновое уравнение в виде

$$\square \psi^* = 0 \tag{95.20}$$

(такое пренебрежение вообще не влияет на выражение для потока энергии в волновой зоне, который нас только и интересует).

Возьмем теперь начало координат на звезде и рассмотрим идущую оттуда сферическую волну. Величина ψ^* будет иметь вид

$$\psi^* = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{95.21}$$

и, следовательно,

$$\psi = \frac{1}{rH} f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{r\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2} f\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{95.22}$$

Квадрат амплитуды функции ψ будет величиной, пропорциональной плотности I потока энергии. Поэтому мы можем положить

$$I = \frac{B}{r^2\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4}, \tag{95.23}$$

где B — положительная постоянная, равная потоку энергии в единицу телесного угла. В самом деле, из выражения для ds^2, написанного в сферических координатах,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 \{c^2\,dt^2 - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2)\} \tag{95.24}$$

следует, что элемент поверхности сферы, окружающей источник, равен *)

$$dS = r^2\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi. \tag{95.25}$$

Отсюда поток энергии сквозь элемент поверхности S напишется

$$I\,dS = B\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi, \tag{95.26}$$

что и показывает, что B есть поток энергии в единицу телесного угла.

Величина B постоянна в той системе отсчета, в которой написано волновое уравнение и его решение (95.22). Но нужно помнить, что B есть именованное число, значение которого зависит от выбора единиц и эталонов для его измерения; переход же к новой системе отсчета, вообще говоря, влияет на эталоны. Размерность потока энергии есть энергия, деленная на время, или, иначе, действие, умноженное на квадрат частоты. Действие есть инвариант, и эталон действия не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. Поэтому при таком переходе поток энергии меняется, как квадрат частоты. Если за эталон частоты взять частоту кванта, испущенного на звезде и дошедшего до данной области пространства, то поток энергии будет численно постоянным. Если же брать в каждой области пространства „местный" эталон частоты (например, частоту кванта, соответствующего тому же спектральному переходу, но испущенного в данной области, а не на звезде), то численное значение потока энергии изменится в отношении $\omega^2 : \omega_0^2$. Разумеется, в измерениях, производимых на Земле, употребляются „земные" (а не „звездные") эталоны, что соответствует второму способу рассмотрения. Выражая поэтому поток энергии и его плотность в „земных" единицах, мы должны положить**)

$$B = B_0\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \tag{95.27}$$

и

$$I = \frac{B_0\omega^2}{\omega_0^2 r^2\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4}, \tag{95.28}$$

---

*) Разумеется, величина S в (95.25) не имеет ничего общего с величиной S в (94.02).

**) Этот результат находится в согласии с выводом Ландау и Лифшица [23], полученным из других соображений.

где B_0 есть значение потока энергии в единицу телесного угла вблизи звезды; для звезд с одинаковой мощностью излучения (т. е. с одинаковой абсолютной звездной величиной) значение B_0 одно и то же. Полагая

$$I = \frac{B_0}{R^2}, \tag{95.29}$$

где R есть „расстояние", определяемое по видимой звездной величине (по яркости), мы будем иметь

$$R = \frac{\omega_0}{\omega} r \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2. \tag{95.30}$$

В этой формуле r есть расстояние, во вспомогательном галилеевом пространстве, от звезды до Земли, в системе отсчета, связанной со звездой. Выразим r через τ и τ_0. В указанной системе отсчета имеем:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad t = \tau_0: && r = 0 \quad \text{и} \quad \tau = \tau_0, \\ &\text{при} \quad t = \tau_0 + \frac{r}{c}: && r = r \quad \text{и} \quad \tau = \sqrt{\tau_0\left(\tau_0 + \frac{2r}{c}\right)}, \end{aligned} \tag{95.31}$$

откуда

$$\frac{r}{c} = \frac{\tau^2 - \tau_0^2}{2\tau_0}. \tag{95.32}$$

Подставляя это значение r в (95.30), получим

$$\frac{R}{c} = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\tau^2 - \tau_0^2}{2\tau_0} \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2. \tag{95.33}$$

Кроме того, формула (95.15) дает

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\tau}{\tau_0} \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{\tau_0}\right)^2}. \tag{95.34}$$

Значения $\frac{\omega_0}{\omega}$ и R для разных галактик связаны соотношением, которое получается из этих двух уравнений исключением величины τ_0. Чтобы удобнее произвести исключение, введем вместо τ_0 другую вспомогательную величину *) y, связанную с τ_0 соотношениями

$$y = \frac{(\tau - \tau_0)(\tau + \alpha)}{\tau(\tau_0 - \alpha)}, \tag{95.35}$$

$$\tau_0 = \frac{\tau(\tau + \alpha + \alpha y)}{\tau + \alpha + \tau y}. \tag{95.36}$$

*) Смешения этой величины y с одной из координат в (95.01) и (95.02) можно не опасаться.

Для разных галактик величина τ_0 может меняться в пределах

$$\alpha < \tau_0 \leqslant \tau, \tag{95.37}$$

сообразно чему пределы изменения для y будут

$$0 \leqslant y < \infty. \tag{95.38}$$

Подставляя значение τ_0 в формулу (95.34), получим

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{(\tau + \alpha + \tau y)(\tau + \alpha + \alpha y)}{(\tau + \alpha)^2} \tag{95.39}$$

или

$$\frac{\omega_0}{\omega} = 1 + y + \frac{\tau\alpha}{(\tau + \alpha)^2} y^2. \tag{95.40}$$

Подставляя же τ_0 из (95.36) и $\frac{\omega_0}{\omega}$ из (95.39) в формулу (95.33) для $\frac{R}{c}$, будем иметь

$$\frac{R}{c} = \frac{(\tau - \alpha)^3}{\tau(\tau + \alpha)} \left(y + \frac{1}{2} y^2\right). \tag{95.41}$$

Положим

$$h = \frac{\tau(\tau + \alpha)}{(\tau - \alpha)^3} \tag{95.42}$$

и припомним соотношение (94.52) для инвариантной плотности ρ^*, согласно которому,

$$\rho^* = \frac{3\alpha}{2\pi\gamma} \frac{\tau^3}{(\tau - \alpha)^6}. \tag{95.43}$$

Мы будем тогда иметь

$$\frac{2}{3} \pi\gamma \frac{\rho^*}{h^2} = \frac{\tau\alpha}{(\tau + \alpha)^2}. \tag{95.44}$$

Величина, обратная h, имеет размерность времени, а величина (95.44) есть отвлеченное число. Вводя эти величины (вместо τ и α) в соотношения (95.41) и (95.39), получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Rh}{c} &= y + \frac{1}{2} y^2, \\ \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} &= y + \frac{2}{3} \pi\gamma \frac{\rho^*}{h^2} y^2. \end{aligned}\right\} \tag{95.45}$$

В этих формулах заключена вся теория красного смещения.

Общий ход зависимости смещения $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega}$ от расстояния следующий.

При малых смещениях (малые y) можно считать правые части обоих уравнений (95.45) друг другу равными. Тогда будет

$$c \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = Rh, \tag{95.46}$$

и зависимость между красным смещением $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega}$ и расстоянием R будет линейной. Коэффициент пропорциональности в этой линейной зависимости может быть определен из наблюдений, причем для обратной величины h получается значение [25] порядка

$$\frac{1}{h} \sim 4 \text{ миллиарда лет} \tag{95.47}$$

(по более ранним литературным данным для $\frac{1}{h}$ получалось число порядка 2 миллиардов лет; разницу следует приписать обнаруженной неточности в оценке расстояний R). Значение (95.47) соответствует следующему значению h:

$$h = 8 \cdot 10^{-18} \text{ сек.}^{-1} \tag{95.48}$$

При больших смещениях, т. е. на очень больших расстояниях, должны сказаться и нелинейные члены в формулах (95.45). Влияние их должно проявиться в том, что смещение будет возрастать с расстоянием медленнее, чем в начале; величина h, определяемая из (95.46) по наблюдениям наиболее отдаленных галактик, должна получаться несколько меньшей, чем определяемая из наблюдений более близких галактик. При самых больших (вероятно практически недостижимых) смещениях зависимость должна вновь приблизиться к линейной, но уже с меньшим множителем пропорциональности.

В астрономии принято называть левую часть равенства (95.46) скоростью и выражать ее в километрах в секунду. Необходимо, однако, помнить, что хотя эта величина и имеет размерность скорости, она не есть скорость движения чего бы то ни было. Это видно хотя бы из того, что при $\omega < \frac{1}{2}\omega_0$ ее значение будет превышать значение скорости света. Величина $c\frac{\omega_0 - \omega}{\omega}$ не является также и допплеровской скоростью, даже если толковать все смещение как результат эффекта Допплера в галилеевом пространстве. Из обычной теории эффекта Допплера следует [см. (95.12)], что эффективной допплеровской скоростью была бы величина

$$v_{eff} = c\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 + \omega^2}, \tag{95.49}$$

которая близка к левой части (95.46), только если смещение мало́.

Формулы (95.45) являются строгими и дают зависимость смещения от расстояния при любых смещениях. Возможно, что со временем точность наблюдений возрастет настолько, что обработка их на основе этих формул даст возможность судить и о коэффициенте при y^2 во втором из уравнений (95.45). Это позволит определить из наблюдений над красным смещением не только постоянную красного смещения h (постоянную Хэббля), но и среднюю плотность ρ^*.

Пока же ρ^* оценивается весьма грубо, путем подсчета числа галактик в достаточно больших объемах пространства, в предположении, что отдельные галактики имеют ту же массу, как и наша Галактика (порядка 10^{11} масс Солнца, или $2 \cdot 10^{44}$ *г*). Такая оценка дает плотность порядка

$$\rho^* \sim 4 \cdot 10^{-29}\ г/см^3. \tag{95.50}$$

Более наглядное представление об этой плотности дает следующий подсчет. Объем земного шара равен $1{,}08332 \cdot 10^{27}$ *см*^{3}, или, кругло, 10^{27} *см*^{3}. На такой объем приходится в мировом пространстве в среднем 0,04 *г* вещества *).

Если считать известными ρ^* и h, то можно определить и значение безразмерной постоянной

$$b = \frac{8\pi\gamma\rho^*}{3h^2}. \tag{95.51}$$

Эта постоянная, с одной стороны, входит в уравнения (95.45), которые можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{Rh}{c} &= y + \frac{1}{2}y^2, \\ \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} &= y + \frac{b}{4}y^2, \end{aligned}\right\} \tag{95.52}$$

и, с другой стороны, входит в соотношение (95.44), которое дает

$$b = \frac{4\tau\alpha}{(\tau + \alpha)^2}. \tag{95.53}$$

Если взять значения

$$\left.\begin{aligned} h &= 8 \cdot 10^{-18}\ сек^{-1}; \\ \rho^* &= 4 \cdot 10^{-29}\ г/см^3; \\ \gamma &= \frac{2}{3} \cdot 10^{-7}\ см^3/(г \cdot сек^2), \end{aligned}\right\} \tag{95.54}$$

то получится

$$b = \frac{\pi}{9} \sim \frac{1}{3}. \tag{95.55}$$

Из (95.53) можно тогда определить отношение τ/α, а именно

$$\frac{\tau}{\alpha} \sim 10. \tag{95.56}$$

Отсюда и из (95.54)

$$h\tau = \frac{1{,}1}{(0{,}9)^3} \sim 1{,}50; \quad h\alpha \sim 0{,}15 \tag{95.57}$$

---

*) Подчеркнем еще раз, что величина ρ^* известна очень неточно, и ее истинное значение может отличаться от приведенного здесь во много раз.

и пользуясь значением (95.47) для $1/h$, получаем

$$\left.\begin{aligned} \tau &= 6 \cdot 10^9 \text{ лет}, \\ \alpha &= 6 \cdot 10^8 \text{ лет} \end{aligned}\right\} \qquad (95.58)$$

и по формуле (94.40)

$$T = 3{,}2 \cdot 10^9 \text{ лет}. \qquad (95.59)$$

Необходимо отметить следующее. Из формулы (95.53) отношение τ/α получается вещественным только в том случае, когда величина b меньше единицы, т. е. когда плотность ρ^*, при данном h, достаточно мала (как это, повидимому, и есть на самом деле). Значениям $b > 1$ также соответствует решение уравнений Эйнштейна, но использованные нами конформно-галилеевы координаты здесь неприменимы, так как они становятся комплексными. Правда, вместо них можно ввести другие координаты, которые будут вещественными, но получаемое при $b > 1$ выражение для ds^2 приводило бы к столь странным представлениям о свойствах пространства и времени (конечный объем, периодически меняющийся во времени, и т. п.), что едва ли можно придать ему физический смысл. Поэтому решения, соответствующего случаю $b > 1$, мы здесь не рассматриваем. (Это решение также было найдено А. А. Фридманом).

Что касается исследованного нами решения, соответствующего случаю $b < 1$ (пространство Фридмана—Лобачевского), то по поводу него можно сделать следующие замечания.

Прежде всего, неправильно видеть в нем какую-то „модель мира в целом": такая точка зрения представляется неудовлетворительной в философском отношении. Пространство Фридмана—Лобачевского может, самое большее, служить фоном для ограниченного числа галактик, подобно тому, как галилеево пространство служит фоном для объектов, подобных Солнечной системе.

Самая применимость уравнений Эйнштейна в их классическом виде к таким огромным пространствам не является столь бесспорной, как их применимость в более ограниченных масштабах. Не исключено, что для космических масштабов эти уравнения потребуют изменения или обобщения.

Из следствий, к которым приводит рассмотренное нами решение, наиболее парадоксальным является, пожалуй, относительная краткость периода времени T, протекшего с тех пор, как галактики были близки друг к другу. Это время сравнимо с возрастом земной коры, определяемым по радиоактивному распаду урана, между тем как естественно было ожидать, что „космические" масштабы времени гораздо больше „земных".

Самый же факт „разбегания" галактик, при всей его неожиданности, настолько хорошо установлен, что сомневаться в нем не приходится. Необычайно большое количество двойных звезд также говорит о том, что, возможно, не только галактики, но и звезды были в прошлом расположены гораздо гуще.

При оценке теории необходимо также иметь в виду, что она представляет успешную попытку решить упомянутый в § 94 парадокс Зелигера, возникающий при рассмотрении равномерной плотности масс в евклидовом пространстве.

Поэтому нам представляется несомненным, что изложенная здесь теория А. А. Фридмана является важным шагом в изучении пространств космических масштабов.

§ 96. Развитие теории тяготения и теории движения масс (критический обзор)

Основная работа Эйнштейна, положившая начало теории галилеева пространства и времени, вышла в свет в 1905 г. под заглавием „К электродинамике движущихся тел". В ней были впервые сопоставлены принцип постоянства скорости света и принцип относительности, согласно которому законы физики должны быть независимы от выбора инерциальной системы координат. Согласование этих двух принципов потребовало пересмотра понятий пространства и времени и привело к теории единого пространства-времени, получившей название теории относительности. Заметим, что это название еще не фигурирует в заголовке работы Эйнштейна.

Принцип относительности отражает однородность пространства-времени, однородность же математически означает наличие группы преобразований, а именно преобразований Лоренца, дающих переход от одной инерциальной системы к другой. Форма законов физики должна учитывать однородность пространства-времени. Это требование означает, что уравнения, выражающие законы физики, должны быть ковариантны по отношению к преобразованиям Лоренца. В этом заключается все содержание теории относительности Эйнштейна.

Указанное требование имеет огромное эвристическое значение, так как сильно ограничивает возможную форму законов физики. Поэтому неудивительно, что применения теории относительности необозримы и касаются всех областей физики.

В период между 1905 и 1915 гг. Эйнштейн работал над созданием своей теории тяготения. В 1916 г. была опубликована его фундаментальная работа под заглавием „Основы общей теории относительности". Заглавие это отражает точку зрения Эйнштейна на созданную им теорию тяготения — точку зрения, которую нельзя признать правильной. Как мы показали еще во Введении, теория тяготения представляет развитие теории галилеева пространства не в смысле расширения или обобщения понятия относительности, а, наоборот, в смысле ограничения этого понятия. Понятие относительности связано со свойством однородности, а этим свойством в первоначальной теории Эйнштейна обладало все пространство-время в целом.

тогда как в новой теории оно им уже не обладает или обладает только локально. Поэтому и относительность является в новой теории только локальной.

То обстоятельство, что изумительная по своей глубине, изяществу и убедительности теория тяготения не была правильно понята ее автором, не должно нас удивлять. Не должны нас также удивлять логические пробелы, или даже ошибки, допущенные автором при выводе основных уравнений теории. Мы имеем в истории физики много примеров, когда подлинный смысл принципиально новой физической теории был осознан не ее автором, а кем-нибудь другим и когда предложенный автором вывод основных уравнений теории оказывался логически несостоятельным. Достаточно указать на теорию электромагнитного поля Максвелла. Эта теория фактически покончила с представлением о механике, как основе физики, между тем как ее автор, а также Герц, так много сделавший для ее проверки, целиком придерживались механического представления. Только Лоренц с полной ясностью установил физический смысл уравнений Максвелла, указав, что электромагнитное поле само является физической реальностью (т. е. само материально), может существовать в свободном пространстве и не нуждается в особом носителе *).

Что касается убедительности вывода, то можно напомнить, что Максвелл [27] предпосылает выводу своих знаменитых уравнений изложение некоторых разделов механики и основывает самый вывод на уравнениях Лагранжа 2-го рода. Мы знаем теперь, что, с точки зрения логики, вывод уравнений Максвелла на основе механики невозможен. Но великие, да и не только великие, открытия делаются не по правилам логики, а догадкой, иначе говоря, путем творческой интуиции.

Интересно проследить, каким путем пришел Эйнштейн к своим уравнениям тяготения. Это можно сделать, используя, кроме основной работы Эйнштейна 1916 г. и его научных публикаций, также его автобиографию, изданную в 1949 г. в связи с его семидесятилетием [26].

Еще около 1908 г. Эйнштейну стало ясно, что попытки ввести тяготение в рамки теории относительности, оперирующей с галилеевым пространством, не могут иметь успеха по следующей причине. Такая теория дает зависимость *инертной* массы от внутренней (и кинетической) энергии тела, но не может дать зависимости *тяжелой* массы от энергии, если только считать уравнения гравитационного поля линейными. Между тем имеется фундаментальный факт равенства инертной и тяжелой массы, вытекающий из независимости ускорения свободно падающего тела от его состава. Этот факт был истолкован Эйнштейном в смысле локальной эквивалентности поля тяготения полю ускорения.

*) Любопытно, что этот пример неполного понимания автором теории ее физического смысла приводится самим Эйнштейном (Автобиография [26]).

Отсюда Эйнштейн заключил, что если допускать „ускоренно движущиеся системы отсчета", то поля тяготения и ускорения становятся неразличимыми. В своей автобиографии Эйнштейн пишет:

«Если считать возможными любые гравитационные поля, простирающиеся сколь угодно далеко и не ограниченные предельными условиями, то понятие инерциальной системы становится бессодержательным. Понятие „ускорения по отношению к пространству" теряет тогда всякий смысл, а с ним и принцип инерции*), причем исчезает также парадокс Маха».

Далее, из равноправности всех систем отсчета (инерциальных и неинерциальных) Эйнштейн заключает, что уравнения тяготения должны быть ковариантны по отношению к любым преобразованиям координат.

Таковы были исходные идеи Эйнштейна около 1908 г. Проанализируем их. Прежде всего, здесь неправильна основная предпосылка. Эйнштейн говорит о произвольных гравитационных полях, простирающихся сколь угодно далеко и не ограниченных предельными условиями. Но такие поля *невозможны*. Предельные или иные условия, характеризующие пространство в целом, совершенно необходимы, а поэтому и понятие „ускорение по отношению к пространству" сохраняет в той или иной форме свой смысл. Что касается парадокса Маха, то он основан, как известно, на рассмотрении вращающегося жидкого тела, имеющего форму эллипсоида, и невращающегося, имеющего форму шара. Парадокс возникает здесь только в том случае, если считать лишенным смысла понятие „вращения по отношению к пространству"; тогда действительно оба тела (вращающееся и невращающееся) представляются равноправными, и становится непонятным, почему одно из них шаровидно, а другое — нет. Но парадокс исчезает, коль скоро мы признаем законность понятия „ускорения по отношению к пространству".

Сущность той ошибки, которая сделана в основной предпосылке, состоит *в забвении строго локального характера эквивалентности полей ускорения и тяготения*. С этим связано и то, что *не локальное физическое определение ускоренно движущихся систем отсчета невозможно*, так как все ящики, жесткие каркасы и т. п., с которыми оперирует Эйнштейн, представляют идеализацию, пригодную лишь для инерциальных систем отсчета, а не для ускоренных. Поскольку отпадает основная предпосылка, из которой Эйнштейн выводит следствие о бессодержательности понятия инерциальной системы, становится необоснованным и заключение о равноправности всех систем отсчета. Но на этом заключении Эйнштейн строит свои дальнейшие рассуждения, в частности свой вывод о ковариантности искомых уравнений тяготения. Разумеется, из неправильности предпосылки не вытекает еще неправильность следствия: уравнения

*) Первый закон Ньютона (*В. Ф.*)

тяготения действительно ковариантны, но ковариантность не является их отличительным свойством, а может быть достигнута в любой теории. Так, в главе IV нашей книги ковариантным образом формулируется обычная теория относительности; интересно, что и сам Эйнштейн указывает на возможность такой формулировки [26], к чему мы вскоре вернемся.

Таким образом, на первом этапе построения теории тяготения Эйнштейн принимал за основные положения равенство инертной и тяжелой массы, принцип эквивалентности ускорения и тяготения и требование ковариантности уравнений. Идея геометрии Римана еще отсутствовала.

Требование ковариантности уравнений сыграло очень большую роль при построении теории. То обстоятельство, что Эйнштейн „выводил“ его из принципа эквивалентности, а в конечном счете из равенства инертной и тяжелой массы, показывает, что Эйнштейн в период создания своей теории считал общую ковариантность уравнений специфической особенностью теории тяготения. Это прямо сказано и во вводной части основной работы 1916 г. Впоследствии Эйнштейну было указано, что общая ковариантность уравнений еще не выражает какого-либо физического закона, и он с этим, как будто, согласился. Но согласие его было скорее формальным потому, что фактически Эйнштейн до конца своих дней связывал требование общей ковариантности с идеей некоей „общей относительности“ и с равноправием всех систем отсчета. Он так и не осознал различия между относительностью в смысле однородности пространства и относительностью в смысле возможности пользоваться любыми координатными системами *) и считал вторую относительность обобщением первой. Это проявилось и в том, что он назвал свою теорию тяготения „общей теорией относительности“ и в дальнейшем упорно придерживался этого термина и настаивал на существовании некоего „общего принципа относительности“. Это смешение понятий особенно наглядно проявляется в одном месте автобиографии Эйнштейна, где он сам формулирует „частную“ теорию относительности (т. е. такую, в которой, по Эйнштейну, нет никакой „общей относительности“) в общековариантном виде (выражающем, по Эйнштейну, идею „общей относительности“).

Таким образом, в период, непосредственно предшествовавший созданию Эйнштейном теории тяготения, идея общей ковариантности представлялась Эйнштейну физической идеей и была руководящей в его поисках.

Следующий важный шаг в создании теории был сделан тогда, когда Эйнштейн ввел обобщенное выражение для квадрата интервала, т. е. фактически ввел гипотезу о римановой геометрии пространства и времени. К идее о римановой геометрии Эйнштейн

*) См. Введение.

подошел со стороны требования общей ковариантности уравнений: он воспользовался тем, что в „абсолютном дифференциальном исчислении“ (в тензорном анализе), в то время уже хорошо разработанном Риччи, Леви-Чивита и другими авторами, уравнения с самого начала пишутся в общековариантном виде. Тем самым требование общей ковариантности сыграло важную эвристическую роль, хотя суть дела была не в нем, а *в новой гипотезе о характере геометрии* *) *пространства и времени.*

В решении вопроса о виде уравнений тяготения важным шагом было предположение Эйнштейна о том, что в качестве потенциалов тяготения следует рассматривать чисто „геометрические“ величины, а именно самые коэффициенты $g_{\mu\nu}$ в выражении для квадрата интервала, и не следует вводить никаких других величин. Благодаря этому предположению, из необозримого множества нелинейных общековариантных уравнений выделилось уравнение, определенное почти однозначным образом, причем полной однозначности можно было достигнуть при помощи некоторых дополнительных соображений (консервативность тензора массы и возможность решения, соответствующего галилееву пространству, при отсутствии масс).

Таким путем Эйнштейн пришел к своим уравнениям тяготения

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\varkappa T_{\mu\nu},$$

заключающим в себе сущность его теории и представляющим величайшее достижение человеческого гения. Эти уравнения даны в работе Эйнштейна 1916 г.

В дальнейшем Эйнштейн пытался различным образом видоизменять их, однако первоначальная их форма представляется единственно правильной. Эйнштейн стремился также найти для некоего включающего поле тяготения „универсального поля“ (Gesamtfeld) уравнения, не содержащие тензора массы; повидимому, он связывал с этим надежду создать независимую от квантовой механики теорию элементарных частиц, как особенных точек поля. Эти попытки кончились неудачей, и мы упоминаем о них только потому, что идея рассматривать вместо тензора массы особые точки поля проводилась также в работах Эйнштейна и его школы по выводу уравнений движения из уравнений тяготения.

Первыми по времени из этих работ были работы Эйнштейна и Громмера и Эйнштейна, опубликованные в 1927 г. [28, 29]. В этих работах был поставлен и принципиально решен следующий вопрос. Если рассматривать массы как особенные точки поля, то можно ли, не нарушая уравнений тяготения, наперед предписать произвольным образом движение этих особенных точек или нет? Ответ на этот вопрос получился отрицательным: оказалось, что движение особенных точек поля

*) Мы употребляем здесь слово „геометрия“ в смысле объективных свойств пространства и времени, а не в смысле науки об этих свойствах.

не может быть предписано наперед, ибо оно вытекает из уравнений тяготения. Отсюда, в частности, следует, что принцип геодезической линии не является независимым от уравнений тяготения, а следует из них. Существенно отметить, что этот результат обусловлен нелинейностью уравнений тяготения.

Несмотря на огромную важность этого результата, указанные две работы Эйнштейна были мало замечены, и прошло свыше 10 лет прежде чем они были продолжены.

Развитие идей, заложенных в работе Эйнштейна и Громмера 1927 г., началось в 1938—1939 гг. совершенно независимо по двум направлениям. К одному из этих направлений относятся работы Эйнштейна, Инфельда и их сотрудников, а к другому — работы Фока и его сотрудников; ко второму направлению можно также причислить появившиеся после 1950 г. работы Папапетру.

Рассмотрим сперва работы школы Эйнштейна.

В серии работ Эйнштейна, Инфельда и Гофмана (1938) [30], Эйнштейна и Инфельда (1940) [31] и (1949) [32] был разработан метод, позволяющий вывести из уравнений тяготения и написать в явной форме приближенный вид уравнений движения для точечных особенностей поля, соответствующих сферически симметричным телам бесконечно малых размеров. Уравнения получены как в первом (ньютоновом), так и во втором (следующем после ньютонова) приближении. При этом авторы, руководствуясь идеей Эйнштейна о нежелательности вводить тензор массы, исходили из уравнений тяготения с правой частью, равною нулю. (Впрочем, в 1954 г. Инфельд [33] показал, что выкладки становятся несравненно проще, если с самого начала ввести тензор массы с дираковскими дельта-функциями, соответствующими сферически симметричным точечным особенностям.) Пытаясь найти точное решение механической задачи о движении особенных точек поля, авторы вводили также в рассмотрение бесконечные ряды, расположенные по степеням параметра, обратно пропорционального скорости света.

Толкование результатов работ школы Эйнштейна затрудняется тем, что применяемые в работах этой школы координатные системы не фиксируются с самого начала (подобно нашей гармонической системе координат), а определяются от приближения к приближению путем различных дополнительных условий, которые вводятся иногда явно, а иногда и неявным образом. В общем можно, однако, сказать, что фактически применяемые в этих работах координатные системы настолько мало отличаются от гармонической системы координат, что это различие еще не сказывается на уравнениях движения второго приближения.

В тех случаях, когда рассматриваются приближения выше второго, возникает и другой вопрос, помимо вопроса, связанного с неопределенностью координатной системы. Представляется неясным, имеет ли получаемое формальное решение физический смысл. Сомнение это вызвано тем, что авторы указанных работ не ставят условия излучения, а, напротив, утверждают, что существуют такие (неизвестные) преобразования координат, которые приводят точные уравнения движения к ньютонову виду, соответствующему строго консервативной, не излучающей, системе.

Работа Эйнштейна и Громмера 1927 г. является также исходной точкой серии работ другого направления.

В нашей работе, опубликованной в 1939 г. [34], мы рассмотрели задачу о движении сферически симметричных невращающихся тел конечных размеров и вывели для них уравнения движения, исходя из уравнений тяготения (см. также [36]). Характерными особенностями примененного нами метода являются, с одной стороны, рассмотрение тензора массы, определяемого параллельно с потенциалами тяготения, и, с другой стороны, использование гармонических координат: наши вычисления велись так, что уравнения движения получались из условий гармоничности. Кроме того, нами были получены в явной форме потенциалы тяготения (см. §§ 82, 83 этой книги).

Принципиальное значение гармонической координатной системы отмечалось уже в нашей работе 1939 г. и обсуждалось более подробно в работе 1947 г. [35], где указывалось на связь вопроса о единственности координатной системы с вопросом о привилегированном положении гелиоцентрической системы Коперника.

В нашей работе 1939 г. уравнения движения были получены лишь в ньютоновом приближении, причем было указано, что второму приближению будет посвящена работа Петровой; последняя действительно была выполнена в 1940 г., но напечатана лишь в 1949 г. [37]. Полученные в работе Петровой уравнения движения системы конечных масс во втором приближении были использованы нами в нашей работе 1941 г. [38] об интегралах движения центра инерции.

Тем же методом Кашкаров в 1954 г. [39] вывел из уравнений тяготения уравнения движения вращающихся масс в ньютоновом приближении.

Фихтенгольц в 1950 г. [40] привел уравнения движения во втором приближении к лагранжевой форме и вывел отсюда их интегралы.

В своей работе 1951 г. [41, 42] Папапетру, независимо от Петровой, продолжил нашу работу 1939 г. и вывел из нее уравнения движения для сферически симметричных невращающихся масс во втором приближении. В выводе Папапетру есть, однако, непоследовательность, которая состоит в априорном выборе весовой функции при усреднении уравнений движения сплошной среды по области каждой массы. Сделанный этим автором в неявной форме выбор оправдывается лишь в конце вычислений, путем прямой проверки выполнения условий гармоничности.

В области теории движения масс ряд новых результатов получен в настоящей книге. О них, как и о наших результатах в других областях теории тяготения, мы здесь говорить не будем, отсылая читателя к тексту книги. Отметим только, что нами получены (для случая вращающихся масс конечных размеров) не только самые уравнения движения, но и их интегралы.

Сравнение работ школы Эйнштейна с нашими работами приводит к следующим выводам.

Во-первых, в работах школы Эйнштейна доминирует идея „общей относительности", которая приводит к отрицанию однозначности решения. Что касается координат, то даже в тех случаях, когда выбор координатной системы диктуется существом задачи (как это имеет место в задаче об изолированной системе тел), ученые этой школы стремятся сохранить неопределенными хотя бы малые добавки к координатам, не влияющие на вид уравнений движения.

Во-вторых, школа Эйнштейна объявляет тензор массы „нежелательным элементом" теории и вводит вместо него особенные точки поля. Тем самым отпадает всякая возможность рассматривать внутреннюю структуру тел и ее влияние на их движение.

В-третьих, школа Эйнштейна считает в принципе возможным в рамках механики написать „точные" уравнения движения.

С другой стороны, точка зрения, проводимая в наших работах, характеризуется следующими чертами.

Во-первых, однозначным, физически обоснованным (при помощи условий излучения) выбором решения, причем координатная система также определяется однозначно, с точностью до преобразования Лоренца.

Во-вторых, учетом внутренней структуры тел, что было бы невозможно без признания фундаментальной важности тензора массы.

Наконец, ввиду необходимости, при строгой постановке задачи о движении системы тел, включать в рассмотрение также и поле, мы считаем принципиально невозможным строгое решение этой задачи в рамках механики системы с конечным числом степеней свободы.

Возможно, что указанные различия в точках зрения обеих школ на данные конкретные вопросы не случайны, а связаны с различиями в их общих философских установках.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Попытаемся изложить в немногих словах нашу точку зрения на теорию пространства, времени и тяготения.

Во многом наша точка зрения совпадает с излагаемой обычно эйнштейновской точкой зрения, но в некоторых существенных пунктах она от нее отличается.

Пространство и время должны рассматриваться совместно. Они образуют четырехмерное многообразие, которое при отсутствии тяготения является однородным и образует галилеево пространство. Галилеево пространство обладает псевдо-евклидовой метрикой. Однородность его выражается в наличии группы преобразований Лоренца, дающих переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Со свойством однородности связано понятие относительности, и основанная на преобразованиях Лоренца теория галилеева пространства называется поэтому теорией относительности.

Физической основой теории тяготения является закон о равенстве массы инертной и массы тяжелой, а математической основой — гипотеза о том, что пространство и время обладают римановой метрикой.

Закон равенства инертной и тяжелой массы не имеет локального характера, но с ним связан имеющий чисто локальный характер принцип эквивалентности, согласно которому в данной точке и в данный момент времени поле тяготения эквивалентно некоторому полю ускорения.

„Принцип эквивалентности", строго говоря, не составляет отдельной физической гипотезы или принципа, а вытекает из риманова характера метрики. Для вывода уравнений тяготения Эйнштейна принцип эквивалентности ускорения и тяготения не нужен: эти уравнения могут быть выведены без рассмотрения ускоренно движущихся систем отсчета — понятия, не имеющего удовлетворительного определения.

В римановой геометрии можно говорить об однородности пространства только в бесконечно малом, тогда как галилеево пространство однородно в целом. А так как понятие относительности связано с однородностью, то теория тяготения не обобщает, а, наоборот, ограничивает это понятие. Поэтому нельзя называть ее „общей теорией относительности". Обобщение, внесенное теорией тяготения, касается гипотезы о характере геометрии пространства и времени, а не понятия относительности.

Риманова геометрия изучает локальные свойства пространства и, в общем случае, ничего не говорит о свойствах пространства в целом. Однако в теории тяготения локального рассмотрения недостаточно, поскольку уравнения поля являются уравнениями в частных производных, решения которых существенным образом зависят от предельных условий. Поэтому в теории тяготения необходимо вводить те или иные гипотезы о свойствах пространства в целом. Эти гипотезы обусловливают существование преимущественных систем координат. Наиболее важной из этих гипотез является предположение, что на бесконечности пространство — галилеево. При этом предположении можно подчинить потенциалы тяготения таким дополнительным условиям, при которых координатная система определяется однозначно, с точностью до преобразования Лоренца. Эта координатная система, которую мы называем гармонической, представляет большую аналогию с обычной инерциальной системой координат.

В теории тяготения, как и в других областях теоретической физики, правильная математическая постановка задачи должна обеспечивать единственность решения. Отсутствие единственности является не достоинством, а недостатком теории. Оно не может быть оправдано, а тем более не может быть возведено в принцип („общий принцип относительности").

В нашей постановке задачи об изолированной системе масс единственность решения достигается путем введения четырех дополнительных уравнений (условий гармоничности), а также предельных условий и путем перехода от локального рассмотрения к рассмотрению в целом. Таким путем достигнута единственность решения во всех рассмотренных задачах: об уравнениях движения, об излучении, о форме строгих, приближенных и асимптотических решений уравнений тяготения и др.

В случае изолированной системы тел вопрос о координатной системе решается так же, как при отсутствии тяготения: существует привилегированная система координат (галилеева или гармоническая), но возможно пользоваться и любыми другими координатными системами. Геометрический смысл последних может быть, однако, установлен лишь путем сравнения их с привилегированной системой.

Значение привилегированной системы координат заключается не только в том, что она — стандартная и позволяет сравнивать решения, получаемые разными способами. Существование привилегированной системы имеет и принципиальное значение, так как отражает объективные свойства пространства. Только признав существование привилегированной системы, можно отдать преимущество гелиоцентрической теории Солнечной системы перед геоцентрической.

При рассмотрении областей пространства, включающих в себя много галактик, понятие изолированной системы масс становится непригодным, и свойства пространства в целом должны формулироваться иначе (пространство Фридмана — Лобачевского).

Главной целью этой книги было изложение, с новой точки зрения, основ теории тяготения и решение конкретных задач. Мы надеемся, что эта книга будет способствовать правильному пониманию теории и тем самым укажет надлежащее направление для дальнейших исследований.

Добавление A

К ВЫВОДУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

В § 8 были выведены уравнения, которым должны удовлетворять функции преобразования

$$x'_i = f_i(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{A.01}$$

для того, чтобы были выполнены следующие два условия:

(а) прямолинейному и равномерному движению в координатах (x_i) должно соответствовать такое же движение в координатах (x'_i);

(б) прямолинейному и равномерному движению *со скоростью света* в координатах (x_i) должно соответствовать такое же движение в координатах (x'_i).

Условие (б) равносильно следующему условию:

(б′) уравнению фронта волны

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right] = 0 \tag{A.02}$$

в координатах (x_i) должно соответствовать такое же уравнение в координатах (x'_i).

В § 8 было показано, что функции, удовлетворяющие условию (а), должны быть решениями системы уравнений

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \psi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \psi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \tag{A.03}$$

тогда как функции, удовлетворяющие условию (б) или (б′), должны быть решениями системы уравнений

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \varphi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \varphi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - e_k \delta_{kl} \sum_{m=0}^{3} e_m \varphi_m \frac{\partial f_i}{\partial x_m}, \tag{A.04}$$

где

$$\varphi_m = \frac{\partial}{\partial x_m} \lg \sqrt{\lambda}, \tag{A.05}$$

причем уравнения (А.04) получаются в результате дифференцирования соотношений

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = \lambda e_k \delta_{kl}\,. \tag{А.06}$$

Мы видели, что при одновременном наложении обоих условий (а) и (б) или же (а) и (б′) получается

$$\psi_l = \varphi_l = 0, \tag{А.07}$$

а тогда уравнения (А.03) и (А.04) приводятся к равенству нулю всех вторых производных от функций f_i, т. е. к линейности этих функций. Величина λ будет вследствие (А.05) и (А.07) постоянной (масштабный множитель). Как показано в § 9, масштабный множитель λ можно положить равным единице, после чего соотношения (А.06) приводят, в силу линейности функций f_i, к преобразованию Лоренца.

Мы должны теперь исследовать, что вытекает из условия (а) в отдельности и из условия (б) или (б′) в отдельности.

Как уравнения (А.03), так и уравнения (А.04) могут быть написаны в виде

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\, \partial x_l} = \sum_{r=0}^{3} \Gamma^r_{kl} \frac{\partial f_i}{\partial x_r}, \tag{А.08}$$

где в случае (А.03)

$$\Gamma^r_{kl} = \psi_l \delta_{rk} + \psi_k \delta_{rl} \tag{А.09}$$

и в случае (А.04)

$$\Gamma^r_{kl} = \varphi_l \delta_{rk} + \varphi_k \delta_{rl} - e_r e_k \varphi_r \delta_{kl}. \tag{А.10}$$

[В § 8 величины (А.09) обозначались символом Δ^r_{kl}.]

Уравнения вида (А.08) подробно исследованы в § 42, где дано необходимое и достаточное условие их полной интегрируемости. Это условие имеет вид:

$$\frac{\partial \Gamma^m_{kl}}{\partial x_n} - \frac{\partial \Gamma^m_{kn}}{\partial x_l} + \sum_{r=0}^{3} (\Gamma^r_{kl}\Gamma^m_{rn} - \Gamma^r_{kn}\Gamma^m_{rl}) = 0. \tag{А.11}$$

Оно выводится из требования, чтобы получаемые путем дифференцирования (А.08) различные выражения для третьих производных от f_i были друг другу равны.

Подставляя в (А.11) выражение (А.09), получаем:

$$\left(\frac{\partial \psi_l}{\partial x_n} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l}\right)\delta_{mk} + \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} - \psi_k \psi_n\right)\delta_{ml} - \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} - \psi_k \psi_l\right)\delta_{mn} = 0. \tag{А.12}$$

Полагая здесь $k \neq m$; $l \neq m$, но $n = m$, получаем

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} - \psi_k \psi_l = 0. \tag{А.13}$$

Так как в (А.12) значок m может иметь любое значение, то ограничение $k \neq m$, $l \neq m$ несущественно, и равенство (А.13) должно иметь место при всех значениях k и l. Очевидно, что это равенство является также и достаточным для выполнения (А.12). В самом деле, из него следует

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \psi_l}{\partial x_k}, \tag{A.14}$$

и первый член в (А.12) также обращается в нуль.

Подставим теперь в (А.11) выражение (А.10). Вследствие (А.05) мы можем положить

$$\varphi_{kl} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k} = \varphi_{lk}. \tag{A.15}$$

Вычисляя левую часть (А.11), мы получим, после умножения на e_m

$$\begin{aligned}(\varphi_{kn} - \varphi_k\varphi_n)\, e_m\delta_{lm} - (\varphi_{kl} - \varphi_k\varphi_l)\, e_m\delta_{nm} + \\ + (\varphi_{lm} - \varphi_l\varphi_m)\, e_k\delta_{kn} - (\varphi_{mn} - \varphi_m\varphi_n)\, e_k\delta_{kl} + \\ + e_k e_m (\delta_{kn}\delta_{lm} - \delta_{kl}\delta_{nm}) \sum_{r=0}^{3} e_r\varphi_r^2 = 0.\end{aligned} \tag{A.16}$$

Положив

$$\Phi_{kl} = \varphi_{kl} - \varphi_k\varphi_l + \frac{1}{2} e_k\delta_{kl} \sum_{r=0}^{3} e_r\varphi_r^2, \tag{A.17}$$

мы можем равенство (А.16) написать в виде

$$\Phi_{kn}e_m\delta_{lm} - \Phi_{kl}e_m\delta_{nm} + \Phi_{lm}e_k\delta_{kn} - \Phi_{mn}e_k\delta_{kl} = 0. \tag{A.18}$$

Отсюда нетрудно вывести, что должно быть

$$\Phi_{kl} = 0. \tag{A.19}$$

В самом деле, умножая левую часть (А.18) на $-e_m$, полагая $m = n$ и суммируя по m, получаем:

$$2\Phi_{kl} + e_k\delta_{kl} \sum_{m=0}^{3} e_m\Phi_{mm} = 0. \tag{A.20}$$

Умножая левую часть (А.20) на e_k, полагая $k = l$ и суммируя по k, получаем, по сокращении на числовой множитель 6:

$$\sum_{m=0}^{3} e_m\Phi_{mm} = 0. \tag{A.21}$$

Таким образом, условием интегрируемости уравнений (А.03) являются равенства (А.13), а условием интегрируемости уравнений (А.04) являются равенства (А.19). Вследствие (А.14) и (А.15) мы можем положить

$$\psi_k = \frac{\partial \psi}{\partial x_k}; \quad \varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \tag{A.22}$$

где ψ и φ — некоторые неизвестные функции [вследствие (А.05) мы можем считать, что $\varphi = \lg \sqrt{\lambda}$]. Условия интегрируемости напишутся тогда

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_l} = 0, \tag{A.23}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} + \frac{1}{2} e_k \delta_{kl} \sum_{r=0}^{3} e_r \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\right)^2 = 0. \tag{A.24}$$

Полагая здесь

$$e^{-\psi} = w; \quad \psi = -\lg w, \tag{A.25}$$

а также

$$e^{-\varphi} = u; \quad \varphi = -\lg u, \tag{A.26}$$

получим для новых неизвестных функций уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \tag{A.27}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} e_k \delta_{kl} \cdot \frac{1}{u} \sum_{r=0}^{3} e_r \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2. \tag{A.28}$$

Уравнение (А.27) показывает, что w есть линейная функция от координат

$$w = w(0) + w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \tag{A.29}$$

и что, следовательно,

$$\psi_k = -\frac{w_k}{w}, \tag{A.30}$$

где w_k — постоянные. Подставляя эти значения ψ_k в уравнение (А.03) для f_i, можем написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 (w f_i)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \tag{A.31}$$

откуда следует, что величины $w f_i$ являются линейными функциями. Это значит, что четыре функции f_0, f_1, f_2, f_3 являются дробно-линейными функциями с одним и тем же знаменателем w.

Мы приходим к следующему выводу. Самый общий вид преобразования (А.01), удовлетворяющего условию (а), есть преобразование при помощи дробно-линейных функций с одним и тем же знаменателем. В том частном случае, когда знаменатель приводится к постоянной, дробные функции приводятся к целым.

Обратимся теперь к исследованию уравнения (А.28), вытекающего из условия (б) или (б′). Прежде всего заметим, что при $k \neq l$ правая часть его обращается в нуль. Следовательно, вторые производные от u по разным переменным равны нулю, и функция u составлена аддитивно из функций от одной переменной. С другой стороны, из

(А.28) следует, что вторые производные от u, взятые по одной и той же переменной, с точностью до знака друг другу равны, а именно:

$$e_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = e_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = e_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = e_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{А.32}$$

Но каждая из величин (А.32) может зависеть, самое большее, от одной (своей) переменной. Следовательно, все они равны одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через $2C$, будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 2Ce_k; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \qquad (k \neq l) \tag{А.33}$$

и, кроме того,

$$\sum_{r=0}^{3} e_r \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2 = 4Cu. \tag{А.34}$$

Из равенств (А.33) следует, что функция u будет вида

$$u = C \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + B, \tag{А.35}$$

где α_k и B — постоянные. Формула же (А.34) дает лишь соотношение между постоянными, а именно:

$$BC = \sum_{r=0}^{3} e_r \alpha_r^2. \tag{А.36}$$

Согласно (А.05) и (А.26), множитель λ в соотношениях (А.06) обратно пропорционален u^2. Мы можем положить

$$\sum_i e_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = \frac{1}{u^2} e_k \delta_{kl}. \tag{А.37}$$

Без нарушения общности мы можем считать, что в начале координат, т. е. при $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, будет $u = 1$; этого можно всегда достигнуть изменением масштаба для f_i или для x_k. При таком условии будет

$$B = 1; \quad C = \sum_{r=0}^{3} e_r \alpha_r^2 \tag{А.38}$$

и следовательно

$$u = 1 - 2 \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k^2 \sum_{l=0}^{3} e_l x_l^2. \tag{А.39}$$

Заменяя в (А.04) величины φ_k их выражениями

$$\varphi_k = -\frac{u_k}{u}; \quad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \tag{А.40}$$

будем иметь

$$u\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}+u_k\frac{\partial f_i}{\partial x_l}+u_l\frac{\partial f_i}{\partial x_k}=e_k\delta_{kl}\sum_{m=0}^{3}e_m u_m\frac{\partial f_i}{\partial x_m}. \qquad (A.41)$$

Если u имеет вид (А.39), то условия интегрируемости системы (А.41) будут выполнены, и функции f_i вполне определяются значениями их и их первых производных в начале координат. Пусть эти значения равны

$$(f_i)_0=a_i;\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_0=e_k a_{ik}. \qquad (A.42)$$

Так как в начале координат $u=1$, то уравнение (А.37) дает

$$\sum_{i=0}^{3}e_i a_{ik}a_{il}=e_k\delta_{kl}. \qquad (A.43)$$

Положим теперь

$$f_i=a_i+\sum_{r=0}^{3}e_r a_{ir}f_r^*. \qquad (A.44)$$

Вследствие (А.43) эти уравнения могут быть решены относительно функций f_r^*, которые выражаются линейным образом через f_i. Очевидно, что функции f_r^* удовлетворяют той же системе дифференциальных уравнений, как и f_i; для системы (А.41) это вытекает из линейности уравнений; для системы (А.37) это вытекает из соотношений (А.43). Но начальные условия для f_r^* будут вида

$$(f_r^*)_0=0;\quad \left(\frac{\partial f_r^*}{\partial x_k}\right)_0=\delta_{rk}. \qquad (A.45)$$

Таким образом, найдя решение системы (А.41) с начальными условиями частного вида (А.45), мы получим по формуле (А.44) самое общее решение этой системы.

Систему (А.41) можно написать в виде

$$\frac{\partial^2(uf_i^*)}{\partial x_k\partial x_l}=f_i^*\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_l}+e_k\delta_{kl}\sum_{m=0}^{3}e_m u_m\frac{\partial f_i^*}{\partial x_m} \qquad (A.46)$$

и вследствие (А.33)

$$\frac{\partial^2(uf_i^*)}{\partial x_k\partial x_l}=e_k\delta_{kl}\left(2Cf_i^*+\sum_{m=0}^{3}e_m u_m\frac{\partial f_i^*}{\partial x_m}\right). \qquad (A.47)$$

Положим здесь

$$f_i^*=\frac{F_i}{u}. \qquad (A.48)$$

Используя (А.34), мы получим

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial x_l} = e_k \delta_{kl} \cdot \frac{1}{u}\left(-2CF_i + \sum_{m=0}^{3} e_m u_m \frac{\partial F_i}{\partial x_m}\right). \tag{A.49}$$

Рассуждая так же, как при исследовании уравнения (А.28), получаем

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial x_l} = 2C_i e_k \delta_{kl}, \tag{A.50}$$

причем

$$-2CF_i + \sum_{m=0}^{3} e_m u_m \frac{\partial F_i}{\partial x_m} = 2C_i u. \tag{A.51}$$

Из (А.48) легко видеть, что начальные условия (А.45) для f_i^* приводят к условиям того же вида для F_i. Уравнения (А.50) вместе с начальными условиями дают

$$F_i = C_i \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2 + x_i. \tag{A.52}$$

Подстановка (А.52) в (А.51) позволяет определить значения постоянных C_i, а именно

$$C_i = -\alpha_i. \tag{A.53}$$

С этими значениями постоянных уравнения (А.51) приводятся к тождеству. Следовательно, мы имеем

$$F_i = x_i - \alpha_i \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2 \tag{A.54}$$

и

$$f_i^* = \frac{x_i - \alpha_i \sum\limits_{k=0}^{3} e_k x_k^2}{1 - 2\sum\limits_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + \sum\limits_{k=0}^{3} e_k \alpha_k^2 \sum\limits_{l=0}^{3} e_l x_l^2}. \tag{A.55}$$

Мы приходим к следующему окончательному выводу.

Самый общий вид преобразования (А.01), удовлетворяющего условию (б) или (б′), получается из преобразования

$$x_i^* = \frac{x_i - \alpha_i \sum\limits_{k=0}^{3} e_k x_k^2}{1 - 2\sum\limits_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + \sum\limits_{k=0}^{3} e_k \alpha_k^2 \sum\limits_{l=0}^{3} e_l x_l^2} \tag{A.56}$$

в соединении с преобразованием

$$x'_i = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} \overset{*}{x}_k, \tag{A.57}$$

где коэффициенты a_{ik} удовлетворяют условиям (А.43). Кроме того, возможно изменение масштаба.

Преобразование (А.57) есть обычное преобразование Лоренца. Преобразование же (А.56) носит название преобразования Мебиуса. Оно обладает многими замечательными свойствами, на которых мы, однако, останавливаться не будем.

Для нас важно отметить, что требование сохранения вида уравнения фронта волны [условие (б′)] само по себе еще не приводит к преобразованию Лоренца, так как допускает еще преобразование Мебиуса. Чтобы освободиться от преобразования Мебиуса, можно дополнительно потребовать, чтобы конечным значениям первоначальных координат соответствовали конечные значения преобразованных координат. Это дополнительное требование выполняется только если все постоянные α_k в преобразовании Мебиуса равны нулю, в результате чего оно приводится к тождеству. Вместо этого дополнительного требования можно принять другое, а именно наложить условие сохранения прямолинейности и равномерности движения [условие (а)]; мы так и поступали в тексте. Каждое из этих дополнительных требований приводит однозначно к преобразованию Лоренца (и к возможному изменению масштаба).

Существенно также, что требование конечности координат относится ко всему пространству-времени в целом, тогда как условие сохранения прямолинейности и равномерности движения является строго локальным *).

*) Рассуждения и выводы этого Добавления примыкают к результатам Вейля [7].

Добавление Б

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕНЗОРА ЭЙНШТЕЙНА

а) Преобразование тензора кривизны второго ранга *). Мы начнем с преобразования ковариантного тензора кривизны второго ранга $R_{\mu\nu}$ и покажем, что в нем можно выделить члены, содержащие оператор Даламбера от одноименной компоненты $g_{\mu\nu}$ фундаментального тензора.

По определению мы имеем

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\,\beta\nu}, \tag{Б.01}$$

где, согласно (44.08), тензор кривизны четвертого ранга равен

$$R_{\mu\alpha,\,\beta\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha}\right) - \\ - g_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + g_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \tag{Б.02}$$

[эта формула отличается от (44.08) только наименованием значков]. Следовательно,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\beta} - \\ - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha} - g^{\alpha\beta} g_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma_\rho. \tag{Б.03}$$

Мы положили здесь для краткости

$$\Gamma_\rho = g_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma, \tag{Б.04}$$

где, в соответствии с обозначением (41.15),

$$\Gamma^\sigma = g^{\alpha\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}. \tag{Б.05}$$

В формуле (Б.03) первый член уже имеет вид оператора Даламбера от $g_{\mu\nu}$. Остальные члены могут быть преобразованы так, что вторые

*) См. также работы де Дондера [16] и Ланчоса [17].

производные от фундаментального тензора будут входить только через посредство первых производных от величин Γ_ρ. Для выполнения преобразования нам понадобятся формулы:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\lg(-g)=g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}, \tag{Б.06}$$

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu}=-g_{\alpha\nu}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}, \tag{Б.07}$$

$$\Gamma^\alpha=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\right), \tag{Б.08}$$

уже выведенные нами в § 41. Из этих формул следует

$$\Gamma_\nu=g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\beta}-\frac{1}{2}\frac{\partial\lg(-g)}{\partial x_\nu}. \tag{Б.09}$$

Дифференцируя (Б.06) по x_ν, получим

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}=\frac{\partial^2\lg(-g)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \tag{Б.10}$$

Заметим, что вследствие симметрии выражения (Б.10) относительно μ и ν, мы имеем

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}=\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}. \tag{Б.11}$$

Дифференцируя выражение (Б.09) по x_μ, будем иметь

$$-g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\beta}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lg(-g)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\frac{\partial\Gamma_\nu}{\partial x_\mu}+\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}. \tag{Б.12}$$

В последнем члене правой части мы можем заменить величину $\dfrac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}$ на

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha}\right)=\Gamma_{\nu,\alpha\beta}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}, \tag{Б.13}$$

где $\Gamma_{\nu,\alpha\beta}$ — обычные скобки Кристоффеля первого рода (38.28). Формула (Б.12) напишется тогда

$$-g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\beta}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lg(-g)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\frac{\partial\Gamma_\nu}{\partial x_\mu}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}+\Gamma_{\nu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \tag{Б.14}$$

Переставляя здесь значки μ и ν (а также значки суммирования α и β в левой части), можем написать

$$-g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lg(-g)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\frac{\partial\Gamma_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}+\Gamma_{\mu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}. \tag{Б.15}$$

Таким образом, входящая в (Б.03) $\left(\text{с множителем } \frac{1}{2}\right)$ сумма выражений (Б.10), (Б.14) и (Б.15) равна

$$g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x_\nu}\right) + \Gamma_{\nu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \Gamma_{\mu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} \tag{Б.16}$$

вследствие (Б.11) остальные члены здесь сокращаются].

Введем обозначение

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu}\right) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma_\rho. \tag{Б.17}$$

Величина $\Gamma_{\mu\nu}$ составлена по аналогии с полусуммой ковариантных производных от вектора, хотя Γ_ν не есть вектор. Вследствие (Б.16) выражение (Б.03) для $R_{\mu\nu}$ напишется тогда:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma_{\mu\nu} +$$

$$+ \frac{1}{2}\Gamma_{\nu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\Gamma_{\mu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma,\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}. \tag{Б.18}$$

Для упрощения выкладок, связанных с преобразованием членов с первыми производными, мы будем пользоваться не только обозначениями $\Gamma_{\nu,\alpha\beta}$ и $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ для обычных скобок Кристоффеля, но и обозначениями

$$\Gamma^{\alpha\beta}_\mu = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Gamma_{\mu,\rho\sigma} \tag{Б.19}$$

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\rho\sigma} \tag{Б.20}$$

для соответствующих величин с поднятыми значками. Заметим, что величина $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ равна

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\rho}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} - g^{\alpha\rho}\frac{\partial g^{\beta\mu}}{\partial x_\rho} - g^{\beta\rho}\frac{\partial g^{\alpha\mu}}{\partial x_\rho}\right). \tag{Б.21}$$

Рассмотрим выражение

$$A_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma,\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}, \tag{Б.22}$$

последний член которого совпадает с последним членом в (Б.18). Написав его в виде

$$A_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{\sigma,\mu\beta}\Gamma_{\rho,\nu\alpha}\right), \tag{Б.23}$$

подставим сюда

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta} = \Gamma_{\sigma,\mu\beta} + \Gamma_{\mu,\sigma\beta}. \tag{Б.24}$$

и затем воспользуемся равенством

$$\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{\rho,\,\nu\alpha} = \Gamma_{\nu,\,\rho\alpha}. \qquad (Б.25)$$

Мы получим тогда

$$A_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma}\left(\Gamma_{\sigma,\,\mu\beta}\Gamma_{\nu,\,\rho\alpha} + \Gamma_{\mu,\,\sigma\beta}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (Б.26)$$

Применяя обозначение (Б.19) и переименовывая значки, можем написать:

$$A_{\mu\nu} = \Gamma_\nu^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha,\,\mu\beta} + \Gamma_\mu^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}. \qquad (Б.27)$$

Так как коэффициент $\Gamma_\nu^{\alpha\beta}$ здесь симметричен относительно α и β, мы можем множитель при нем заменить его симметричной частью, которая равна $\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}$. По той же причине мы можем заменить $\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}$ выражением (Б.13). Сделав это, получим

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Gamma_\nu^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\Gamma_\mu^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \Gamma_\mu^{\alpha\beta}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}. \qquad (Б.28)$$

Но, как легко проверить,

$$\Gamma_\nu^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} = -\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \qquad (Б.29)$$

Поэтому

$$A_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2}\Gamma_{\mu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \Gamma_\mu^{\alpha\beta}\Gamma_{\nu,\alpha\beta}. \qquad (Б.30)$$

Приравнивая выражения (Б.22) и (Б.30) для $A_{\mu\nu}$, получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\Gamma_{\mu,\,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma,\,\mu\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} =$$
$$= \Gamma_\mu^{\alpha\beta}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha}, \qquad (Б.31)$$

которое позволяет написать выражение для $R_{\mu\nu}$ в следующем окончательном виде:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - \Gamma_{\mu\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma_\mu^{\alpha\beta}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}. \qquad (Б.32)$$

Отсюда уже легко получить формулу для контравариантных составляющих тензора кривизны второго ранга.

Дифференцируя соотношения вида (Б.07), нетрудно вывести формулу

$$g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\frac{\partial^2 g^{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = -\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} + g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (Б.33)$$

Используя эту формулу, можно написать $R_{\mu\nu}$ в виде:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma_{\mu\nu} + \Gamma_\mu^{\alpha\beta} \Gamma_{\nu,\alpha\beta}. \tag{Б.34}$$

Поднимая затем значки μ и ν, получаем для $R^{\mu\nu}$ следующее простое выражение:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu. \tag{Б.35}$$

Величина $\Gamma^{\mu\nu}$ получается из $\Gamma_{\mu\nu}$ поднятием значков по формуле

$$\Gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \Gamma_{\rho\sigma} \tag{Б.36}$$

и может быть выражена непосредственно через величины Γ^α, определяемые формулой (Б.08), а именно:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \Gamma^\alpha\right). \tag{Б.37}$$

б) Преобразование инварианта. Составим теперь инвариант тензора кривизны

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}. \tag{Б.38}$$

Мы имеем

$$R = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma + \Gamma_\nu^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu, \tag{Б.39}$$

где через Γ обозначена величина

$$\Gamma = g_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu}. \tag{Б.40}$$

Используя формулу

$$\frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\alpha} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}, \tag{Б.41}$$

мы получим из (Б.37)

$$\Gamma = \frac{\partial \Gamma^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\alpha} \Gamma^\alpha \tag{Б.42}$$

и вследствие (41.16)

$$\Gamma = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial^2(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{Б.43}$$

Дифференцируя формулу (Б.41) по x_β, мы получим аналогично (Б.10):

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{Б.44}$$

Подставляя (Б.44) в (Б.39), будем иметь:

$$R = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma + \Gamma_\nu^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{Б.45}$$

Мы видим, что вторые производные от фундаментального тензора входят в выражение для R только через посредство вторых производных от $\lg(-g)$, а также через посредство величины Γ. Члены с первыми производными можно преобразовать при помощи соотношения

$$\Gamma_{\nu}^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}=\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}, \tag{Б.46}$$

которое легко выводится из формулы

$$\Gamma_{\nu}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}-\frac{1}{2}g_{\rho\nu}\left(g^{\sigma\beta}\frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x_{\sigma}}+g^{\sigma\alpha}\frac{\partial g^{\rho\beta}}{\partial x_{\sigma}}\right). \tag{Б.47}$$

В результате получается

$$R=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^{2}\lg(-g)}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}-\Gamma+\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}. \tag{Б.48}$$

Это выражение можно написать в виде

$$R=g^{\alpha\beta}\frac{\partial^{2}\lg\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}-\Gamma^{\alpha}\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}}-\Gamma-L, \tag{Б.49}$$

где

$$L=-\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}-\Gamma^{\alpha}\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}}. \tag{Б.50}$$

Припоминая формулу

$$\Box y=g^{\alpha\beta}\frac{\partial^{2}y}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}-\Gamma^{\alpha}\frac{\partial y}{\partial x_{\alpha}} \tag{Б.51}$$

для оператора Даламбера от некоторой функции y, мы можем написать

$$R=\Box\left(\lg\sqrt{-g}\right)-\Gamma-L. \tag{Б.52}$$

Разумеется, величина $y=\lg\sqrt{-g}$ не есть скаляр, но формально оператор (Б.51) может быть применен и к ней. Заметим, что как первый, так и второй член в (Б.52) представляют деленную на $\sqrt{-g}$ сумму производных от некоторых величин по координатам. Это обстоятельство имеет значение при формулировке вариационного начала для уравнений Эйнштейна, причем определяемая формулой (Б.50) величина L играет роль функции Лагранжа.

Функция Лагранжа L может быть написана, помимо (Б.50), в различных других видах, из которых укажем следующие:

$$L=\frac{1}{2}\Gamma^{\nu,\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}-\Gamma^{\alpha}\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}}, \tag{Б.53}$$

а также

$$L=g^{\mu\nu}\left(\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}-\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}\right). \tag{Б.54}$$

Последняя форма наиболее часто встречается в литературе.

в) Преобразование тензора Эйнштейна. Предыдущие формулы позволяют написать выражение для тензора Эйнштейна

$$G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R, \tag{Б.55}$$

расходимость которого равна нулю. При этом окажется, что вторые производные от фундаментального тензора входят в $G^{\mu\nu}$ только через посредство вторых производных от величины $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ и через посредство первых производных от Γ^{ν}. Поэтому удобно ввести особое обозначение для умноженных на $\sqrt{-g}$ контравариантных компонент фундаментального тензора.

Мы положим

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}=\sqrt{-g}g^{\mu\nu}. \tag{Б.56}$$

Формула (41.16) напишется тогда:

$$\Gamma^{\nu}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}}. \tag{Б.57}$$

Для дальнейшего удобно преобразовать все формулы так, чтобы в них входили только производные от величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. При выполнении преобразования в наши формулы войдут производные от величины

$$y=\lg\sqrt{-g}, \tag{Б.58}$$

которые мы будем обозначать через

$$y_{\alpha}=\frac{\partial\lg\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}}. \tag{Б.59}$$

Согласно (41.07), мы имеем

$$y_{\alpha}=\Gamma^{\nu}_{\alpha\nu}. \tag{Б.60}$$

Для величин, получающихся из y_{α} путем поднятия значков, мы введем обозначение

$$y^{\alpha}=g^{\alpha\beta}y_{\beta}, \tag{Б.61}$$

аналогичное тензорному (хотя, конечно, y^{α} не есть вектор). Мы имеем также

$$y^{\alpha}=\Gamma^{\alpha\beta}_{\beta}, \tag{Б.62}$$

где $\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu}$ имеет значение (Б.19). Вторые производные от y мы будем обозначать через $y_{\alpha\beta}$:

$$y_{\alpha\beta}=\frac{\partial^{2}\lg\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}. \tag{Б.63}$$

Согласно формуле (Б.21), величины $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ представляют билинейные функции от составляющих $g^{\mu\nu}$ и от их первых производных

Подставляя в эту формулу выражения для $g^{\mu\nu}$ через $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, мы получим

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = \Pi^{\mu,\alpha\beta} + \Delta^{\mu,\alpha\beta}, \tag{Б.64}$$

где

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2g}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\rho} + \mathfrak{g}^{\beta\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\rho} - \mathfrak{g}^{\mu\rho}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho}\right), \tag{Б.65}$$

$$\Delta^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(y^\alpha g^{\mu\beta} + y^\beta g^{\mu\alpha} - y^\mu g^{\alpha\beta}). \tag{Б.66}$$

Соответствующие величины с опущенными значками мы будем обозначать через $\Pi^\mu_{\alpha\beta}$ и $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$.

Вычислим определитель, составленный из $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$

$$\mathrm{Det}\,\mathfrak{g}^{\mu\nu} = (\sqrt{-g})^4\,\mathrm{Det}\,g^{\mu\nu} = g^2\cdot\frac{1}{g} = g. \tag{Б.67}$$

Таким образом, определитель, составленный из $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, равен определителю, составленному из $g_{\mu\nu}$:

$$\mathrm{Det}\,\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \mathrm{Det}\,g_{\mu\nu} = g. \tag{Б.68}$$

Из формулы (Б.66) получаем

$$g_{\alpha\beta}\Delta^{\mu,\alpha\beta} = -y^\mu, \tag{Б.69}$$

а так как

$$g_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = \Gamma^\mu, \tag{Б.70}$$

то

$$g_{\alpha\beta}\Pi^{\mu,\alpha\beta} = \Gamma^\mu + y^\mu. \tag{Б.71}$$

Последнее выражение равно также

$$\Gamma^\mu + y^\mu = -\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}. \tag{Б.72}$$

Переходим к преобразованию тензора Эйнштейна

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R. \tag{Б.55}$$

Исходными формулами являются здесь

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}, \tag{Б.35}$$

а также формула (Б.49) для R, которую мы напишем в виде

$$R = g^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha y_\alpha - \Gamma - L. \tag{Б.73}$$

Вторая производная от величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ равна

$$\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = \sqrt{-g}\left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} + y_\beta\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + y_\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + y_{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + y_\alpha y_\beta g^{\mu\nu}\right) \tag{Б.74}$$

и, следовательно,

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=\sqrt{-g}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+2y^\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}+g^{\mu\nu}y_\alpha y^\alpha\right). \tag{Б.75}$$

С другой стороны, мы имеем

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha y_\alpha+\Gamma+L)-\Gamma^{\mu\nu}+\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}. \tag{Б.76}$$

Из сравнения последних двух формул мы видим, что, если не считать членов Γ и $\Gamma^{\mu\nu}$, в них входят одни и те же комбинации вторых производных. Вычисление дает:

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+$$
$$+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(y_\alpha y^\alpha+\Gamma^\alpha y_\alpha+\Gamma+L)-\Gamma^{\mu\nu}+y^\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}. \tag{Б.77}$$

Как всегда, наиболее сложным является преобразование членов с первыми производными. Мы имеем:

$$\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}=\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}+\Lambda^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}+\Lambda^{\nu,\,\alpha\beta}\Pi^\mu_{\alpha\beta}+\Lambda^{\mu,\,\alpha\beta}\Lambda^\nu_{\alpha\beta}. \tag{Б.78}$$

Используя (Б.71), получаем:

$$\Lambda^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}+\Lambda^{\nu,\,\alpha\beta}\Pi^\mu_{\alpha\beta}=y_\rho(\Pi^{\nu,\,\mu\rho}+\Pi^{\mu,\,\nu\rho})-\frac{1}{2}(y^\mu\Gamma^\nu+y^\nu\Gamma^\mu)-y^\mu y^\nu, \tag{Б.79}$$

и, вследствие

$$\Pi^{\nu,\,\mu\rho}+\Pi^{\mu,\,\nu\rho}=\frac{1}{g}\mathfrak{g}^{\alpha\rho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=-g^{\alpha\rho}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}-g^{\mu\nu}y^\rho, \tag{Б.80}$$

$$\Lambda^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}+\Lambda^{\nu,\,\alpha\beta}\Pi^\mu_{\alpha\beta}=$$
$$=-y^\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}-g^{\mu\nu}y_\alpha y^\alpha-\frac{1}{2}(y^\mu\Gamma^\nu+y^\nu\Gamma^\mu)-y^\mu y^\nu. \tag{Б.81}$$

Далее

$$\Lambda^{\mu,\,\alpha\beta}\Lambda^\nu_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}y^\mu y^\nu+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}y_\alpha y^\alpha. \tag{Б.82}$$

Отсюда

$$\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}=\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}-y^\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}-$$
$$-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}y_\alpha y^\alpha-\frac{1}{2}y^\mu y^\nu-\frac{1}{2}(y^\mu\Gamma^\nu+y^\nu\Gamma^\mu). \tag{Б.83}$$

Это соотношение позволяет переписать формулу (Б.77) в виде

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}y^\mu y^\nu+$$
$$+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}L+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha y_\alpha+\Gamma)-\Gamma^{\mu\nu}-\frac{1}{2}(y^\mu\Gamma^\nu+y^\nu\Gamma^\mu). \tag{Б.84}$$

Положим здесь

$$B^{\mu\nu}=\Gamma^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(y^{\mu}\Gamma^{\nu}+y^{\nu}\Gamma^{\mu}), \tag{Б.85}$$

$$B=g_{\mu\nu}B^{\mu\nu}=\Gamma+\Gamma^{\alpha}y_{\alpha} \tag{Б.86}$$

и выразим в члене с оператором Даламбера величины $g^{\alpha\beta}$ через $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$. Тогда формула для тензора Эйнштейна напишется:

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=\frac{1}{2g}\,\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}\,\partial x_{\beta}}+$$
$$+\Pi^{\mu,\,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}y^{\mu}y^{\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}L+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}B-B^{\mu\nu}. \tag{Б.87}$$

Поскольку определитель g выражается, согласно (Б.68), непосредственно через $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, можно считать, что в формуле (Б.87) все члены, кроме L, выражены через величины $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ и их производные. Нам остается выразить через те же величины также и функцию Лагранжа L.

По определению (Б.50) мы имеем:

$$L=-\frac{1}{2}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}-\Gamma^{\alpha}y_{\alpha}. \tag{Б.88}$$

Подставим сюда

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}+\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}, \tag{Б.89}$$

где, согласно (Б.66),

$$\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(y_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}+y_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}-y^{\nu}g_{\alpha\beta}). \tag{Б.90}$$

Пользуясь формулой

$$\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}=-\Gamma^{\alpha}y_{\alpha}, \tag{Б.91}$$

легко выводимой из (Б.90), получим

$$L=-\frac{1}{2}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}-\frac{1}{2}\Gamma^{\alpha}y_{\alpha}. \tag{Б.92}$$

Выразив здесь $\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}$ через

$$\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}=\sqrt{-g}\left(\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}+g^{\alpha\beta}y_{\nu}\right) \tag{Б.93}$$

и используя формулу (Б.71), которую можно написать в виде

$$g^{\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\nu}+y^{\nu}, \tag{Б.94}$$

получаем окончательно:

$$L=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}+\frac{1}{2}y_{\nu}y^{\nu}. \tag{Б.95}$$

Здесь под знаком производной стоят уже только величины $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$.

Добавление В

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДАЛАМБЕРА

Обобщенное волновое уравнение (уравнение Даламбера) имеет вид:

$$\Box \psi = 0, \tag{B.01}$$

где $\Box \psi$ есть выражение

$$\Box \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x_\beta}\right), \tag{B.02}$$

в котором величины $g^{\alpha\beta}$ и g имеют обычные значения.

Задача Коши для уравнения (B.01) состоит в определении функции ψ по заданным на некоторой гиперповерхности

$$\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = \text{const} \tag{B.03}$$

значениям ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial x_0}$. Мы предполагаем, что уравнение гиперповерхности (B.03) может быть решено относительно x_0 и что поэтому

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_0} \neq 0. \tag{B.04}$$

Нас интересует возможность решения задачи Коши в некоторой области, достаточно близкой к гиперповерхности (B.03). Чтобы вычислить значения функции ψ в этой области, нужно иметь возможность вычислять производные от ψ в любой точке гиперповерхности. Легко видеть, что первые производные вычисляются непосредственно из начальных данных. Для вычисления же вторых производных необходимо пользоваться волновым уравнением. При этом возможность определения вторых производных будет зависеть от вида гиперповерхности, к которой относятся начальные данные. Если гиперповерхность такова, что отнесенные к ней начальные данные не определяют значения вторых производных, то она называется характеристической. Характеристическая гиперповерхность обладает тем свойством, что на ней возможны разрывы вторых производных. Поэтому движущаяся поверхность фронта волны и должна быть характеристической.

Рассмотрим сперва простейший случай, когда начальные данные относятся к гиперповерхности $x_0 = \mathrm{const}$, т. е. к начальному моменту времени. Из заданных значений ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial x_0}$ непосредственным дифференцированием получаются все первые производные, а также вторые производные вида

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_0\,\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_k} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{B.05}$$

(точнее, значения этих величин при заданном x_0). Что касается второй производной по x_0, то она должна вычисляться из волнового уравнения. В развернутом виде волновое уравнение имеет вид

$$g^{00}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2} + \ldots = 0, \tag{B.06}$$

где многоточием обозначены члены, содержащие остальные вторые производные (B.05), а также первые производные, которые известны. Так как по свойству фундаментального тензора величина g^{00} никогда не обращается в нуль (она всегда положительна), то уравнение (B.06) может быть всегда решено относительно остающейся второй производной $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2}$. Это значит, что если переменная x_0 имеет характер времени, то гиперповерхность $x_0 = \mathrm{const}$ не является характеристической.

Рассмотрим теперь общий случай гиперповерхности (B.03). Введем новые переменные

$$x_0' = \omega(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3); \quad x_1' = x_1; \quad x_2' = x_2; \quad x_3' = x_3. \tag{B.07}$$

Обозначая через ψ' величину ψ, рассматриваемую как функция от переменных x_0', x_1', x_2', x_3', будем иметь:

$$\psi = \psi'; \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_0} = \frac{\partial\psi'}{\partial x_0'}\frac{\partial\omega}{\partial x_0}, \tag{B.08}$$

и вследствие (B.04) задание ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial x_0}$ при $\omega = \mathrm{const}$ равносильно заданию ψ' и $\frac{\partial\psi'}{\partial x_0'}$ при $x_0' = \mathrm{const}$. Из этих последних величин можно вычислить, подобно предыдущему, все первые производные, а также вторые производные вида

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_0'\,\partial x_i'}; \quad \frac{\partial^2\psi'}{\partial x_i'\,\partial x_k'} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3), \tag{B.09}$$

тогда как вторая производная по x_0' определяется из волнового уравнения. Преобразованный к новым переменным, оператор Даламбера будет иметь вид:

$$\Box\psi = \frac{1}{\sqrt{-g'}}\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\sqrt{-g'}g'^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x'_\beta}\right), \tag{В.10}$$

где $g'^{\alpha\beta}$ получается из $g^{\sigma\beta}$ по общему правилу преобразования тензора, и в частности

$$g'^{00} = g^{\mu\nu}\frac{\partial x'_0}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_0}{\partial x_\nu} = g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}. \tag{В.11}$$

Необходимо только помнить, что, поскольку новая переменная x'_0 не обязательно имеет характер времени, неравенство $g'^{00} > 0$ может не выполняться.

Преобразованное волновое уравнение напишется:

$$\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}\right)\cdot\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_0'^2} + \ldots = 0, \tag{В.12}$$

где невыписанные члены уже не содержат второй производной по x'_0, а содержат только вторые производные вида (В.09), а также первые производные. Значения всех невыписанных членов на гиперповерхности $\omega = \text{const}$ можно считать известными из относящихся к ней начальных данных.

Вторая производная по x'_0 остается неопределенной в том и только в том случае, когда коэффициент при ней в волновом уравнении (В.12) обращается в нуль, т. е. когда функция ω удовлетворяет уравнению

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} = 0. \tag{В.13}$$

Это и есть уравнение характеристик для волнового уравнения (В.01).

Характеристики обобщенного волнового уравнения совпадают с характеристиками общековариантных уравнений Максвелла, рассмотренных в § 46. Коротко (хотя не вполне строго) этот результат может быть обоснован следующими соображениями. При условии $\nabla_\nu A^\nu = 0$ из уравнений Максвелла вытекают для потенциалов A_ν уравнения, в которых высшие (вторые) производные группируются в виде оператора Даламбера. Отсюда можно заключить, что и характеристики общековариантных уравнений Максвелла имеют вид (В.13). Нестрогость этого вывода заключается в переходе от характеристик для потенциалов к характеристикам для поля. Не представляет труда дать и строгий вывод, оперируя непосредственно с составляющими поля, подобно тому как это делалось в § 3 для декартовых координат в евклидовом случае.

Добавление Г

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ФРОНТА ВОЛНЫ

Если

$$\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{Г.01}$$

есть уравнение движущейся поверхности фронта волны, то функция ω удовлетворяет, как мы знаем, уравнению в частных производных

$$g^{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta = 0, \tag{Г.02}$$

где мы положили для краткости

$$\omega_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha}. \tag{Г.03}$$

Рассмотрим следующую задачу: определить вид волновой поверхности в момент времени $x_0 > 0$, когда задан ее вид в начальный момент времени. Подобную задачу мы решали в § 4 для случая евклидовой метрики и галилеевых координат; мы рассмотрим ее теперь для общего случая.

Вид волновой поверхности в начальный момент времени может быть задан уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(u, v), \\ x_2 &= f_2(u, v), \\ x_3 &= f_3(u, v) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad x_0 = 0. \tag{Г.04}$$

Эти уравнения могут быть написаны в более симметричном виде:

$$x_\alpha = f_\alpha(u, v) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \tag{Г.05}$$

где

$$f_0 \equiv 0. \tag{Г.06}$$

Вместо начальных данных, относящихся к моменту времени $x_0 = 0$, можно рассматривать данные Коши, относящиеся к некоторой гиперповерхности; тогда функция f_0 уже не будет тождественно равняться нулю.

Подставляя выражения (Г.05) для координат в уравнение (Г.01), мы получим тождество относительно u, v. Дифференцируя это тождество по u и по v, получаем два соотношения:

$$\omega_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial u} = 0; \qquad \omega_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} = 0. \tag{Г.07}$$

Присоединив к ним уравнение фронта волны (Г.02), мы можем определить из этих трех однородных уравнений начальные значения четырех величин ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 с точностью до общего множителя. Обозначая эти начальные значения ноликом сверху, мы будем иметь

$$\omega_\alpha^0 = \lambda \varphi_\alpha(u, v); \qquad \lambda = \lambda(u, v), \tag{Г.08}$$

где φ_α — известные функции, а λ — произвольная функция от u, v. Следует заметить, что отношения величин ω_α^0 получаются не вполне однозначно: для них возможны два значения, вследствие того, что уравнение фронта волны (Г.02) квадратично относительно ω_α. Для однозначного определения этих отношений необходимо еще указать, какое из двух возможных направлений распространения волны имеет место.

Чтобы показать, что левые части уравнений (Г.05) представляют начальные значения координат, мы снабдим их ноликом сверху и перепишем в виде

$$x_\alpha^0 = f_\alpha(u, v). \tag{Г.09}$$

Возьмем точку на начальной волновой поверхности (всякой такой точке соответствует определенная пара значений u, v) и рассмотрим луч, проходящий через эту точку. Как мы видели в § 38, дифференциальные уравнения луча представляют уравнения Гамильтона, соответствующие уравнению Гамильтона — Якоби (Г.02). Таким образом, согласно (38.39), уравнения имеют вид:

$$\frac{dx_\alpha}{dp} = g^{\alpha\beta}\omega_\beta; \qquad \frac{d\omega_\alpha}{dp} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\omega_\mu\omega_\nu. \tag{Г.10}$$

В § 38 было показано, что эти уравнения равносильны уравнениям геодезической линии нулевой длины.

Для луча, проходящего через точку (u, v), начальные значения переменных x_α и ω_α равны соответственно (Г.09) и (Г.08). Интегрируя уравнения (Г.10) с начальными значениями x_α^0 и ω_α^0, получим:

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= x_\alpha(p;\ x_0^0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0;\ \omega_0^0,\ \omega_1^0,\ \omega_2^0,\ \omega_3^0), \\ \omega_\alpha &= \omega_\alpha(p;\ x_0^0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0;\ \omega_0^0,\ \omega_1^0,\ \omega_2^0,\ \omega_3^0). \end{aligned}\right\} \tag{Г.11}$$

Подставляя сюда начальные значения (Г.09) и (Г.08), получим выражения вида

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= F_\alpha(\lambda p,\ u,\ v), \\ \omega_\alpha &= \lambda \Phi_\alpha(\lambda p,\ u,\ v). \end{aligned}\right\} \tag{Г.12}$$

Так как уравнения (Г.10) не меняются при подстановке:

$$\omega_\alpha = \lambda\omega'_\alpha; \qquad p' = \lambda p, \tag{Г.13}$$

где λ — постоянно вдоль луча, то функции F_α и Φ_α зависят не от λ и p в отдельности, а только от произведения λp.

Уравнения

$$x_\alpha = F_\alpha(p', u, v) \tag{Г.14}$$

представляют, в параметрической форме, уравнения движущейся волновой поверхности. Исключив отсюда переменные p', u, v, можно получить соотношение между четырьмя координатами (x_0, x_1, x_2, x_3), которое и представляет уравнение волновой поверхности в форме (Г.01).

Доказательство приведенных здесь формул и соотношений можно найти в курсах дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (см., например, [8]).

В качестве простейшего примера рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{c^2}\omega_0^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) = 0 \tag{Г.15}$$

при начальном виде волновой поверхности

$$z = f(x, y) \qquad \text{при} \qquad t = 0. \tag{Г.16}$$

Здесь прямоугольные координаты x, y играют роль параметров u, v. Уравнения (Г.07) напишутся:

$$\omega_1 + \omega_3 f_x = 0; \qquad \omega_2 + \omega_3 f_y = 0, \tag{Г.17}$$

где f_x и f_y — частные производные по x и y. Из (Г.15) и (Г.17) получаем одно из возможных решений:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_0 &= \lambda c, \\
\omega_1 &= -\frac{\lambda f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \\
\omega_2 &= -\frac{\lambda f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \\
\omega_3 &= \frac{\lambda}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{Г.18}$$

Другое решение получится из (Г.18) изменением знака квадратного корня. В формулах (Г.17) и (Г.18), строго говоря, мы должны были бы писать ω_α^0 вместо ω_α, но мы опускаем нолик сверху вследствие того, что в данном примере величины ω_α вообще постоянны.

Решая уравнения

$$\frac{dx_0}{dp}=\frac{1}{c^2}\omega_0; \qquad \frac{dx_i}{dp}=-\omega_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{Г.19}$$

и полагая, что при $t=0$ будет и $p=0$, получим

$$x_0=t=\frac{\omega_0}{c^2}p; \qquad x_i=x_i^0-\omega_i p \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{Г.20}$$

Подставляя сюда величины ω_α из (Г.18) и выражая параметр p через t, будем иметь для первого решения:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x+\frac{ctf_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\\ x_2&=y+\frac{ctf_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\\ x_3&=f(x,\ y)-\frac{ct}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{Г.21}$$

Для второго решения (с противоположным направлением распространения) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x-\frac{ctf_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\\ x_2&=y-\frac{ctf_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\\ x_3&=f(x,\ y)+\frac{ct}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{Г.22}$$

В частности, если мы возьмем в качестве начальной волновой поверхности поверхность шара радиуса a и положим

$$f(x,\ y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \tag{Г.23}$$

мы будем иметь из (Г.22):

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x\left(1+\frac{ct}{a}\right),\\ x_2&=y\left(1+\frac{ct}{a}\right),\\ x_3&=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\left(1+\frac{ct}{a}\right)\end{aligned}\right\} \tag{Г.24}$$

и после исключения x и y:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(a+ct)^2, \tag{Г.25}$$

т. е. поверхность шара радиуса $R=a+ct$, как и следовало ожидать.

Добавление Д

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЕВКЛИДОВОСТИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Для трехмерного пространства тензор кривизны второго ранга R_{ik} обладает тем же числом компонент (а именно, шестью), как и тензор кривизны четвертого ранга $R_{il,\,mk}$. Поэтому следует ожидать, что не только R_{ik} выражается через $R_{il,\,mk}$ по общей формуле

$$R_{ik} = a^{lm} R_{il,\,mk}, \qquad \text{(Д.01)}$$

но и, обратно, $R_{il,\,mk}$ выражается через R_{ik} (значок a при компонентах трехмерного тензора мы здесь опускаем).

Чтобы найти эти выражения, введем, подобно тому, как это мы делали в § 22 и § 37, антисимметричную систему величин ε_{ijh}, причем $\varepsilon_{123} = 1$, и построим антисимметричный псевдо-тензор с ковариантными компонентами

$$E_{ijh} = \sqrt{a}\, \varepsilon_{ijh} \qquad \text{(Д.02)}$$

и контравариантными компонентами

$$E^{ijh} = \frac{1}{\sqrt{a}} \varepsilon_{ijh}. \qquad \text{(Д.03)}$$

Для преобразований между координатами x_1, x_2, x_3 с положительным якобианом

$$D\binom{x'}{x} = \frac{D(x_1', x_2', x_3')}{D(x_1, x_2, x_3)} > 0 \qquad \text{(Д.04)}$$

мы имеем

$$\sqrt{a'}\, D\binom{x'}{x} = \sqrt{a} \qquad \text{(Д.05)}$$

и, следовательно,

$$E_{ijh} \frac{\partial x_i'}{\partial x_p} \frac{\partial x_j'}{\partial x_q} \frac{\partial x_h'}{\partial x_r} = E_{pqr} \qquad \text{(Д.06)}$$

на основании правила составления определителей, что и доказывает, что для таких преобразований величины E_{ijh} ведут себя как ковариантный тензор. По правилу составления определителей мы можем также написать:

$$E_{ikl}a^{ip}a^{kq}a^{lr} = E^{pqr}, \tag{Д.07}$$

где E^{pqr} имеет значение (Д.03). Тем самым доказано, что E^{pqr} есть контравариантный псевдо-тензор, соответствующий E_{ikl}. Отсюда легко получаются формулы

$$E_{ikl}a^{kq}a^{lr} = E^{pqr}a_{ip}, \tag{Д.08}$$

$$E_{ikl}a^{lr} = E^{pqr}a_{ip}a_{kq}, \tag{Д.09}$$

$$E_{ikl} = E^{pqr}a_{ip}a_{kq}a_{lr}. \tag{Д.10}$$

Отметим также важную для дальнейшего формулу

$$E^{pqj}E_{rsj} = \delta_r^p\delta_s^q - \delta_s^p\delta_r^q, \tag{Д.11}$$

которая доказывается путем следующих рассуждений. Обе части ее отличны от нуля только когда $p \neq q$ и $r \neq s$, причем пара чисел (p, q) должна совпадать, с точностью до порядка, с парой чисел (r, s). При этом, если $p = r$, $q = s$, то обе части равны $+1$, а если $p = s$, $q = r$, то они равны -1. Следовательно, обе части совпадают при всех возможных значениях значков, и формула (Д.11) доказана.

Чтобы найти выражения для $R_{il,\,mk}$ через R_{ik}, введем контравариантный симметричный тензор второго ранга A^{pq} по формулам

$$A^{pq}E_{pil}E_{qmk} = R_{il,\,mk} \tag{Д.12}$$

и затем установим связь между A^{pq} и R^{pq}. Формулы (Д.12) могут быть написаны в виде равенств:

$$\left.\begin{aligned} &aA^{11} = R_{23,\,23}; \quad aA^{22} = R_{31,\,31}; \quad aA^{33} = R_{12,\,12}, \\ &aA^{23} = R_{31,\,12}; \quad aA^{31} = R_{12,\,23}; \quad aA^{12} = R_{23,\,31}, \end{aligned}\right\} \tag{Д.13}$$

причем

$$A^{pq} = A^{qp}. \tag{Д.14}$$

Эти равенства непосредственно выражают A^{pq} через $R_{il,\,mk}$.

Подставляя (Д.12) в (Д.01) и пользуясь (Д.09) и (Д.11), получаем:

$$R_{ik} = A^{pq}(a_{pk}a_{iq} - a_{pq}a_{ik}), \tag{Д.15}$$

и если мы положим

$$A = a_{pq}A^{pq}, \tag{Д.16}$$

то будет

$$R_{ik} = A_{ik} - a_{ik}A, \tag{Д.17}$$

откуда

$$R = a^{ik}R_{ik} = -2A, \tag{Д.18}$$

а следовательно

$$A_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} a_{ik} R. \tag{Д.19}$$

Таким образом, A_{ik} есть просто трехмерный консервативный тензор.

Подставляя соответствующий контравариантный тензор в (Д.12), получим искомое выражение тензора четвертого ранга через тензор второго ранга:

$$R_{il,\,mk} = \left(R^{pq} - \frac{1}{2} a^{pq} R\right) E_{pil} E_{qmk}. \tag{Д.20}$$

Из полученных формул можно вывести следующее важное следствие. Мы знаем (§ 42), что необходимым и достаточным условием приводимости заданной квадратичной формы ds^2 к форме с постоянными коэффициентами является равенство нулю тензора кривизны четвертого ранга. Этот результат относится, очевидно, и к чисто пространственной трехмерной квадратичной форме

$$dl^2 = a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{Д.21}$$

для приводимости которой к евклидову виду

$$dl^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 \tag{Д.22}$$

необходимым и достаточным условием является равенство

$$R_{il,\,mk} = 0, \tag{Д.23}$$

где в левой части стоит трехмерный тензор. Но, согласно (Д.20), для трехмерного пространства тензор кривизны четвертого ранга выражается через тензор кривизны второго ранга. Поэтому необходимым и достаточным условием евклидовости трехмерного пространства является равенство нулю тензора кривизны второго ранга.

ЛИТЕРАТУРА

Классические работы

1. A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys., **17**, 891, 1905.

2. A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys., **49**, 760, 1916.

3. H. A. Lorentz, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light, Proc. Acad. Sc. Amsterdam, **6**, 809, 1904.

4. H. Poincaré, Sur la dynamique de l'électron, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXI, 129, 1906.

Переводы этих работ — в сборнике „Принцип относительности". М. — Л., 1935.

5. A. Einstein, The meaning of relativity, Princeton, 1955 (4-е изд.). Русский перевод с 1-го изд. А. Эйнштейн, Основы теории относительности. 4 лекции, читанные в Принстонском университете. М. — Л., 1935.

Специальная литература

1. Э. Картан, Теория групп и геометрия (доклад на заседании Швейцарского математического общества в Берне 7 мая 1927 г.), перевод в сборнике „VIII международный конкурс на соискание премии имени Н. И. Лобачевского". Казань, 1940.

2. А. Д. Александров, О сущности теории относительности. Вестник ЛГУ, № 8, 103, 1953.

3. А. Д. Александров и В. В. Овчинников, Замечания к основам теории относительности. Вестник ЛГУ, № 11, 95, 1953.

4. Н. А. Умов, Избранные сочинения. Гостехиздат, 1950.

5. Н. А. Умов, Уравнения движения энергии в телах. Одесса, 1874.

6. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. V. Лекции по физическим основам теории относительности. Изд. АН СССР, 1950.

7. H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin, Springer, 1923.

8. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV.

9. В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. 1. М. — Л., 1949.

10. Ю. А. Крутков, Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. АН СССР, 1949.

11. В. М. Шехтер, Вестник ЛГУ, № 11 (1954).

12. M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig, 1923.

13. П. Н. Лебедев, Опытное исследование светового давления. Собрание сочинений, изд. Физического общества имени П. Н. Лебедева. М., 1913 (первоначально напечатано в Ann. d. Phys. **6**, 433, 1901).

14. T. Levi-Civita, The absolute differential calculus. London, 1927.

15. H. Weyl, Raum — Zeit — Materie. Berlin, Springer, 1923.
16. De Donder, La gravifique einsteinienne. Paris, 1921.
17. K. Lanczos, Phys. ZS. **23**, 537, 1923.
18. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., стр. 189, 1916.
19. А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях. Изд. АН СССР, 1944.
20. C. Moeller, On Homogeneous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox. Kobenhavn, 1943. (Труды Датской АН, **2**, № 19.).
21. A. Liapounoff, Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Leningrad, 1925 и 1927.
22. А. Ляпунов, Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes. (Исследования в теории фигуры небесных тел). Записки Императорской академии наук, сер. VIII, т. XIV, № 7, 1903. Перевод „Избранные труды". Изд. АН СССР, 1948.
23. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля. Гостехиздат, 1948.
24. A. Friedmann, Über die Krümmung des Raumes. ZS. f. Phys. **10**, 377, 1922.
25. Hubble, Monthly Notices of the R. S. **133**, 658, 1953.
26. А. Эйнштейн, Автобиография в сборнике „Albert Einstein, Philosopher — Scientist". The Library of Living Philosophers. 1949. Illinois USA.
27. J. C. Maxwell, Threatise on Electricity, 1873.
28. A. Einstein, J. Grommer, Sitzb. Berl. Akad., стр. 2, 1927.
29. A. Einstein, Sitzb. Berl. Akad., стр. 235, 1927.
30. A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman, The gravitational equations and the problem of motion. Ann. Math. **39**, № 1, 65, 1938.
31. A. Einstein, L. Infeld, Ann. Math. **41**, 455, 1940.
32. A. Einstein, L. Infeld, On the motion of particles in general relativity theory. Canad. J. Math. **1**, 209, 1949.
33. L. Infeld, On the motion of bodies in general relativity theory. Acta Phys. Polonica, т. XIII, 187, 1954.
34. В. А. Фок, О движении конечных масс в общей теории относительности. ЖЭТФ, **9**, № 4, 375, 1939.
35. В. А. Фок, Система Коперника и система Птоломея в свете общей теории относительности. Сборник „Николай Коперник". Изд. АН СССР, 1947.
36. В. А. Фок, Некоторые применения идей неевклидовой геометрии Лобачевского к физике. Сборник А. П. Котельников и В. А. Фок, „Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике". Гостехиздат, 1950.
37. Н. Петрова, Об уравнении движения и тензоре материи для системы конечных масс в общей теории относительности (кандидатская диссертация ЛГУ, 1940). ЖЭТФ, **19**, вып. 11, 989, 1949.
38. В. А. Фок, Об интегралах движения центра инерции двух конечных масс в общей теории относительности. ДАН СССР, **32**, 28, 1941.
39. В. П. Кашкаров, Об уравнениях движения системы конечных масс в теории тяготения Эйнштейна. ЖЭТФ, **27**, 563, 1954.
40. И. Г. Фихтенгольц, Лагранжева форма уравнений движения во втором приближении теории тяготения Эйнштейна. ЖЭТФ, **20**, 233, 1950.
41. A. Papapetrou, Equations of motion in general relativity. Proc. Phys. Soc. A **64**, 57, 1951.
42. A. Papapetrou, Equations of motion in general relativity: the coordinate condition. Proc. Phys. Soc. A **64**, 302, 1951.