

16. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Колебательными называются процессы, при которых параметры, характеризующие состояние колебательной системы, обладают определённой повторяемостью во времени. Такими процессами, например, могут являться суточные и годовые колебания температуры атмосферы и поверхности Земли, колебания маятников и т.д.

Если промежутки времени, через которые состояние системы повторяется, равны между собой, то колебания называются периодическими, а промежуток времени между двумя последовательными одинаковыми состояниями системы – периодом колебаний.

Для периодических колебаний функция, определяющая состояние колеблющейся системы, повторяется через период колебаний:

$$f(t) = f(t + T)$$

Среди периодических колебаний особое место занимают колебания гармонические, т.е. колебания, при которых характеристики движения системы изменяются по гармоническому закону, например:

$$x = a \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (308)$$

Наибольшее внимание, уделяемое в теории колебаний именно часто встречающимся на практике гармоническим процессам, объясняется как тем, что для них наиболее хорошо развит аналитический аппарат, так и тем, что любые периодические колебания (и не только периодические) могут быть рассмотрены в виде определённой комбинации гармонических составляющих. В силу этих причин далее будут рассмотрены преимущественно гармонические колебания. В аналитическом выражении гармонических колебаний (308) величина x отклонения материальной точки от положения равновесия называется смещением.

Очевидно, что максимальное отклонение точки от положения равновесия равно a , эта величина называется амплитудой колебаний. Физическая величина, равная:

$$\omega t + \varphi_0$$

и определяющая состояние колеблющейся системы в данный момент времени, называется фазой колебаний. Значение фазы в момент начала от счёта времени

$$x = a \sin(\omega t + \varphi_0)$$

называется начальной фазой колебаний. Величина ω в выражении фазы колебаний, определяющая быстроту колебательного процесса, называется его круговой или циклической частотой колебаний.

Состояние движения при периодических колебаниях должно повторяться через промежутки времени, равные периоду колебаний T . При этом, очевидно, фаза колебаний должна изменяться на 2π (период гармонической функции), т.е.:

$$[\omega(t + T) + \varphi_0] - [\omega t + \varphi_0] = 2\pi$$

Отсюда следует, что период колебаний и циклическая частота связаны между собой соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Скорость точки, закон движения которой определяется (301), также изменяется по гармоническому закону

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (309)$$

Отметим, что смещение и скорость точки одновременно обращаются в нуль или принимают максимальные значения, т.е. смещение и скорость отличаются по фазе.

Аналогично получаем, что ускорение точки равно:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \quad (310)$$

Из выражения для ускорения видно, что оно смещено по фазе относительно смещения и скорости. Хотя смещение и ускорение одновременно проходят через нуль, в этот момент времени они имеют противоположные направления, т.е. смещены на π . Графики зависимостей смещения,

скорости и ускорения от времени при гармонических колебаниях представлены условном масштабе на рис.81.

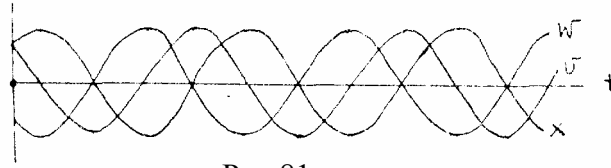


Рис.81

Циклическая частота колебаний и период определяются внутренними параметрами системы, а амплитуда колебаний и начальная фаза - начальными условиями; при этом под начальными условиями понимают значения смещения, и скорости материальной точки в момент начала отсчёта времени:

$$t = t_0 = 0$$

Из закона гармонического движения (308), пользуясь формулами тригонометрических преобразований, можно записать:

$$x = a \cos \varphi_0 \cdot \sin \omega t + a \sin \varphi_0 \cdot \cos \omega t$$

Обозначив $a \cos \varphi_0 = A$ и $a \sin \varphi_0 = B$ выражение закона движения можно представить в виде

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (311)$$

Выражение (311) показывает, что гармоническое колебание с произвольной начальной фазой, отличной от нуля, можно представить в виде суммы двух гармонических колебаний с нулевыми начальными фазами, происходящих по законам синуса и косинуса, при соответствующем подборе амплитуд составляющих.

Начальные условия, как было отмечено выше, определяются значениями смещения и скорости в момент начала отсчёта времени

$$t = t_0 = 0 \quad x_0 = a \sin \varphi_0, v_0 = a \omega \cos \varphi_0 \quad (312)$$

Из начальных условий, представленных в виде (312), легко определяются значения амплитуды и начальной фазы колебаний:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \omega}{v_0}. \quad (313)$$

Пояснить влияние начальных условий на характер последующих колебаний системы можно на двух простых частных примерах. В первом случае будем полагать, что в начальный момент времени тело (например, тело маятника) вывели из положения равновесия, сообщив ему отклонение A , и без толчка отпустили. Начальные условия для такого случая имеют вид:

$$x_0 = A, v_0 = 0$$

Подставив значения начальных смещения и скорости в (313), получим:

$$a = A; \varphi_0 = \frac{\pi}{2}; x = A \cos \omega t$$

Таким образом, при заданных начальных условиях колебания тела будут происходить без начальной фазы по закону косинуса с амплитудой, равной начальному отклонению тела от положения равновесия.

Если же, во втором случае, в исходный момент времени телу в положении равновесия (начальное отклонение отсутствует) толчком сообщили скорость, то начальные значения смещения и скорости равны $v_0 \neq 0; x_0 = 0$. Подставив эти значения в (313) получаем:

$$a = \frac{v_0}{\omega}; \varphi_0 = 0; x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Следовательно, и в этом случае колебания происходят без начальной фазы (начальная фаза равна нулю), но на этот раз по закону синуса с амплитудой, равной $\frac{v_0}{\omega}$.

Важными характеристиками колебательного движения являются их форма, периодичность и т.д. Эти характеристики, независимо от природы колебаний, присущи как колебаниям механическим, так и электрическим, тепловым. Что же касается причин, вызывающих и

обуславливающих колебания, то они определяются природой колебательной системы. Далее будем рассматривать механические колебательные системы, например, колебания системы при выводе её из положения равновесия при наличии внутренних упругих взаимодействий. Такие колебания системы, выведенной из положения равновесия, а затем предоставленной самой себе, называются свободными. Характер свободных колебаний зависит от того, насколько большим будет сопротивление движению. Если таковым можно пренебречь, то колебания можно считать чисто гармоническими, с неизменной амплитудой, а при наличии трения амплитуда колебаний будет с течением времени уменьшаться по определённому закону, и колебания нельзя представить только гармонической функцией. В первом случае колебания обычно называют собственными, во втором - затухающими.

16.2. Собственные колебания

Основные особенности собственных колебаний рассмотрим на примере механической колебательной системы с одной степенью свободы, т.е. такой системы, положение которой можно в любой момент времени определять только одной координатой. Будем считать, что размеры тела достаточно малы, чтобы его можно было рассматривать как материальную точку. Предположим, что при выводе тела из положения равновесия на него будут действовать силы, пропорциональные смещению и направленные противоположно этому смещению $-kx$. Как говорилось выше, трением, сопротивлением среды можно пренебречь. Внутренние же силы, величина и направление которых определяются смещением из положения равновесия, могут быть, например, силами упругости или силами другой природы, но изменяющимися так же, как и упругие $(-kx)$. Такие силы, независимо от их природы, будем называть 'квазиупругими'. С учётом этих сил дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (314)$$

Решением дифференциального уравнения движения (314) имеет вид гармонической функции

$$x = a \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (315)$$

Строгое доказательство этого даёт теория дифференциальных уравнений, мы же легко можем убедиться в справедливости этого утверждения путём подстановки решения (315) в уравнение(314)

$$-a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m}a \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

Как видно, равенство будет соблюдаться для любого момента времени, если:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Действительно, отношение $\frac{k}{m}$ можно представить в виде квадрата некоторой величины,

поскольку масса тела, коэффициент упругости и, следовательно, само отношение положительны. Как коэффициент k , так и масса тела являются внутренними параметрами колебательной системы, поэтому циклическая частота колебаний ω не зависит от начальных условий. От начальных условий зависит только амплитуда колебаний и начальная фаза, которые можно найти из начальных условий, как это было показано ранее. Скорость и ускорение тела при собственных колебаниях также изменяются по гармоническому закону:

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$w = \frac{dv}{dt} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

16.3. Затухающие колебания

Выясним теперь характер колебаний рассмотренной системы при наличии трения. При этом будем полагать, что силы трения пропорциональны скорости тела и противоположно ей направлены. Такими силами, например, являются силы вязкого трения при достаточно малых

скоростях движения тела. Если тело выведено из положения равновесия на величину x и при этом имеет скорость $\frac{dx}{dt}$, то на него будут действовать квазиупругая сила $F=-kx$ и сила сопротивления движению $F_{\text{сопр}} = -\mu m \frac{dx}{dt}$, где, μ - коэффициент сопротивления. По второму закону динамики напомним дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Введём обозначения $\frac{\mu}{m} = 2n$ и $\frac{k}{m} = \omega^2$. С учётом этих обозначений дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (316)$$

Строгое решение этого уравнения рассматривается в теории дифференциальных уравнений. Это же решение можно получить, исходя из следующих соображений. Во-первых, наличие квазиупругих сил свидетельствует о том, что в системе, выведенной из положения равновесия, должны возникнуть колебания. Во-вторых, наличие сил сопротивления движению приводит к тому, что энергия колебательной системы и, следовательно, амплитуда колебаний с течением времени должны уменьшаться, кроме того, сопротивление среды, тормозя движение тела, влияет на быстроту колебаний, т.е. циклическая частота колебаний может зависеть от сопротивления среды. Исходя из сказанного, решение уравнения (316) будем искать в виде

$$x = A(t) \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (317)$$

Если выражение (317) действительно является решением уравнения (316), то после подстановки (317) в (316) мы должны получить тождество:

$$\left(\frac{d^2A}{dt^2} - A\omega^2 + 2n \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A \right) \sin(\omega t + \varphi_0) + \left(2\omega \frac{dA}{dt} + 2nA\omega \right) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$

Очевидно, тождество будет выполняться для любого произвольного момента времени, если будут выполняться следующие условия

$$\frac{d^2A}{dt^2} + 2n \frac{dA}{dt} + (\omega_0^2 - \omega^2)A = 0 \quad (318)$$

$$2\omega \left(\frac{dA}{dt} + nA \right) = 0 \quad (319)$$

Из условия (319) получаем дифференциальное уравнение для определения амплитуды колебаний

$$\frac{dA}{dt} + nA = 0$$

Разделяя переменные, получаем уравнение, удобное для интегрирования

$$\frac{dA}{A} = -n dt$$

Решением этого уравнения является функция $A = A_0 e^{-nt}$,

где A_0 - постоянная интегрирования, которую можно определить из начальных условий. Подставив найденное значение амплитуды колебаний в условие (318), получаем:

$$A_0 e^{-nt} (\omega_0^2 - \omega^2 - n^2) = 0$$

т.е. частота колебаний действительно отличается от частоты собственных колебаний и равна:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$$

Период колебаний соответственно равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}}$$

С учётом полученных результатов решение исходного дифференциального уравнения движения записывается в виде:

$$x = A_0 e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (320)$$

Это и есть закон колебаний при наличии вязкого трения. Такие колебания называются затухающими.

Скорость и ускорение колебаний тела при наличии вязкого трения определяются соотношениями

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A_0 e^{-nt} [\omega \cos(\omega t + \varphi_0) - n \sin(\omega t + \varphi_0)] \quad (321)$$

$$w = \frac{dv}{dt} = -A_0 e^{-nt} [(\omega^2 - n^2) \sin(\omega t + \varphi_0) + 2n\omega \cos(\omega t + \varphi_0)] \quad (322)$$

Рассмотренные колебания являются периодическими (все параметры движения изменяются по периодическому закону). В то же время затухающие колебания нельзя назвать гармоническими. Об этом свидетельствует уже зависимость от времени амплитуды колебаний. К тому же выводу приводит и более подробный анализ периодичности изменения отдельных параметров движения, например смещения и скорости. Действительно, из выражений для смещения и скорости следует, что моменты времени, соответствующие прохождению телом положения равновесия, отвечают условию:

$$\omega t + \varphi_0 = n_1 \pi$$

а моменты обращения в нуль скорости тела – условию:

$$\omega t + \varphi_0 = \arctg \frac{\omega}{n} + n_1 \pi$$

Из этих условий следует, что прохождение телом положения равновесия и обращение в нуль скорости тела происходит с одинаковым периодом. Однако промежутки времени между прохождением положения равновесия и последующим обращением в нуль скорости тела не равны четверти периода, как это имеет место при гармонических колебаниях. Следовательно, и по этой причине затухающие колебания не могут быть гармоническими. Степень "негармоничности" затухающих колебаний определяется величиной коэффициента μ .

Таким образом, в рассмотренном случае затухания колебаний амплитуда убывает с течением времени по геометрической прогрессии. Быстрота затухания колебаний определяется величиной потерь энергии колебаний (величиной коэффициента сопротивления движению). Кроме того, с увеличением коэффициента сопротивления уменьшается не только амплитуда колебаний, но и частота, а период колебаний, соответственно, увеличивается. Следует также отметить, что колебания не могут продолжаться бесконечно долго, как это можно было бы предположить из закона колебаний. Дело в том, что когда амплитуда колебаний становится бесконечно малой, малыми будут и упругие силы. При определённых условиях они не смогут преодолеть сопротивления движению и колебания прекратятся. При достаточно больших коэффициентах сопротивления среды процесс затухания колебаний вплоть до полного их прекращения протекает очень быстро. Может получиться, что система не сможет совершить даже одного полного колебания.

Такие колебания называют аperiодическими. На практике же колебания считают прекратившимися при уменьшении амплитуды колебаний до некоторой заданной доли начального значения амплитуды (обычно до 1%). Графически затухающие колебания и аperiодически процесс представлены на рис. 82 и рис.83.

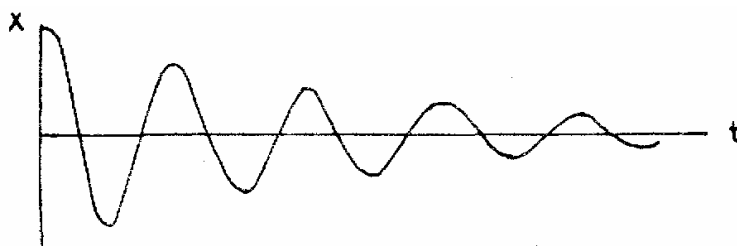


Рис.82

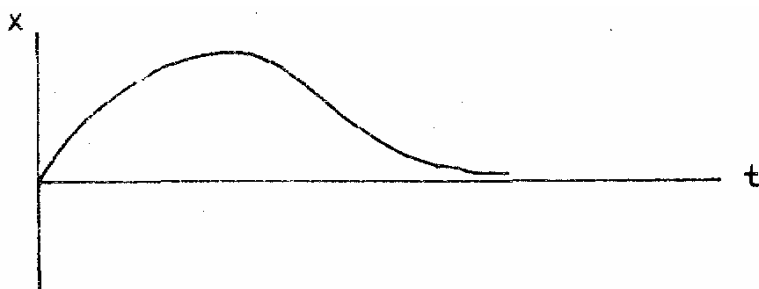


Рис.83

При колебаниях системы в вязкой среде, когда силы сопротивления движению пропорциональны первой степени скорости, амплитуда колебаний $A_0 e^{-nt}$ убывает с течением времени по геометрической прогрессии, а отношение амплитуд колебаний, отстоящих друг от друга на один период колебаний, остаётся с течением времени постоянным и равным:

Таким образом, величину этого отношения можно взять в качестве характеристики затухания колебаний, её называют декрементом затухания. Натуральный логарифм этого отношения (называется логарифмическим декрементом затухания)

$$\delta = -nT, \quad (323)$$

Эту важную характеристику затухающих колебаний на практике берут по абсолютному значению, без учёта его знака. Знак "-" физически означает, что с течением времени амплитуда колебаний уменьшается.

В реальных механических колебательных системах затухание стремятся свести к минимуму, затухание при этом становится настолько малым, что уменьшением амплитуды колебаний за один период можно пренебречь. Уменьшение амплитуды становится заметным только через достаточно большой промежуток времени.

Все полученные количественные результаты относительно рассмотренных затухающих колебаний справедливы только при наличии вязкого трения. Если же в системе на колеблющееся тело действуют силы сухого трения, то при сохранении качественных выводов (например, амплитуда колебаний с течением времени уменьшается) количественные характеристики будут иными, будет иным и сам характер изменения амплитуды) колебаний.

16.4. Вынужденные колебания

Вынужденными называются колебания системы, возникающие под воздействием внешней силы. Характер этих колебаний определяется как свойствами самой колебательной системы, так и внешней силой. Основные особенности вынужденных колебаний рассмотрим на примере уже известной колебательной системы при условии, что на колеблющееся тело кроме сил упругости и вязкого трения действует ещё внешняя периодическая сила, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$F = F_0 \sin \omega_1 t$$

По основному закону динамики можно составить дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega_1 t \quad (324)$$

Здесь, как и ранее:

$$\frac{\mu}{m} = 2n \text{ и } \frac{k}{m} = \omega^2.$$

В отличие от уравнения (316), описывающего затухающие колебания, правая часть уравнения (324), не содержащая искомой переменной x , отлична от нуля. Такие уравнения называются неоднородными (или уравнениями с правой частью). Как известно из теории дифференциальных уравнений, решение неоднородного уравнения можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному, и какого-либо частного решения всего неоднородного уравнения в целом. Однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному, получим, если правую часть уравнения (324) положить равной нулю, т.е. получим дифференциальное уравнение затухающих колебаний, решение которого уже найдено. Что же касается частного решения всего неоднородного уравнения в целом, то оно может быть представлено гармонической функцией, изменяющейся с той же частотой, что и сама внешняя

сила. При частоте вынуждающей силы, равной нулю, т.е. при действии постоянной внешней силы, тело отклоняется от положения равновесия и, когда сила упругости уравнивает внешнюю силу, движение прекратится. При бесконечно большой частоте вынуждающей силы тело, обладая массой (инертностью), не успевает получить заметное смещение за период колебаний. При промежуточных значениях частота амплитуда отлична от нуля, следовательно, амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. По тем же соображениям фаза колебаний тела также должна зависеть от частоты вынуждающей силы и отличаться от фазы самой силы.

Первой частью решения уравнения (324) для однородного уравнения (затухающие колебания) через достаточно большой промежуток времени можно пренебречь. Поэтому мы будем рассматривать только вторую часть решения, т.е. частное решение уравнения (324) в виде гармонической функции.

$$x = a \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$$

Если гармоническая функция действительно является решением всего неоднородного уравнения, то после её подстановки в уравнение мы должны получить тождество

$$a[(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + 2n\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0)] = \frac{F_0}{m} \sin \omega_1 t$$

Как легко заметить, тождество будет выполняться при соблюдении следующих условий:

$$a[(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin \varphi + 2n\omega_1 \cos \varphi] = \frac{F_0}{m} \quad (325)$$

$$a[(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin \varphi + 2n\omega_1 \cos \varphi] = 0 \quad (326)$$

Из условия (326) получаем выражение для начальной фазы:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2n\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \quad (327)$$

Возводя в квадрат и складывая (325) и (326), получим выражение для амплитуды колебаний

$$a = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4n^2 \omega_1^2}} \quad (328)$$

Выражения (327) и (328) показывают, что и начальная фаза колебаний, и их амплитуда зависят от частоты вынуждающей силы. При этом амплитуда при бесконечно большой частоте обращается в нуль, а при постоянной силе ($\omega_1 = 0$) принимает некоторое постоянное значение, численно равное отклонению от положения равновесия. Имеет смысл более подробно изучить зависимость амплитуды колебаний от частоты. Очевидно, что экстремальные значения амплитуды будут принимать в тех случаях, когда экстремальным будет подкоренное выражение в знаменателе дроби. Для экстремальных значений подкоренного выражения производная от него по частоте должна обращаться в нуль:

$$4\omega_1[\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2n^2] = 0$$

Приведенному условию соответствует два значения частоты колебаний:

$$\omega_1 = 0; \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}$$

Чтобы определить, при каких значениях частоты само подкоренное выражение принимает максимальное или минимальное значение, надо определить знак второй производной при указанных значениях частоты. Вторая производная от подкоренного выражения по частоте равна

$$4[3\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2n^2]$$

После подстановки найденных значений частоты в выражение второй производной получаем:

$$\begin{aligned} &4[2n^2 - \omega_0^2] \\ &8[\omega_0^2 - 2n^2] \end{aligned}$$

Учитывая, что в реальных механических колебательных системах вязкость среды по отношению к собственной частоте мала, получаем, что при подстановке первого значения частоты вторая производная принимает отрицательное значение, а при подстановке второго - положительное. Это означает, что первое значение частоты соответствует минимуму амплитуды колебаний, а второе - максимуму.

Явление возрастания амплитуды колебаний при некоторых значениях частоты вынуждающей силы называется резонансом. Соответствующее значение частоты: $\left(\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}\right)$ называется резонансной частотой. Резонансная амплитуда колебаний принимает значение:

$$a_{\text{рез}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2n\sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}}, \quad (329)$$

а соответствующее значение начальной фазы колебаний (смещение по фазе самих колебаний относительно вынуждающей силы):

$$\text{tg} \varphi_{\text{рез}} = -\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}}{n} \quad (330)$$

Как видно из выражений (329) и (330), при отсутствии трения ($n=0$) амплитуда колебаний обращается в бесконечность, а колебание относительно вынуждающей силы смещено по фазе на $\pi/2$.

В реальных механических колебательных системах вязкость среды хотя и мала, но всё же не равна нулю. Поэтому амплитуда колебаний при резонансе принимает конечные значения, тем меньшие, чем больше коэффициент вязкости. На рис.84 представлены резонансные амплитудные характеристики, т.е. зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы при различных значениях вязкости:

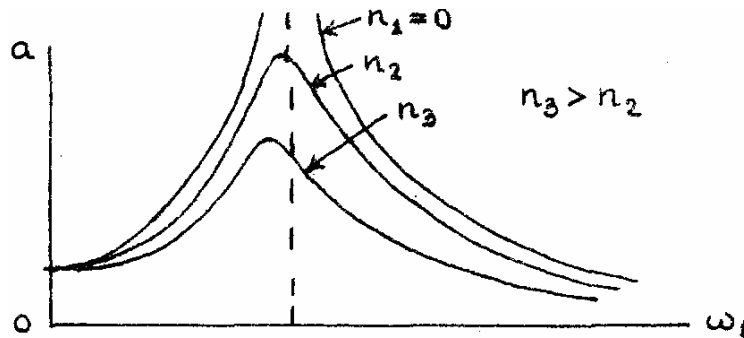


Рис. 84

Начальная фаза колебаний также зависит от частоты вынуждающей силы. Графики зависимости начальной фазы колебания от частоты вынуждающей силы, называемые фазовыми резонансными кривыми, для различных значений вязкости приведены на рис.85.

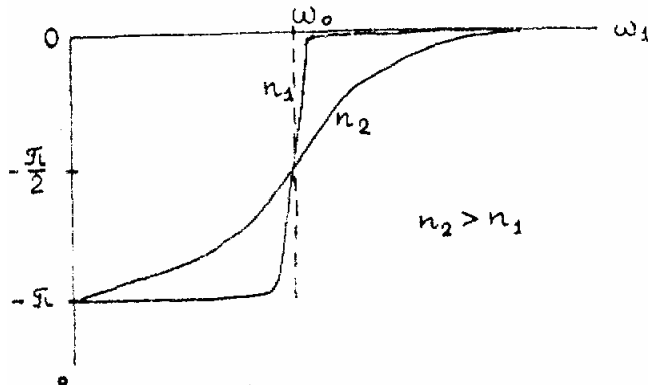


Рис. 85

Из полученных результатов не совсем очевидным является то, что при резонансе колебание относительно вынуждающей силы смещено по фазе на $\pi/2$. На первый взгляд кажется, что смещение и вынуждающая сила должны совпадать по фазе. На самом деле работа силы будет положительной (увеличивать энергию колебаний) в том случае, если сила будет совпадать по фазе не со смещением, а со скоростью. В противном случае на отдельных участках траектории сила будет направлена против движения тела и уменьшать его скорость и, соответственно, максимальное смещение.

16.5. Добротность колебательных систем

С качественной стороны механическую колебательную систему можно характеризовать соотношением между силами упругости и силами вязкого трения. Первые поддерживают колебания, вторые - способствуют их затуханию. Добротностью колебательной системы называют величину, определяемую отношением полной механической энергии системы к потерям энергии за один период, взятое для любого периода колебаний. Существуют и другое определение добротности. Например, добротность определяют как число радиан, на которое изменяется фаза колебаний система с затуханием при уменьшении энергии системы до значения:

$$E = E_0 e^{-1}$$

Мы определим добротность как отношение резонансной амплитуды к тому смещению тела, которое произойдёт под действием постоянной силы, численно равной амплитуде вынуждающей силы. Если на тело будет действовать постоянная сила, равная амплитуде вынуждающей силы, то тело будет отклоняться от положения равновесия до тех пор, пока силы упругости не уравновесят внешнюю силу. Смещение тела от положения равновесия при этом будет равно:

$$a_0 = \frac{F_0}{k}$$

При действии же на тело гармонической внешней силы с амплитудой F_0 и частотой, равной резонансной, амплитуда колебаний принимает значение:

$$a_{рез} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2n\sqrt{\omega_0^2 - n^2}} \quad (331)$$

Отношение резонансной амплитуды к смещению тела под действием постоянной силы F_0 равно

$$\frac{a_{рез}}{a_0} = \frac{k}{2mn\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}$$

принимая во внимание, что $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и что квадрат частоты собственных колебаний много больше n^2 , можно далее записать, что

$$\frac{a_{рез}}{a_0} = \frac{\omega_0^2}{2n\omega_0} = \frac{2\pi}{T \cdot 2n} = \frac{\pi}{\delta} \quad (332)$$

Здесь δ - логарифмический декремент затухания. Величина $\theta = \frac{\pi}{\delta}$ - называется добротностью колебательной системы. Как видно из приведенного выражения, его можно применять для оценки качества колебательной системы независимо от ее природы. Действительно, логарифмический декремент затухания является характеристикой колебательной системы любой природы, описывая с количественной стороны процесс затухания колебаний.

Установление колебаний в системе зависит как от свойств самой системы, так и от характера вынуждающей силы. Если к моменту начала воздействия внешней силы система покоилась, то сначала в системе возникают колебания, параметры которых будут изменяться с течением времени. Это - так называемые неустановившиеся колебания. Только по истечении достаточно большого промежутка времени в системе установятся периодические колебания с периодом, равным периоду вынуждающей силы. До этого же колебания могут быть не периодическими. Установление колебаний в системе происходит тем быстрее, чем больше затухание в системе. Таким образом, в колебательных системах с высокой добротностью установившиеся колебания возникают не сразу после начала действия периодической вынуждающей силы, а через достаточно большой промежуток времени. В течение этого времени (особенно при частотах, близких к резонансной) амплитуда колебаний будет периодически изменяться, причём эти изменения амплитуды постепенно уменьшаются. При достаточно же большом затухании практически сразу возникают периодические колебания с постоянно увеличивающейся амплитудой, приближающейся по значению к амплитуде установившихся колебаний. Поэтому колебательные системы с высокой добротностью не всегда являются оптимальными в тех устройствах, в которых необходимо быстро возбудить колебания при воздействии внешних периодических сил.

16.6. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Маятником обычно называют твёрдое тело, способное под действием приложенных сил совершать колебания относительно какого-либо центра или оси. Если тип маятника специально не оговорен, то считается, что маятник совершает колебания под действием силы тяжести.

Простейший маятник представляет собой небольшое массивное тело, подвешенное на нити или укрепленное на конце лёгкого стержня длины l . Если по условиям эксперимента нить можно считать невесомой и нерастяжимой, а размерами тела можно пренебречь по сравнению с длиной нити, то маятник можно рассматривать как материальную точку, находящуюся на неизменном расстоянии от точки подвеса. Такой маятник называется математическим. На практике приведенные выше условия являются трудно выполнимыми, тело нельзя считать материальной точкой, и маятник называют в этом случае физическим.

Закон движения математического маятника можно получить из основного закона динамики для вращательного движения. Предположим, что масса тела равна m , длина нити l , а размерами тела по сравнению с длиной нити можно пренебречь. Если тело маятника отклонить от положения равновесия на малый угол $\alpha \leq 5^\circ$, то это положение не будет устойчивым, и маятник начинает движение. Относительно точки подвеса O (рис. 86) момент силы натяжения нити равен 0, поскольку линия действия силы тяжести проходит через точку подвеса.

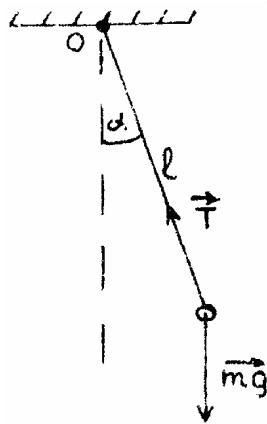


Рис. 86

Момент же силы тяжести относительно точки подвеса отличен от нуля и равен $m|\vec{M}| = mgl \sin \alpha$. Поскольку при малых углах можно считать $\alpha = \sin \alpha$, то выражение момента силы тяжести окончательно можно записать как $M = -mgl\alpha$. Знак '-' означает, что направление момента силы тяжести противоположно угловому отклонению маятника. Момент инерции для материальной точки равен $I = ml^2$. С учётом сказанного основной закон динамики для маятника принимает вид:

$$ml^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl\alpha$$

Приведем дифференциальное уравнение к форме:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha = 0 \quad (333)$$

Отметим, что это уравнение является уравнением гармонических колебаний. Решением его является гармоническая функция $\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Циклическая частота, определяемая выражением $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, зависит от свойств самого маятника. Так как период колебаний связан с циклической частотой, то и его значение также определяется параметрами маятника и не зависит от начальных условий:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Отметим также, что как само дифференциальное уравнение движения, так и его решение получены в предположении, что угловые отклонения маятника от положения равновесия малы. Если же угловые амплитуды будут больше указанной величины, то решение дифференциального

уравнения $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0$ не даст такой простой гармонической формы. Колебания не будут гармоническими.

Закон движения математического маятника можно представить и в несколько ином виде. Предположим, что отклонение тела маятника от положения равновесия по горизонтали равно x . Дифференциальное уравнение движения тела маятника запишем по второму закону динамики в проекциях на горизонтальное направление. Проекцию равнодействующей силы на горизонтальное направление можно определить как $F_x = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$. При малых отклонениях выполняется условие

$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$ Поэтому $F_x = -mg \frac{x}{l}$, где знак "-" означает, что горизонтальная проекция равнодействующей силы направлена противоположно смещению l . С учётом сказанного дифференциальное уравнение движения можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

Уравнение, как видно, также представляет собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний, решением которого является гармоническая функция $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Таким образом, линейные отклонения тела маятника от положения равновесия также изменяются по гармоническому закону с той же циклической частотой

16.7. ПРУЖИННЫЕ МАЯТНИКИ

Пружинные маятники представляют собой тела, укрепленные на упругих пружинах. При этом упругостью самого тела и массой пружины пренебрегают.

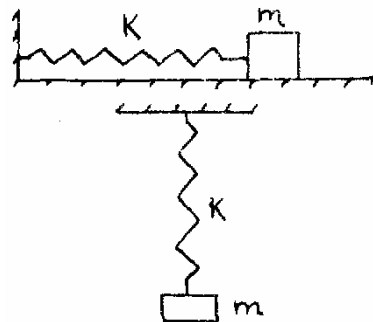


Рис. 87

В зависимости от способа крепления маятника и предоставляемой ему свободы перемещения его перемещение может происходить только под действием силы упругости (горизонтально расположенный маятник) или под действием сил упругости и силы тяжести тела маятника при вертикальном расположении маятника. На рис.87 представлены оба маятника.

Рассмотрим сначала горизонтальный пружинный маятник. Если телу маятника сообщить отклонение от положения равновесия x , то на него будет действовать сила упругости пружины, пропорциональная при малых отклонениях первой степени смещения и противоположно ему направленная. Под действием этой силы и будет происходить дальнейшее движение тела маятника. По второму закону динамики дифференциальное уравнение движения принимает вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Т.е. является уравнением гармонических колебаний, решением которого является гармоническая функция:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Циклическая частота равна $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, а период, соответственно, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Таким образом, период колебаний (циклическая частота) определяется параметрами маятника, что же касается амплитуды колебаний и начальной фазы, то они, как было сказано ранее, определяются из начальных условий.

При вертикальном расположении маятника на характер движения тела будет оказывать влияние не только сила упругости пружины, но и сила тяжести тела. При отклонении тела от

положения равновесия на x , на него будут действовать сила упругости и сила тяжести. При малых отклонениях сила упругости пропорциональна первой степени смещения и противоположно ему направлена $F = -kx$. По второму закону динамики запишем дифференциальное уравнение движения:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mg \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = g$$

В отличие от предыдущего случая правая часть уравнения не равна нулю, уравнение является неоднородным. Решением такого уравнения будем искать в виде $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + C$. После подстановки искомого решения в уравнение движения получаем тождество:

$$-x_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m} x_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m} C = g$$

Как видно тождество выполняется при условии, что $C = \frac{mg}{k}$.

Легко убедиться, что дополнительный постоянный член в решении означает смещение тела маятника в положении равновесия под действием силы тяжести.

16.8. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

В реальных случаях тела маятников нельзя рассматривать как материальные точки, т.е. размерами тел нельзя пренебрегать. Обычно физическим маятником называют твёрдое тело, способное совершать колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела.

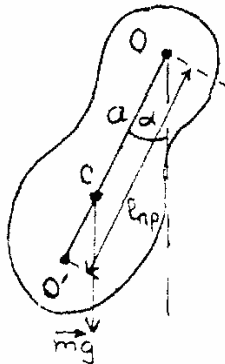


Рис. 88

Если же ось проходит через центр масс, тело находится в положении безразличного равновесия и не является маятником. Физический маятник произвольной формы приведен на рис.88.

Предположим, что тело маятника отклоняется от положения равновесия на малый угол α . На тело маятника действуют сила тяжести, проходящая через центр масс, и сила реакции опоры, проходящая через ось O. Если момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси вращения тела, равен I_c , то по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции тела относительно оси O равен $I_c + ma^2$, где a - расстояние между осями. Момент реакции подвеса относительно оси вращения равен нулю, поскольку линия действия реакции проходит через эту ось, а момент силы тяжести равен $|\vec{M}| = mga \sin \alpha$. При малых углах отклонения выполняется условие $\alpha \approx \sin \alpha$, т.е. момент силы тяжести можно представить в виде $-mga\alpha$. Знак "-" указывает на то, что направление момента силы и угловое отклонение противоположны. Основное уравнение динамики вращательного движения приводит к дифференциальному уравнению движения тела маятника в виде:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mga}{I_0} \alpha = 0 \quad (334)$$

Как и в предыдущих случаях, его решением является гармоническая функция $\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота колебаний маятника определяется соотношением

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I_0}}$$

А период колебаний, соответственно, равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga}} \quad (335)$$

Сравнивая выражения для периода колебаний математического и физического маятников, заметим, что период колебаний физического маятника равен периоду колебаний такого математического маятника, который имеет длину:

$$l_{np} = \frac{I_0}{ma}$$

Из такой аналогии величину l_{np} называют приведённой длиной физического маятника.

Поскольку момент инерции физического маятника относительно оси вращения по теореме Гюйгенса-Штейнера равен:

$$I_c + ma^2$$

приведённую длину можно записать в виде:

$$l_{np} = \frac{I_0}{ma} = \frac{I_0 + ma^2}{ma} = a + \frac{I_c}{ma}$$

Следовательно, приведённая длина физического маятника больше расстояния от оси вращения до центра масс тела на величину I_c/ma .

Из выражения для периода колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a + \frac{I_c}{ma}}{g}}$$

видно, что при очень малых значениях a (ось маятника проходит близко к центру масс) и при больших его значениях период колебаний принимает максимальные значения. Следовательно, при некотором промежуточном значении период колебаний будет минимальным. Значение a , при котором период колебаний будет минимальным, можно найти из условия экстремума:

$$\frac{dT}{da} = 0, \text{ т.е. } 1 - \frac{I_c}{ma^2} = 0, a = \sqrt{\frac{I_c}{m}}$$

График зависимости периода колебаний от расстояния от оси маятника до центра масс приведен на рис.89.

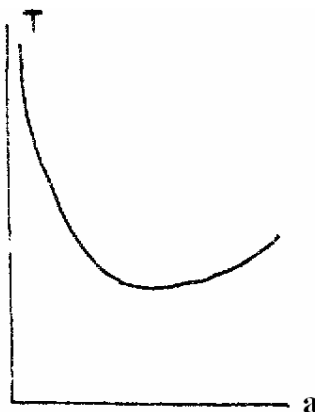


Рис. 89

Точка маятника, лежащая на прямой, соединяющей точку подвеса и центр масс на расстоянии, равном приведённой длине, называется центром качания маятника.

16.9. ОБОРОТНЫЙ МАЯТНИК

Важным примером практического применения физических маятников является так называемый оборотный маятник, служащий преимущественно для гравиметрической разведки, определения ускорения свободного падения в данной точке земной поверхности. Для достижения этой цели в процессе эксперимента маятник закрепляют так, чтобы его центр качания стал новой

точкой подвеса и снова измеряют период колебаний. Если периоды колебаний маятника в обоих случаях одинаковы, значит равны и приведённые длины маятников в обоих случаях. Техника измерения длин высока, поэтому, измеряя расстояние между точками подвеса в двух положениях маятника, можно с высокой степенью точности определить приведенную длину маятника, и измерив период само значение ускорения свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2 l_{np}}{T^2}$$

Для определения ускорения свободного падения можно было бы, конечно, применить и математический маятник. Но приближения, которые мы применяем, считая физический маятник математическим, не могут обеспечить достаточно высокую точность измерений. Кроме того, в эксперименте весьма затруднительно определить положение центра масс тела маятника и расстояние до него от точки подвеса. Всё это приводит к тому, что для точных определений ускорения свободного падения необходимо считать маятник физическим, а это приводит к дополнительным трудностям.

Очень важным, с точки зрения гравиметрических измерения, является следующее свойство физического маятника: если заставить маятник колебаться относительно центра качания, то прежняя точка подвеса станет новым центром качания, иначе говоря, центр качания и точка подвеса обладают свойством сопряженности.

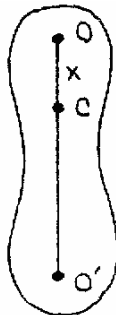


Рис. 90

Определить положение центра качания расчётным путём затруднительно в реальных условиях эксперимента, соответственно, трудно с достаточной степенью точности определить приведенную длину маятника. Но, пользуясь указанным свойством физического маятника, можно очень точно определить расстояние между двумя точками маятника, периоды колебаний относительно которых равны между собой, т.е. определить приведенную длину. Докажем теперь, что если подвесить маятник в центре качания, то прежняя точка подвеса станет новым центром качания, т.е. приведенная длина маятника не изменится.

Для доказательства рассмотрим физический маятник произвольной формы, представленный на рис.90. Здесь О - точка подвеса, С - центр масс, О' - центр качания маятника, х - расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника.

Если маятник подвешен в О, то приведенная длина его будет равна:

$$l_{np} = \frac{I_0}{mx}$$

При повороте маятника и накоплении его в т. О' приведенная длина становится:

$$l_{np} = \frac{I_{O'}}{m(l_{np} - x)}$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника относительно оси, проходящей через О', можно записать в виде $I_c + m(l_{np} - x)^2$. С учётом этого приведенная длина маятника в случае, когда О' становится точкой подвеса, равна:

$$l'_{np} = \frac{I_c + m(l_{np} - x)^2}{m(l_{np} - x)} = \frac{I_c + mx^2 + ml_{np}(l_{np} - 2x)}{m(l_{np} - x)}$$

После несложных преобразований получаем, что приведенная длина маятника одинакова в тех случаях, когда маятник колеблется относительно точек О' и О, т.е. приведенная длина не изменяется:

$$l'_{np} = \frac{I_0 + \frac{I_0}{x}(l_{np} - 2x)}{m(l_{np} - x)} = \frac{I_0(x + l_{np} - 2x)}{mx(l_{np} - x)} = \frac{I_0}{mx} = l_{np}$$

измерив расстояние между точками подвеса маятника, для которых период принимает одинаковое значение, и измерив само значение периода колебаний, определим затем и ускорение свободного падения.

$$g = \frac{4\pi^2 l_{np}}{T^2}$$

16.10. ЦИКЛОИДАЛЬНЫЙ МАЯТНИК.

Математический и физический маятники имеют циклическую частоту и период, не зависящие от амплитуды колебаний только в том случае, когда амплитуда колебаний достаточно мала. С увеличением амплитуды колебаний они перестают быть, с одной стороны, гармоническими и, с другой стороны, их период будет уже зависеть от величины амплитуды. Однако, изменяя соответствующим образом параметры маятника, например, длину математического маятника, можно добиться того, что и при больших значениях амплитуды колебаний период колебаний не будет зависеть от её значения. Таким является так называемый циклоидальный маятник. Циклоидальным называют обычно математический маятник, у которого тело движется под действием силы тяжести по дуге циклоиды, ось которой вертикальна, а выпуклость обращена вниз. Период колебаний циклоидального маятника не зависит от амплитуды и определяется формулой

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (336)$$

Таким образом, для циклоидального маятника строго выполняется свойство изохронности колебаний. На рис. 91 приведена разновидность циклоидального маятника, отличающаяся от приведенного его определения тем, что нить математического маятника при его колебаниях касается циклоиды, т.е. длина математического маятника с ростом отклонения тела от положения равновесия уменьшается на соответствующую дугу циклоиды.

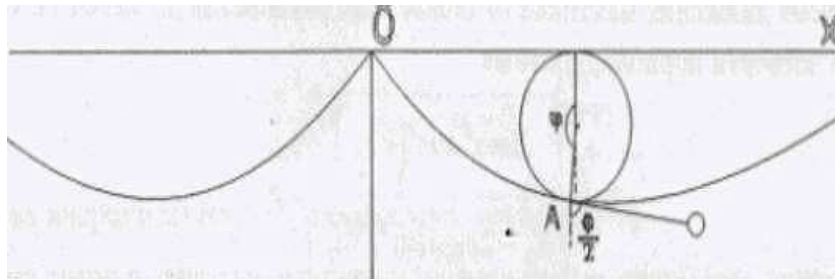


Рис.91

Положим, что радиус круга, образующего циклоиду, равен a , а длина маятника $4a$. Уравнение циклоиды тогда можно записать в виде

$$x = a\varphi - a \sin \varphi \quad y = a(1 - \cos \varphi)$$

где угол φ показан на рис.91.

При колебаниях маятника в любой момент времени его длина уменьшается на величину дуги циклоиды, которой в этот момент времени касается нить маятника. Нить направлена по касательной к циклоиде в т. А. Тангенс угла отклонения нити от положительного направления оси OX легко определяется из выражения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin \varphi d\varphi}{a(1 - \cos \varphi) d\varphi} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

Отсюда видно, что угол отклонения нити маятника от вертикали равен $\frac{\varphi}{2}$, длина дуги циклоиды

ОА равна $4a \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)$, а длина нити маятника в этот момент времени, соответственно, $4a \cos \frac{\varphi}{2}$.

Предположим далее, что колебания маятника возбуждаются толчком, т.е. ему сообщается кинетическая энергия. При максимальном отклонении тела маятника от положения равновесия при отсутствии сил сопротивления движению энергия его полностью переходит в потенциальную энергию в поле тяготения, т.е. $E_0 = 2mga \sin^2 \frac{\varphi_m}{2}$, где E_0 - начальная энергия, $\frac{\varphi_m}{2}$ - угол максимального отклонения маятника.

В произвольный момент времени полная энергия маятника (см. "Энергия колебательного движения") состоит из кинетической энергии движения и потенциальной энергии в поле силы тяжести: $E_0 = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg(4a - y) = 2ma^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2mga \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

Из полученного выражения для закона сохранения энергии получим значение угловой скорости маятника для произвольного момента времени

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{E_0 - 2mga \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2ma^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

Последнее выражение позволяет определить период колебаний маятника. Действительно, время движения маятника от положения равновесия до максимального отклонения равно четверти периода, поэтому

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\varphi_m} \sqrt{\frac{2ma^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{E_0 - 2mga \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi$$

Выражение интеграла можно привести к более удобному для интегрирования виду, учитывая значение кинетической энергии, сообщённой маятнику

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\varphi_m} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi$$

Если применить подстановку $z = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ интеграл приводится к табличному

$$\frac{T}{4} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2}} \frac{dz}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - z^2}}$$

После интегрирования получаем

$$\frac{T}{4} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \arcsin \frac{z}{\sin \frac{\varphi_m}{2}} \Bigg|_0^{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2}} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

Следовательно, период колебаний циклоидального маятника совершенно не зависит от амплитуды колебаний, т.е. свойство изохронности колебаний выполняется строго. Значение периода колебаний будет определяться только параметрами самой циклоиды (радиусом круга, образующего циклоиду):

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

16.11. ДУГОВОЙ МАЯТНИК

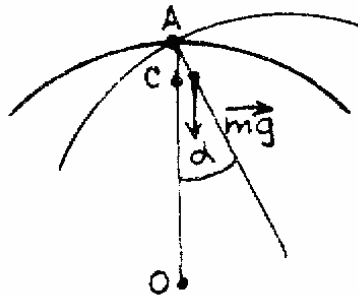


Рис. 92

Дуговой маятник представляет собой тело, масса которого распределена по дуге окружности определённого радиуса (рис. 92), способный вращаться вокруг оси, проходящей через т. А. Свойства такого маятника отличаются от свойств уже рассмотренных. Для дугового маятника не выполняется свойство изохронности колебаний, но период его колебаний не зависит от размеров дуги.

Закон движения дугового маятника можно вывести из основного уравнения динамики для вращательного движения. В положении равновесия маятника точка подвеса его и центр масс (т. С) лежат на одной вертикали. При отклонении маятника от положения равновесия возникает момент силы тяжести, возвращающий его в положение равновесия. Предположим, что маятник отклонён от положения равновесия на угол α . Момент силы тяжести при этом равен:

$$|\vec{M}| = mg \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

Основное уравнение динамики вращательного движения в этом случае записывается в виде:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mg \cdot AC}{I_A} \alpha = 0 \quad (337)$$

где I_a - момент инерции маятника относительно точки подвеса.

Момент инерции относительно точки подвеса можно определить, пользуясь теоремой Гюйгенса-Штейнера. Действительно, момент инерции маятника (дуги) относительно геометрического центра дуги с одной стороны равен mR^2 , так как все точки дуги лежат на одном расстоянии от её центра, с другой стороны, по теореме Штейнера, равен $I_c + m(R-AC)^2$, откуда можно определить момент инерции дуги относительно её центра масс. Далее, опять по теореме Штейнера, определяем момент инерции дуги относительно точки подвеса $I_c = I_a + m(AC)^2 = 2mR \cdot AC$. Пользуясь полученным выражением момента инерции, основной закон динамики перепишем в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{2R} \alpha = 0$$

Как видно, это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний, циклическая частота колебаний равна $\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$, а их период, соответственно,

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$. Таким образом, полученный результат для периода колебаний дугового маятника показывает, что он не зависит от размеров дуги, а определяется только её радиусом.

16.12. Маятники Фуко и Фруда.

Рассмотрим кратко два практически важных типа маятников, маятник Фуко и маятник Фруда.

Маятником Фуко называют массивный груз, подвешенный на нити большой (несколько десятков метров) длины. Особенностью маятника Фуко является его способ крепления в подвесе.

Обычно его закрепляют в опоре с помощью карданова шарнира, исключающего закручивание нити. Такой маятник служит преимущественно для демонстрации суточного вращения Земли. В результате вращения Земли плоскость колебаний маятника медленно поворачивается относительно земной поверхности.

Характер колебаний маятника определяется действующими на него силами. На тело маятника действуют сила тяжести и сила натяжения нити. Обе они лежат в плоскости колебаний маятника и поэтому не могут вызвать её поворота. Объяснение поворота плоскости колебаний относительно земной поверхности можно провести с точки зрения двух наблюдателей, один из которых связан с инерциальной системой отсчёта (звёздной системой), другой, неинерциальный, связан с земной поверхностью.

С точки зрения инерциального наблюдателя вращение плоскости колебаний относительно земной поверхности объясняется поворотом земной поверхности, в результате чего плоскость колебаний маятника вращается относительно нее в направлении, противоположном вращению Земли. На полюсе Земли плоскость колебаний маятника сохраняет неподвижное положение относительно инерциальной системы отсчёта, поэтому угловая скорость поворота плоскости колебаний маятника относительно земной поверхности в точности равна угловой скорости вращения Земли. На других

широтах (при широте, отличной от $\pm \frac{\pi}{2}$) угловая скорость вращения Земли может быть разложена

на две составляющие, по нормали к поверхности и касательной к поверхности Земли плоскости. Нормальная составляющая угловой скорости определяет относительное вращение земной поверхности и плоскости колебаний маятника. Другая составляющая - определяет вращение плоскости колебаний маятника вместе с земной поверхностью относительно инерциальной системы отсчёта. Понятно, что на экваторе, где нормальная составляющая равна нулю, плоскость колебаний не будет совершать вращения относительно земной поверхности, а максимальной скоростью этого вращения будет на полюсах и численно равняться угловой скорости вращения Земли. На промежуточных широтах скорость вращения плоскости колебаний маятника относительно земной поверхности принимает значения от нуля до значения угловой скорости вращения Земли. Легко убедиться также в том, что плоскость колебаний на одинаковой по величине широте в Северном и Южном полушариях совершает вращение с одинаковой по величине скоростью, но направления вращения -противоположны.

В неинерциальной системе отсчёта, связанной с поверхностью Земли, кроме указанных сил, действующих на тело маятника, надо учесть и силы инерции. Во вращающейся системе отсчёта при

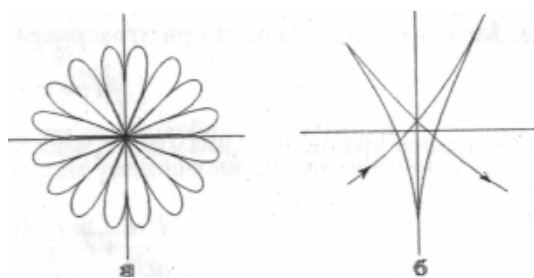


Рис. 93

движении в ней тела надо учитывать силу инерции Кориолиса и центробежную силу инерции. Действительно, при выводе тела маятника из положения равновесия и при его дальнейшем движении сила Кориолиса, действующая по нормали к вектору скорости тела, должна искривлять его траекторию. При этом надо отметить, что при движении в одном направлении (например, от положения равновесия) сила Кориолиса действует в одном направлении, а при обратном движении тела - в противоположном. Поэтому траектория тела маятника относительно земной поверхности является довольно сложной.

В зависимости от начальных условий траектория может принимать различный вид. Если тело маятника толчком выводится из положения равновесия, то при определённом направлении вращения системы отсчёта сила Кориолиса будет направлена вправо от направления движения и (рис.93а) искривлять траекторию. После достижения положения максимального отклонения от положения равновесия и обратном движении сила Кориолиса изменяет направление, и траектория начинает искривляться в другую сторону. Поэтому при указанных начальных условиях траектория будет представлять собой розетку с плавными закруглениями. Если же тело маятника отвести от положения равновесия и без толчка отпустить, то, как показано на рис.93, из-за влияния сил Кориолиса тело маятника не проходит через положение равновесия, отклоняясь, как и в предыдущем случае, вправо.

После прохождения положения максимального отклонения сила Кориолиса, изменив направление, будет отклонять тело маятника в другом направлении, поэтому траектория должна представлять собой остроконечную розетку.

Маятник, сооружённый в Парижском Пантеоне, имел длину 67м, а маятник Фуко, установленный в Исаакиевском соборе в Ленинграде, имеет длину 98м.

Маятник Фруда (фрикционный маятник) состоит из физического маятника, жёстко скреплённого с муфтой, насаженной на ось мотора, при этом угловая Фуко

Для достаточно убедительной демонстрации суточного вращения Земли длина маятника Фуко

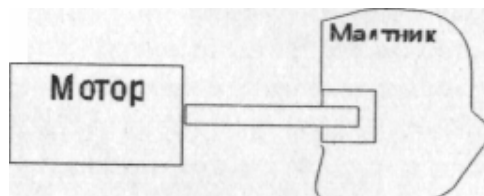


Рис.94

должна быть большой. Например, первая такая скорость вращения оси мотора должна быть заметно большей угловой скорости маятника (рис.94). Действующий на муфту (соответственно, на сам маятник) момент сил трения о вал в течение одного полупериода колебаний тормозит движение маятника, во время другого - наоборот, ускоряет. Можно подобрать скорость вращения оси вала такой, что при учёте зависимости сил трения от относительной скорости работа сил трения в целом за период будет положительной, т.е. приводить к увеличению амплитуды колебаний маятника. Таким образом, маятник Фруда представляет собой простейшую автоколебательную систему. Если в описанной системе сила трения такова, что она в каком-нибудь интервале скоростей с увеличением скорости убывает, то ускоряющий момент сил трения будет в среднем больше тормозящего, что приведёт к самовозбуждению колебаний. В результате в системе могут возникнуть автоколебания.

16.13. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ.

Для более наглядного представления различного рода движений, в том числе и гармонических, применяются графические способы их описания. Среди этих способов мы рассмотрим только самые распространённые.

а) Временные диаграммы

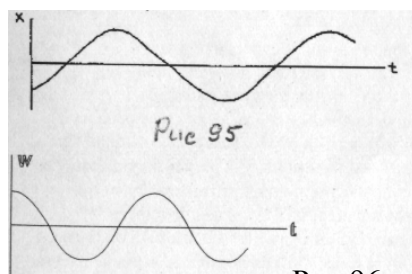


Рис.96

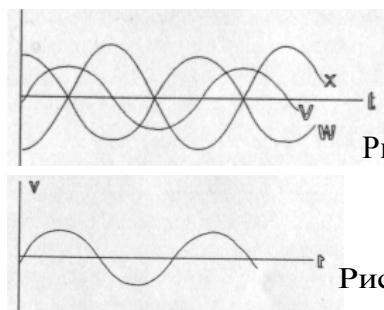


Рис.97

Рис.98

Наиболее широко применяемыми и известными являются временные (плоские) диаграммы, на которых в зависимости от времени представляются параметры движения, например, смещение, скорость и ускорение. Если материальная точка совершает движение по гармоническому закону $x = a \sin(\omega t + \varphi)$, то скорость её в произвольный момент времени выражается соотношением $v = a\omega \cos(\omega t + \varphi)$, а ускорение, соответственно, $w = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$. Временные диаграммы этих параметров отражены на рис.95-97. На рис.98 в произвольном масштабе одновременно представлены все три характеристики движения.

б) векторные диаграммы

Часто употребляемыми являются также так называемые векторные диаграммы. Они широко применяются при изучении гармонических колебаний, при изучении сложения колебаний и т.д. Любое гармоническое колебание можно представить следующим образом. Пусть начало некоторого вектора совпадает с началом координат (рис. 99), а сам он вращается вокруг начала координат с угловой скоростью, численно равной циклической частоте колебаний. Как видно из рисунка, в любой момент времени проекции вектора на оси координат численно равны $x = A \cos \omega t$ и $y = A \sin \omega t$

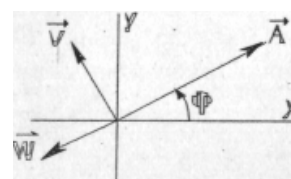


Рис. 99

Масштаб можно выбрать таким, что длина вектора будет численно равна амплитуде колебаний. Если же начальное угловое отклонение выбрать численно равным начальной фазе колебаний, то, как легко убедиться, в любой момент времени проекции вектора на оси координат будут изменяться по гармоническому закону, т.е. гармоническое колебание можно представить проекцией вектора, равномерно вращающегося относительно начала координат, на любую из осей. Скорость колеблющегося тела при этом равна

$$v = A\omega, \text{ а ускорение } w = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2. \text{ Следовательно, в определённом}$$

масштабе для определения скорости и ускорения тела в любой момент времени можно находить проекции векторов, смещённых относительно

первого вектора соответственно на $\frac{\pi}{2}$ и π , длины которых равны

амплитудным значениям скорости и ускорения.

Весьма наглядным является сложение гармонических колебаний, представляемое с помощью векторных диаграмм. Предположим, что обе гармонические составляющие имеют одинаковую частоту изменения параметров (т.е. угловые скорости вращения обоих векторов одинаковы). Если начальные фазы составляющих различны, то векторы в пространстве не совпадают по направлению. Геометрическая сумма этих векторов определяет амплитуду результирующего колебания. Действительно, поскольку для гармонических колебаний справедлив принцип суперпозиции, то результирующее смещение, получаемое телом, должно равняться по этому принципу геометрической сумме смещений, получаемых телом за счёт участия в каждом из отдельных колебаний. Так как при одинаковой угловой скорости вращения слагаемых векторов их относительное расположение (рис.100) не будет изменяться с течением времени, то не будет изменяться, соответственно, и длина суммарного вектора (амплитуда результирующего колебания), который будет вращаться с той же угловой скоростью, что и слагаемые векторы. Таким образом, результирующее колебание будет происходить с той же циклической частотой, а его амплитуда численно равна геометрической сумме складываемых векторов.

Если же циклические частоты складываемых колебаний (угловые скорости вращения векторов) неодинаковы, то относительное расположение складываемых векторов с течением времени будет периодически изменяться, будет периодически изменяться и амплитуда результирующего колебания, принимая значения от нуля до величины, равной сумме амплитуд складываемых колебаний. Поскольку периодичность изменения амплитуды результирующего колебания (длины суммарного вектора) определяется относительной скоростью вращения векторов, то циклическая частота изменения амплитуды результирующего колебания должна определяться разностью циклических частот складываемых колебаний. Более подробно случай сложения одинаково направленных колебаний рассмотрим ниже.

в) Спектральное представление колебаний

В ряде случаев для характеристики колебаний, особенно негармонических, достаточно знать только такую интегральную характеристику, как энергию (или амплитуду), соответствующие заданной частоте. Это имеет место, например, при изучении колебаний систем с несколькими степенями свободы, периодических, но негармонических колебаний, импульсных процессов и т.д.

В таких случаях на графиках зависимости амплитуды или энергии, пропорциональной амплитуде колебаний, от частоты для соответствующих частот откладываются отрезки, в определенном масштабе равные амплитуде (энергии) колебаний. Спектральная характеристика гармонического колебания частоты ω_0 представлена на рис. 101.

г) Фазовое представление колебаний

При фазовом представлении колебаний состояние колеблющейся системы описывается в фазовой плоскости. Фазовой плоскостью называют плоскость, координаты точек которой определяют состояние колеблющейся системы с одной степенью свободы. По осям координат откладываются значения координат и скоростей механической системы. При гармонических колебаниях вместо скорости (или импульса) откладывается обычно отношение скорости тела к циклической частоте колебаний. Изменению состояния системы соответствует перемещение точки по фазовой плоскости. Отметим, что на фазовой плоскости можно представить не только

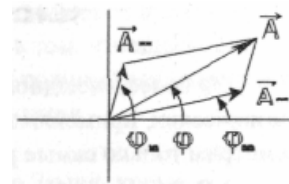


Рис.100

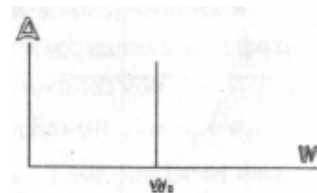


Рис. 101

колебательный процесс, но и любой другой вид движения, например, прямолинейное движение, движение тела, брошенного под углом к горизонту и т.д.

Рассмотрим фазовые представления некоторых частных случаев движения. На рис. 102 представлено равномерное прямолинейное движение. Действительно, при равномерном и прямолинейном движении на всей траектории (для любой координаты) скорость тела имеет постоянное значение. Этому случаю соответствует прямая, параллельная оси X на фазовой плоскости.

Рис.102

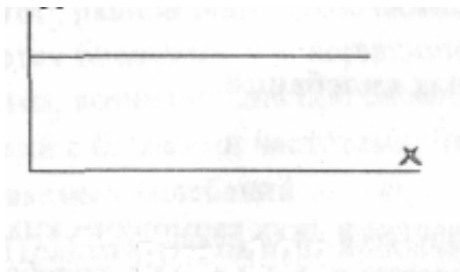
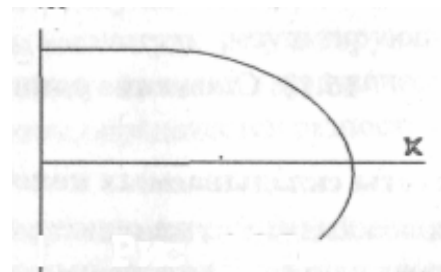


Рис.103



Если же скорость с течением времени изменяется, то фазовая траектория не будет представлять собой прямую линию. Так, если тело совершает равнозамедленное движение с начальной скоростью v_0 из начала координат, то закон изменения его скорости записывается в

виде $v = v_0 - wt$, а закон движения - в форме $x = v_0 t - \frac{wt^2}{2}$. Исключая из этих зависимостей

время, получаем уравнение движения в фазовой плоскости $x = \frac{v^2 - v_0^2}{2w}$. Этому уравнению соответствует парабола, представленная на рис.103.

При гармонических колебаниях закон движения тела можно записать в виде $x = a \sin(\omega t + \varphi)$. Скорость его при этом для произвольного момента времени имеет вид $v = a\omega \cos(\omega t + \varphi)$. Исключая время, получим уравнение фазовой траектории

$$x^2 + \left(\frac{v}{w}\right)^2 = a^2, \text{ которая представлена на рис.104.}$$

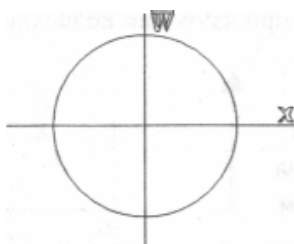


Рис.104

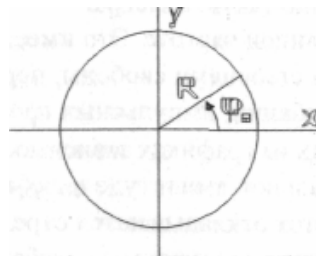


Рис.105

Этими основными видами геометрического представления колебаний и будем пользоваться в дальнейшем.

Рассмотрим также равномерное движение точки по окружности. Радиус вращения равен R , в исходный момент времени направление на точку составляло угол φ_0 с осью X (рис.105).

В любой момент времени проекции точки на оси координат равны $x = R \cos(\omega t + \varphi_0)$ и $y = R \sin(\omega t + \varphi_0)$. Соответствующие проекции скорости на оси координат равны $v_x = \omega R \sin(\omega t + \varphi_0)$ и $v_y = \omega R \cos(\omega t + \varphi_0)$. Ускорение же в проекциях на оси координат равно $w_x = -\omega^2 R \sin(\omega t + \varphi_0)$ и $w_y = -\omega^2 R \cos(\omega t + \varphi_0)$. Отметим, что такое определение закона движения точки в проекциях на оси координат аналогично уже отмеченному выше векторному представлению колебаний.

В самом деле, как видно из выражений проекций точки на оси координат, а также проекций векторов скорости её и ускорения, вдоль отдельных координатных направлений точка совершает

гармонические колебания. При этом угловая скорость точки численно равна циклической (круговой) частоте колебаний (откуда ясно происхождение названия самой частоты).

16.14. СЛОЖЕНИЕ ОДИНАКОВО НАПРАВЛЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ.

а) Частоты складываемых колебаний одинаковы.

Предположим, что точка одновременно принимает участие в двух гармонических движениях вдоль одного и того же направления, при этом частоты складываемых колебаний равны между собой, отличаются только амплитуды и начальные фазы колебаний:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

По принципу суперпозиции колебаний полное смещение точки из положения равновесия должно быть равным геометрической сумме смещений, получаемых в каждом из отдельных колебаний. Кроме того, поскольку оба составляющих колебания происходят с одной и той же частотой, то и результирующее колебание будет иметь ту же частоту. Поэтому результат сложения колебаний представим в виде функции:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Используя формулы для тригонометрических преобразований, далее запишем, что:

$$a_1(\sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1) + a_2(\sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2) = A \sin \omega t \cdot \cos \varphi + A \cos \omega t \cdot \sin \varphi$$

Очевидно, что равенство будет соблюдаться для любого произвольного момента времени, если

$$a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 = A \cos \varphi$$

$$a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 = A \sin \varphi$$

Из последних условий можно определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \Delta \varphi} \quad (338)$$

Амплитуда результирующего колебания может принимать различные значения в зависимости от значений амплитуд складываемых колебаний и разности их начальных фаз. Например, если фазы складываемых колебаний отличаются на $2\pi n$, то амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний $A = a_1 + a_2$ если же разность фаз равна $(2n + 1)\pi$, то - разности амплитуд $A = a_1 - a_2$. При разности фаз, равной нечётному числу $\frac{\pi}{2}$ амплитуда

результирующего колебания равна $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Этот же результат можно легко получить, пользуясь векторным представлением колебаний, как это указывалось выше.

б) Частоты складываемых колебаний различны, одинаковы амплитуды и начальные фазы

При складывании колебаний различных частот равенство амплитуд и начальных фаз мы взяли только для упрощения преобразований. Пусть первое из складываемых колебаний имеет вид $x_1 = a \sin(\omega_1 t + \varphi)$, а второе- $x_2 = a \sin(\omega_2 t + \varphi)$. По принципу суперпозиции колебаний $x = x_1 + x_2$.

Используя формулы тригонометрических преобразований, получаем результат в виде:

$$x = x_1 + x_2 = 2a \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi \right) \quad (339)$$

Как видно, результирующее колебание в этом случае не является гармоническим. Однако, если частоты складываемых колебаний не очень отличаются друг от друга, то результирующее колебание можно представить как почти гармоническое с медленно изменяющейся амплитудой. При этом смещение точки из положения равновесия происходит с частотой, равной полусумме складываемых частот. Такой случай сложного колебания называется биениями, т.е. периодическими изменениями амплитуды результирующего колебания, возникающие при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний с близкими частотами. Частота биений при этом определяется разностью частот складываемых колебаний $\omega_1 - \omega_2$.

Практически биения используют для сравнения частот двух колебаний, например, при настройке музыкальных инструментов. Наблюдение биений позволяет с большой точностью определить тот момент, когда частота биений становится равной нулю (так называемые нулевые биения). Это происходит при равенстве частот складываемых колебаний. Похожее явление биений наблюдается и при складывании нормальных колебаний с несколькими степенями свободы. В таких системах в некоторые моменты времени амплитуда колебаний одного из тел системы принимает максимальное значение, в то время как для другого она становится минимальной. Другими словами, в связанных системах происходит периодическая "перекачка" энергии от одного из тел системы к другому.

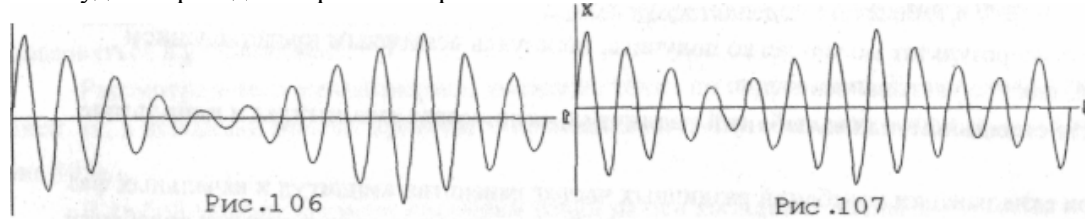
Картина биений несколько изменяется, если амплитуды колебаний не равны друг другу. При этом, когда отдельные составляющие результирующего колебания находятся в противофазах, результирующее смещение не обращается в нуль, а будет определяться разностью амплитуд складываемых колебаний.

Пусть складываемые колебания имеют, разные амплитуды, а начальные фазы для простоты рассуждений будем считать одинаковыми: $x_1 = a \sin(\omega_1 t + \varphi)$ и $x_2 = b \sin(\omega_2 t + \varphi)$.

Результирующее колебание будем определять по принципу суперпозиции, несколько преобразовав складываемые колебания:

$$x = x_1 + x_2 = a \sin(\omega_1 t + \varphi) + a \sin(\omega_2 t + \varphi) + (b - a) \sin(\omega_2 t + \varphi). \quad (340)$$

Первые два члена в этом выражении в результате дают биения, характер которых рассмотрен выше. Но с этими биениями складывается чисто гармоническое колебание с амплитудой, равной разности амплитуд складываемых колебаний и с частотой, соответствующей составляющей с большей амплитудой. Таким образом, амплитуда результирующего колебания (биений) не обращается в нуль, а уменьшается только до величины, равной разности амплитуд складываемых колебаний. Примерный вид биений при сложении колебаний с одинаковыми и различными амплитудами приведен на рис.106 и рис.107.



16.15. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНОПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ.

В результате сложения взаимноперпендикулярных колебаний получаются сложные в общем случае по виду траектории движения. Поэтому мы рассмотрим частный случай, когда складываемые колебания имеют одинаковые частоты, но разные амплитуды и фазы. В этом случае отдельные составляющие можно записать в виде $x = a \sin \omega t$ и $y = b \sin(\omega t + \varphi)$. Здесь φ - сдвиг фаз между складываемыми колебаниями.

Для определения вида траектории результирующего движения из закона движения следует исключить время. Для этого из первого выражения значение гармонической функции подставим во второе. Тогда получим, что:

$$y = x \frac{b}{a} \cos \varphi + b \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Для удобства последующего анализа выражение лучше представить в форме:

$$y^2 + x^2 \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \varphi - 2xy \frac{b}{a} \cos \varphi = b^2 \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{a^2} b^2 \sin^2 \varphi$$

Даже в этом простом случае уравнение траектории для произвольного сдвига фаз между отдельными колебаниями принимает сложный вид. Мы рассмотрим частные случаи сдвига фаз.

а) $\varphi = 2n\pi$. При таком сдвиге фаз уравнение траектории принимает вид

$$y^2 + x^2 \frac{b^2}{a^2} - 2xy \frac{b}{a} = 0$$

Упрощая выражение, получаем, что $y = \frac{b}{a}x$ т.е. траектория представляет собой прямую линию, которая лежит в первом и третьем квадрантах.

б) $\varphi = (2n+1)\pi$. При таком сдвиге фаз уравнение траектории преобразуется к виду

$$y^2 + x^2 \frac{b^2}{a^2} + 2xy \frac{b}{a} = 0.$$

Отсюда следует, что $y = -\frac{b}{a}x$, т.е. и в этом случае траектория представляет собой прямую линию с тем же наклоном, но она лежит уже во втором и четвёртом квадрантах.

в) $\varphi = (2n-1)\frac{\pi}{2}$. Уравнение траектории для такого сдвига фаз имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

т.е. представляет собой эллипс. Следует заметить, что как при сдвиге фаз $\frac{\pi}{2}$, так и при $\frac{3\pi}{2}$ уравнение траектории имеет один и тот же вид. Но характер движения точки вдоль своей траектории будет различным. В начальный момент времени $t = t_0 = 0$ смещение вдоль оси X равно нулю, а вдоль оси Y $+b$ и $-b$ соответственно. При дальнейшем движении точки по траектории смещение вдоль X увеличивается и принимает положительные значения, т.е.

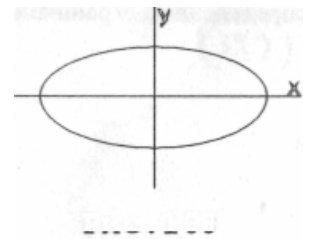


Рис. 108

точка движется по траектории вправо. Это означает, что при сдвиге фаз $\frac{\pi}{2}$ точка должна двигаться по направлению хода часовых стрелок, а при $\frac{3\pi}{2}$ против хода. Таким образом, такое изменение фазы приводит к изменению направления движения вдоль траектории. Рассмотренный случай сложения взаимноперпендикулярных колебаний приведен на рис.108.

Траектории результирующего движения при сложении взаимноперпендикулярных колебаний одинаковой частоты представляют собой только частный случай так называемых фигур Лиссажу. Фигурами Лиссажу называют траектории, описываемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания во взаимноперпендикулярных направлениях. Вид таких траекторий зависит от соотношения между частотами складываемых колебаний, между их фазами и амплитудами. Если частоты отдельных колебаний не совпадают, как в рассмотренном выше случае, то в общем случае разность фаз между колебаниями будет изменяться с течением времени, вследствие чего картина размывается, и фигуры Лиссажу не наблюдаются. Но если частоты складываемых колебаний относятся как целые числа, то через промежуток времени, равный наименьшему кратному обоим периодам, движущаяся точка снова возвращается в начальное положение, т.е. получаются устойчивые фигуры сложной формы. При этом число касаний фигурой Лиссажу сторон прямоугольника, в который она вписана, даёт отношение периодов складываемых колебаний (их частот).

Вид фигур Лиссажу позволяет определить соотношение между частотами колебаний и их фазами. Даже если колебания не являются гармоническими, характерные особенности фигуры Лиссажу сохраняются, искажается только её форма. Таким образом, по виду фигуры Лиссажу можно определить соотношение между частотами и фазами складываемых колебаний, а также оценивать, насколько сильно они отличаются от гармонических. На рис.109 приведены некоторые фигуры Лиссажу для различных соотношений между частотами складываемых колебаний и сдвига фаз между ними.

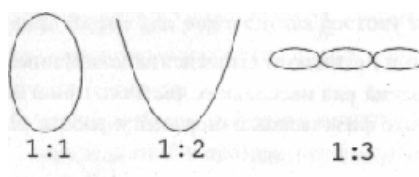


Рис. 109

16.16. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ.

Из изложенного выше материала следует, что в результате сложения гармонических колебаний можно получить периодическое, но негармоническое колебание. В конце прошлого века Фурье доказал, что справедливо и противоположное утверждение: любое периодическое движение можно представить в виде суммы гармонических составляющих. Математически это представление называется рядом Фурье.

Согласно Фурье, любой периодический процесс $f(x)$, протекающий с частотой ω может быть представлен бесконечным тригонометрическим рядом

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (341)$$

или

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \omega_k) \quad (342)$$

При анализе периодических движений оба представления Фурье эквивалентны. Мы будем пользоваться разложением Фурье в форме (341)

На амплитуды отдельных гармонических составляющих накладываются определённые ограничения, и они вычисляются по приведенным ниже соотношениям:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx \cdot dx \quad (343)$$

и

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx \cdot dx \quad (344)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, а пределы интегрирования определяются тем промежутком, в котором определена сама изучаемая функция $f(x)$. В приведенном случае функция определена в промежутке $(-\pi, \pi)$.

Постоянная a_0 разложения в ряд Фурье определяется из соотношения:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (345)$$

При вычислении коэффициентов Фурье a_k и b_k часто бывает полезно пользоваться тем, что если функция $f(x)$ четная в промежутке $(-a, a)$, т.е. $f(-a) = f(a)$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (346)$$

а если функция $f(x)$ нечётная, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (347)$$

Пользуясь этими общими правилами вычисления коэффициентов Фурье, рассмотрим разложение в тригонометрический ряд нескольких частных типов периодических колебаний, часто встречающихся в практике физических измерений и работе различных приборов.

а) Колебания прямоугольной формы. Колебания прямоугольной формы (рис. 110) могут быть представлены функцией

$f(x) = a$ в промежутке $(0, \pi)$ и $f(x) = -a$ в промежутке $(-\pi, 0)$, т.е. функция $f(x)$ в данном случае является нечётной. Вне указанного промежутка функция повторяется с периодом 2π , является периодической.

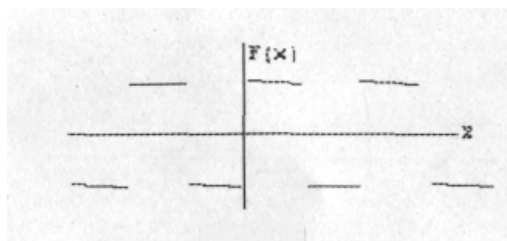


Рис. 110

Так как исследуемая функция является нечётной, то в соответствии с (347) постоянный член разложения Фурье равен

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \quad (348)$$

Из соотношения (343) определяем коэффициенты Фурье a_k :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \right] = \frac{a}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \cos kx dx + \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] = \\ &= \frac{a}{\pi} \left[- \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{a}{\pi} \left[- \frac{\sin(-k\pi)}{k} + \frac{\sin k\pi}{k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (349)$$

Коэффициенты Фурье b_k определяются из (344):

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{a}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \sin kx dx + \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] = \frac{a}{\pi} \left[- \frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{a}{\pi} \left[\frac{2}{k} - \frac{2 \cos k\pi}{k} \right]$$

Как видно, коэффициенты b_k принимают различные значения в зависимости от номера члена ряда (номера гармоники). Для нечётных гармоник (нечётных значений k)

$$b_k = \frac{4a}{\pi k} \quad (350)$$

а для четных

$$b_k = 0 \quad (351)$$

Учитывая полученные значения коэффициентов разложения в ряд Фурье (348), (349), и (350), можно окончательно записать ряд Фурье для колебаний прямоугольной формы в виде

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right] \quad (352)$$

Заметим, что разложение Фурье для этого случая состоит только из нечётных гармоник, амплитуды которых уменьшаются обратно пропорционально номеру гармоники.

б) Колебания пилообразной формы

Периодические колебания пилообразной формы, представленные на рис. 111, можно описать функцией $f(x) = x$, определяемой в промежутке $(-\pi, \pi)$. При других значениях аргумента x функция повторяется с периодом 2π .

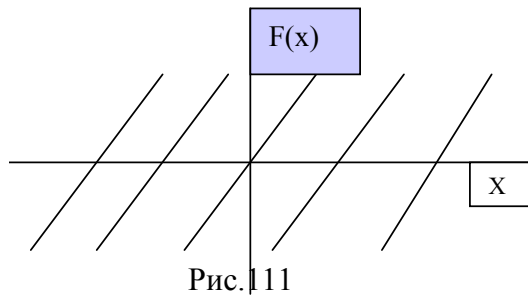


Рис. 111

Как видно, $f(-x) = -f(x)$, т.е. функция является нечётной, поэтому из (347) следует, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \quad (352).$$

Коэффициенты Фурье a_k определяется в соответствии с (343)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x \cos kx dx + \int_0^{\pi} x \cos kx dx \right] \quad (353).$$

Значение интеграла $\int x \cos kx dx$ удобно находить по правилу интегрирования по частям. По этому правилу, если подынтегральное выражение можно представить в виде $u dV$, то с точностью до постоянной интегрирования можно записать:

$$\int u dV = uV - \int V du \quad (354).$$

Полагая $x = u$ и $\cos kx dx = dV$, находим далее, что $dx = du$, а $V = \frac{\sin kx}{k}$. Используя правило (354) интегрирования по частям, можно записать, что (с точностью до постоянной интегрирования)

$$\int x \cos kx dx = \frac{x \sin kx}{k} - \int \frac{\sin kx}{k} dx \quad (355).$$

Учитывая это, значения коэффициентов a_k в форме (353) перепишем в виде

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{\sin kx}{k} dx + \frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k} dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{\cos(-k\pi)}{k^2} + \frac{\cos k\pi}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (356).$$

Коэффициенты b_k определяются из (354):

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x \sin kx dx + \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right] \quad (357).$$

Интегралы записанного вида также удобно находить по правилу интегрирования по частям. В этом случае полагаем $u = x$; $dV = \sin kx dx$. Учитывая это, получаем далее, что

$du = dx$; $v = -\frac{\cos kx}{k}$. С учётом этих обозначений и используя правило (354), получаем:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{\cos kx}{k} dx - \frac{x \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi \cos(-k\pi)}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\pi \cos k\pi}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= -\frac{2 \cos k\pi}{k} \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты Фурье b_k при чётных значениях равны

$$b_k = -\frac{2}{k} \quad (358)$$

а при нечётных

$$b_k = \frac{2}{k} \quad (359)$$

С учётом найденных коэффициентов (352), (356), (358), и (359) разложение в тригонометрический ряд Фурье колебаний пилообразной формы записывается в виде

$$f(x) = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots \right] \quad (360)$$

в) Колебания треугольной формы

Колебания треугольной формы (рис.112) описываются функцией $f(x) = x$, определённой в промежутке $(0, \pi)$ и $f(-x) = x$, определённой в промежутке $(-\pi, 0)$. Так как $f(-x) = f(x)$, функция является чётной, а для чётной функции по (346)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (361)$$

Прежде всего определим по (345) значение постоянного члена разложения:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \pi \quad (362)$$

Определяем далее по (343) коэффициенты a_k :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 x \cos kx dx + \int_0^{\pi} x \cos kx dx \right]$$

В этом выражении значения интегралов находим по правилу интегрирования по частям, как в предыдущем случае:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[- \frac{x \sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{\sin kx}{k} + \frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k} \right] = \frac{1}{\pi} \left[- \frac{\cos x dx}{k^2} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\cos kx}{k^2} \Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$\frac{1}{\pi} \left[- \frac{1}{k^2} + \frac{\cos(-k\pi)}{k^2} + \frac{\cos k\pi}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right] = \frac{2}{\pi} \left[- \frac{1}{k^2} + \frac{\cos k\pi}{k^2} \right]$$

для чётных значений k

$$b_k = 0 \quad (363)$$

а для нечётных

$$b_k = - \frac{4}{\pi k^2}$$

Используя найденные значения коэффициентов a_0, a_k и, записываем разложение Фурье для колебаний треугольной формы в виде

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} \dots \right] \quad (365)$$

16.17. Спектральный состав периодических колебаний.

В общем случае периодические колебания прямоугольной формы могут отличаться от вида, представленного на рис.110, где длительности самих импульсов и промежутков между ними одинаковы. На практике часто встречаются и периодические колебания прямоугольной формы, у которых длительность пауз между импульсами не равны длительности самих импульсов. Колебания такой формы представлены на рис.113.

Колебания такой формы характеризуются, прежде всего, скважностью. Скважностью называют безразмерный коэффициент, численно равный отношению периода повторения импульсов T к их длительности:

$$m = \frac{T}{\tau_u} \quad (366)$$

Периодическую последовательность импульсов можно представить суммой гармонических составляющих в виде ряда Фурье. При анализе такого рода колебаний, особенно когда фазовые соотношения не играют роли, часто определяют только амплитуды гармоник или

Энергию колебаний (пропорциональную квадрату амплитуды), соответствующие каждой из гармоник. В этом случае постоянный коэффициент разложения Фурье не играет роли, и достаточно определить лишь коэффициенты a_k и b_k .

Если на графике зависимости амплитуды от частоты отложить вертикальные отрезки прямых, равные в выбранном масштабе амплитуде колебаний, при частотах, равных частотам гармоник, получим спектр изучаемого периодического процесса (рис.114):

В приведенном на рис.114 спектре колебаний присутствуют только нечетные гармоники, амплитуды которых уменьшаются с ростом номера гармоники.

В качестве примера рассмотрим расчет спектра периодических колебаний прямоугольной формы произвольной скважности по амплитудам гармоник и построение спектральных диаграмм для различной скважности.

Как было сказано выше, для построения спектральных характеристик достаточно лишь определить коэффициенты a_k и b_k разложение Фурье, определяющий амплитуды гармоник. Форма исследуемых колебаний представлена на рисунке 113. Из рисунка видно, что колебания описываются функцией $f(x) = a$, определяемой в промежутке $\left(-\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m}\right)$, где a - амплитуда колебаний, а m скважность. Промежуток определяется фазой колебаний, соответствующий срезу импульса

$$\varphi = \omega \frac{\tau_u}{2}$$

Выражая циклическую частоту через период колебаний и учитывая значение (346) скважности, получаем выражение фазы для среза импульса (значение границы промежутка, в котором определена функция $f(x)$):

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau_u}{2} = \frac{\pi \tau_u}{m \tau_u} = \frac{\pi}{m}$$

При таких границах промежутка коэффициент разложения Фурье по (343) равен

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} a \sin kx dx = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi/m}^{\pi/m} = \frac{a}{\pi} \left[\frac{\sin k \frac{\pi}{m}}{k} - \frac{\sin \left(-k \frac{\pi}{m}\right)}{k} \right] = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\sin k \frac{\pi}{m}}{k} \quad (367)$$

Коэффициенты разложения b_k определяем из (324):

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} a \sin kx dx = \frac{a}{\pi} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \sin kx dx = -\frac{a}{k\pi} \cdot \cos kx \Big|_{-\pi/m}^{\pi/m} = -\frac{a}{\pi k} \left[\cos \frac{k\pi}{m} - \cos \left(-\frac{k\pi}{m}\right) \right] = 0 \quad (368)$$

Таким образом, исследуемые колебания могут быть представлены рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{m} \cdot \sin x \quad (369)$$

Для определения спектрального состава колебаний как это следует из (369), достаточно определить амплитуды a_k соответствующих гармоник.

Отметим, что при увеличении пауз между импульсами появляются дополнительные члены разложения, дополнительные гармоники, при этом с увеличением пауз при сохранении длительности самого импульса период функции увеличивается, поэтому в разложении ее в ряд Фурье должны появляться составляющие со все меньшими частотами. Кроме того, следует учесть, что в разложении Фурье пропадают гармоники с частотами $km \omega$, m – скважность, ω - основная частота (основная гармоника), а $k=1,2,3,\dots$

Следовательно, при увеличении пауз между импульсами (увеличении скважности), будет уменьшаться основная частота и соответствующим образом изменяться спектр, в котором будет исключаться все меньшее числа гармоник. Спектр колебаний «уплотняется», основная частота с увеличением скважности приближается к нулю, а количество гармоник увеличивается. Постепенное увеличение скважности позволяет качественно оценить картину спектра для одиночного импульса. Очевидно, что при бесконечном увеличении скважности (в случае одиночного импульса) основная частота стремится к нулю, а спектр колебаний за счет появления все большего числа гармоник становится сплошным. Такой сплошной спектр уже нельзя

описывать рядом Фурье, дискретным спектром. Одиночный импульс описывается интегралом Фурье

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x) \cdot \sin x dx \quad (370)$$

где величина $S(x)$ называется функцией распределения и определяет закон распределения амплитуды колебаний по спектру (по частоте). В случае сплошного спектра нельзя говорить о составляющих колебания (импульса) определенной амплитуды, а можно только указывать среднее значение амплитуды в очень узком интервале частот, определяемое функцией распределения. Если же говорить об амплитуде (энергии) колебаний для конкретного значения частоты (т.е. для нулевого частотного интервала), то амплитуда колебания и, соответственно, энергия обращаются в нуль.

На практике (например, в радиолокации) используются не просто отдельные прямоугольные импульсы, а импульсы, заполненные незатухающими гармоническими колебаниями, период которых значительно меньше длительности импульсов. В этом случае абсолютный максимум амплитуды разложения соответствует основной частоте гармонического колебания, заполняющего импульсы, а дополнительных частот тем больше, чем меньше периодов гармонического колебания укладывается за время, равное длительности заполняемого импульса. При достаточно большом количестве периодов гармонических колебаний, укладывающихся за время импульса, практически можно учитывать только узкую область частот вблизи главного максимума, соответствующего основной частоте (частоте гармонических колебаний). Отсюда следует, что чисто гармонические колебания на практике отсутствуют. Колебания можно приближенно считать гармоническими в том случае, когда количество периодов этих колебаний за время одного импульса достаточно велико. Поэтому в спектре какого-либо гармонического колебания, длительность существования которого ограничена во времени, нельзя говорить о спектральной линии. Речь может идти о спектральной полосе, ширина которой зависит от соотношения между длительностью импульса и периодом гармонических колебаний, заполняющих импульс. Говоря о ширине спектральной линии (подразумевая спектральную полосу), имеют в виду обычно частотный интервал $\Delta\omega$, на границах которого функции распределения уменьшается до 0,7 своего максимального значения. Степень монохроматичности колебаний можно оценивать выражением

$$\Delta\omega \cdot \Delta t > 2\pi$$

Из приведенного выражения следует, что большая монохроматичность излучения (меньший интервал $\Delta\omega$) требует большего времени излучения (существования колебаний).

16.18. Нелинейные колебательные системы.

Линейными называются системы, свойства которых не изменяются при изменении их состояния, т.е. параметры системы, характеризующие ее свойства (например, масса, упругость, коэффициент трения для механических систем), не зависят от смещений и состояния, например, упругость пружины маятника с увеличением деформации перестает точно следовать закону Гука и т.д. Поэтому реальные механические системы можно рассматривать как линейные только приближенно, в определенных границах изменения ее параметров, когда ими можно пренебречь. Для большого числа систем эти пределы оказываются весьма широкими, поэтому широк и круг задач, в которых системы рассматриваются как линейные. В тех же случаях, когда изменениями параметров нельзя пренебрегать, сами системы уже следует рассматривать как нелинейные.

Линейные системы обладают рядом свойств, которые существенно упрощают их анализ. Процессы в линейных системах описываются линейными дифференциальными уравнениями (откуда произошло и само название систем). Вследствие этого, во-первых, линейные системы без искажения воспроизводят внешние воздействия, имеющие гармоническую форму, и, во-вторых, в линейных системах строго соблюдается принцип суперпозиции колебаний. Кроме того, линейные колебания изохронны, т.е. их частота не зависит от амплитуды колебаний.

В примерах колебаний рассмотренных в предыдущих параграфах (например, собственные колебания, вынужденные колебания и т.д.), возвращающая сила пропорциональна первой степени смещения, производных от смещения по времени различных порядков, называется линейным относительно самого смещения и его производных по времени. Если же в уравнении появляются

более высокие степени смещения и его производных, то уравнение становится нелинейным. Например, при больших смещениях математического маятника от положения равновесия в разложении $\sin \alpha$ уже нельзя пренебрегать более высокими степенями разложения по сравнению с первым членом.

Наиболее важным свойством линейных колебательных систем является то их свойство, что если система может одновременно принимать участие в двух движениях (в частности, колебательных), то результирующее смещение равно геометрической сумме принципа суперпозиции. В нелинейных же системах этот принцип не выполняется. Действительно, предположим, что нелинейная система описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + Ax^3 + Bx^2 + Cx = 0$$

Пусть записанное уравнение имеет два различных частных решения x_1 и x_2 , соответствующие различным начальным условиям. Для каждого из решений можно записать

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 = 0$$

и

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 = 0$$

Если принцип суперпозиции будет соблюдаться, уравнению должно удовлетворять и решение $x = x_1 + x_2$. После подстановки $x = x_1 + x_2$ в исходное уравнение получаем, что

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} + Ax_1^3 + Ax_2^3 + 3Ax_1^2 x_2 + 3Ax_1 x_2^2 + Bx_1^2 + Bx_2^2 + 2Bx_1 x_2 + Cx_1 + Cx_2 = 0$$

Как видно, из уравнения уравнение будет выполняться только в том случае, если выполняются условия

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 &= 0 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 &= 0 \\ 3Ax_1 x_2 (x_1 + x_2) + Bx_1 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Первых два условия соблюдаются всегда, поскольку x_1 и x_2 являются решениями уравнения движения. Что касается последнего уравнения, то оно будет выполняться только в том случае, если коэффициенты A и B равны нулю. Таким образом, принцип суперпозиции только для уравнений, у которого все коэффициенты при членах, содержащих во второй и более высоких степенях, равны нулю

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + Cx = 0$$

а это есть линейное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим несколько примеров нелинейных механических колебательных систем. Сразу же отметим, для решения нелинейных дифференциальных уравнений не существует стандартных методов, в разных случаях для изучения нелинейных систем применяют специальные приёмы, которые позволяют получить лишь приближённое описание системы, приближённое решение уравнений, описывающих нелинейную систему. Поэтому для получения основных, характерных для всех нелинейных систем выводов воспользуемся частными примерами.

Нелинейной, например, называется колебательная система с переменной упругостью. Переменная упругость (нелинейная зависимость упругости от деформации пружины) приводит к возникновению нелинейных колебаний, ещё раз отметим, что для нелинейных систем несправедлив принцип суперпозиции. Например, если поведение системы описывается

дифференциальным уравнением движения $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^3 x^3 = 0$ и известны его частные решения, то подстановка их поочерёдно в исходное уравнение даёт следующий результат.

Как видно, движение каждого тела проходит по совершенно одинаковым законам с одной и той же частотой ω_1 .

б). В исходный момент времени $t = t_0 = 0$ оба тела отводятся от их положения равновесия на одинаковое расстояние в разные стороны и отпускаются без толчка. Начальное смещение и скорости тел в этом случае равны: $x_{10} = B$, $x_{20} = -B$, $v_{10} = v_{20} = 0$. При таких начальных условиях, как это следует из (394), обращается в нуль амплитуда первой составляющей, т.е. оба тела будут совершать гармонические колебания с частотой ω_2 . Амплитуда колебаний b определяются из (395), а начальная фаза колебаний из (397):

$$b = 2B, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая полученные результаты, запишем законы движения тел и для этих начальных условий:

$$x_1 = B \cos \omega_2 t, \quad x_2 = -B \cos \omega_2 t$$

Получается, что и в этом случае движения каждого тела являются гармоническими, но колебания происходят в противофазе.

В). В исходный момент времени первое из тел отводится от положения равновесия на A , а второе удерживается в его положении равновесия. Затем оба тела без толчка отпускают. Начальное смещения тел и их начальные скорости равны $x_{10} = A$, $x_{20} = 0$, $v_{10} = v_{20} = 0$. Учитывая это, из выражений (394), (395), (396), (397) находим значения амплитуд составляющих и начальные фазы колебаний: $a = b = A$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

$$a = b = A, \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

С учётом полученных результатов можно в окончательном виде представить законы движения каждого из системы тел:

$$x_1 = \frac{A}{2} [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t]$$

$$x_2 = \frac{A}{2} [\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t]$$

Таким образом, при рассмотренных начальных условиях, в отличие от описанных ранее, колебания тел не являются чисто гармоническими, а представляют собой сумму двух гармонических составляющих различных частот. В этом легко убедиться, если законы тел записать в виде:

$$x_1 = A \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

$$x_2 = A \cdot \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Для такого рода колебаний необходимо отметить весьма существенную деталь. Как видно из самих законов движения, амплитуды колебаний отдельных тел системы с течением времени периодически изменяются по гармоническому закону. При этом, если в некоторый момент времени амплитуда колебаний одного из тел системы обращается в нуль, то амплитуда второго тела в данный момент времени становится максимальной. Следовательно, в системе энергия колебаний каждого тела периодически изменяется. В те моменты времени, когда энергия колебаний одного из них равна нулю, энергия второго максимальна. Иначе говоря, с течением времени происходит передача энергии от одного из колеблющихся тел ко второму.